

Symétries à plan invariant et orientation des trièdres Déplacements et Antidéplacements

(Note de M. H. MIRABEL, Professeur au Lycée Saint-Louis)

I. — Transformations (π)

1. DÉFINITION. — *Etant donné un plan (π) , nous dirons que deux points A_1 et A_2 sont homologues dans la transformation (π) si le plan π est médiateur du segment A_1A_2 .*

2. CONSÉQUENCES. — *a) Le plan π est invariant dans cette transformation, car il est constitué de points eux-mêmes invariants.*

b) Le plan π détermine dans l'espace deux demi-espaces ε_1 et ε_2 dont il est la commune frontière et tout point de ε_2 est homologue d'un point de ε_1 dans la transformation (π) et inversement.

c) Deux points A_1 et B_1 appartiennent au même demi-espace, par exemple ε_1 , si leur segment A_1B_1 ne contient aucun point du plan π . Leurs homologues A_2 et B_2 appartiennent dans ces conditions au même demi-espace ε_2 .

3. THÉORÈME. — *Toute transformation (π) est une ISOMÉTRIE, c'est-à-dire qu'à tout couple de points A_1B_1 , elle associe un couple de points A_2B_2 , tels que : $A_1B_1 = A_2B_2$.*

4. THÉORÈME. — *Trois points alignés ont pour homologues dans une transformation (π) trois points alignés.*

En effet, si trois points sont alignés, on peut les noter A_1, B_1, C_1 , de façon que l'on ait la relation : $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$.

Il en résulte que leurs homologues A_2, B_2, C_2 sont tels que :

$$A_2B_2 + B_2C_2 = A_2C_2 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

5. CONSÉQUENCES. — *La figure homologue d'un segment dans une transformation (π) est un segment.*

La figure homologue d'une droite est une droite.

Une droite orthogonale au plan π est globalement invariante dans la transformation (π) correspondante.

6. THÉORÈME. — *Dans une transformation (π) la figure homologue d'un plan $\mathcal{P}_1$ est un plan ($\mathcal{P}_2$).*

En effet, soit un plan ($\mathcal{P}_1$) contenant les 3 points A_1, B_1, C_1 . Si un point M_1 est dans ($\mathcal{P}_1$), il existe une droite rencontrant deux des côtés du triangle $A_1B_1C_1$ en E_1 et F_1 et qui contient M_1 . Par suite M_2 est sur l'alignement E_2F_2 dans le plan déterminé par les points A_2, B_2, C_2 respectivement homologues de A_1, B_1, C_1 dans la transformation considérée. Ce plan contient donc tous les homologues des différents points de $\mathcal{P}_1$.

Et inversement, tout point de $\mathcal{P}_2$ est l'homologue d'un point de $\mathcal{P}_1$.

Donc : le plan $\mathcal{P}_2$ est la figure transformée du plan $\mathcal{P}_1$.

7. CONSÉQUENCE. — Le demi-plan (p_1) défini par le plan ($\mathcal{P}_1$) par une droite D_1 , qui y est contenue, a pour transformé l'un des demi-plans (p_2) définis dans ($\mathcal{P}_2$) par la droite D_2 .

Si A_1 et B_1 appartiennent à (p_1), le segment A_1B_1 ne contient aucun point de D_1 . Donc le segment A_2B_2 ne contient aucun point de D_2 et A_2B_2 sont dans (p_2) dans un même demi-plan dont D_2 est frontière.

8. CONSÉQUENCE. — Tout plan ($\mathcal{P}$) orthogonal au plan π est transformé globalement en lui-même par la transformation (π) correspondante.

Un tel plan partage l'espace en deux demi-espaces ϵ' et ϵ'' . Chacun d'eux est globalement invariant dans la transformation (π) considérée.

9. THÉORÈME. — *Deux triangles $A_1B_1C_1$ et $A'B'C'$ dont les côtés sont deux à deux respectivement égaux :*

$$A_1B_1 = A'B' \quad A_1C_1 = A'C' \quad B_1C_1 = B'C'$$

sont homologues dans un produit de transformations (π) dont le nombre est inférieur ou égal à TROIS.

Le plan π_1 médiateur de A_1A' définit une transformation (π_1) qui associe : $A_1 \longrightarrow A', B_1 \longrightarrow B_2, C_1 \longrightarrow C_2$.

Par suite : $A'B_2 = A_1B_1 = A'B'$ et $B_1C_1 = B_2C_2 = B'C'$.

Le plan π_2 , médiateur de B_2B' contient donc A' et définit une transformation (π_2) qui associe :

$$A' \longrightarrow A' \quad B_2 \longrightarrow B' \quad C_2 \longrightarrow C_3$$

Par suite : $A'C_3 = A'C_2 = A'C'$ et $B_2C_2 = B'C_3 = B'C'$.

Le plan π_3 , médiateur de C_3C' , contient donc A' et B' et définit une transformation (π_3) qui associe :

$$A' \longrightarrow A' \quad B' \longrightarrow B' \quad C_3 \longrightarrow C'$$

Donc le produit des transformations : (π_1)(π_2)(π_3) associe aux points A_1, B_1, C_1 , respectivement les points A', B', C' . C.Q.F.D.

Il peut se faire qu'une des transformations soit inutile par exemple si B_2 était confondu avec B' . Donc le nombre des transformations (π) nécessaires est : ≤ 3 .

II. — Orientation des trièdres

Tout trièdre est formé par trois vecteurs de même origine et unitaires. Un trièdre est *orienté*, si l'on distingue un ordre entre les vecteurs qui le définissent.

10. DÉFINITIONS. — Etant donné un trièdre orienté : $\vec{OA}_1, \vec{OA}_2, \vec{OA}_3$. Les vecteurs $\vec{OA}_1$ et $\vec{OA}_2$ définissent un plan $\mathcal{P}$ qui partage l'espace en deux demi-espaces et nous noterons (ε_1) celui qui contient OA_3 . Dans le plan $(\mathcal{P})$ le support du vecteur $\vec{OA}_1$ définit deux demi-plans et nous noterons $(\mathcal{P}_1)$ celui qui contient $\vec{OA}_2$.

Dans ces conditions :

Tout trièdre, d'origine O ($\vec{OA}'_1, \vec{OA}'_2, \vec{OA}'_3$) tel que :

- 1) $\vec{OA}'_1$ est confondu avec $\vec{OA}_1$;
- 2) $\vec{OA}'_2$ et $\vec{OA}_2$ sont dans le même demi-plan $(\mathcal{P}_1)$;
- 3) $\vec{OA}'_3$ et $\vec{OA}_3$ sont dans le même demi-espace (ε_1) ,

sera dit avoir la même disposition ou le même sens que le trièdre $(\vec{OA}_1, \vec{OB}_1, \vec{OC}_1)$.

11. CONSÉQUENCE. — Cette relation est une relation d'équivalence. Elle permet donc d'associer à tout trièdre $(\vec{OA}_1, \vec{OB}_1, \vec{OC}_1)$ un trièdre trirectangle ayant la même disposition et aussi un trièdre dont les trois faces ont 60° .

12. THÉORÈME. — Deux trièdres orientés étant définis par des vecteurs unitaires : $\mathcal{C}_1 : (\vec{O}_1A_1, \vec{O}_1B_1, \vec{O}_1C_1)$ et $\mathcal{C}_2 : (\vec{O}_2A_2, \vec{O}_2B_2, \vec{O}_2C_2)$, il existe un produit de transformations (π) dont le nombre est inférieur à « QUATRE » qui transforme le trièdre $(\vec{O}_2A_2, \vec{O}_2B_2, \vec{O}_2C_2)$ en un trièdre $(\vec{O}_1A_3, \vec{O}_1B_3, \vec{O}_1C_3)$ qui a même disposition que le trièdre $(\vec{O}_1A_1, \vec{O}_1B_1, \vec{O}_1C_1)$.

Le plan $\mathcal{P}$ qui contient les vecteurs $\vec{O}_1A_1$ et $\vec{O}_1B_1$ est partagé par le support $\vec{O}_1A_1$ en deux demi-plans dont l'un $\mathcal{P}_1$ contient $\vec{O}_1B_1$. Dans ce demi-plan il existe un vecteur $\vec{O}_1B_3$ et un seul tel que :

$$\text{angle}(\vec{O}_1A_1 \text{ avec } \vec{O}_1B_3) = \text{angle}(\vec{O}_2A_2 \text{ avec } \vec{O}_2B_2).$$

Les vecteurs utilisés étant unitaires les deux triangles $O_1A_1B_3$ et $O_2A_2B_2$ ont donc leurs côtés respectivement égaux deux à deux :

$$O_1A_1 = O_2A_2, \quad O_1B_1 = O_2B_2, \quad A_2B_2 = A_1B_3.$$

Il existe donc un produit de transformations (π) de nombre inférieur ou égal à 3 qui associe les points O_2, A_2, B_2 respectivement aux points O_1, A_1, B_3 .

Dans ce produit de transformations, C_2 se transforme en un point C_3 .

Si les deux vecteurs $\vec{O}_1C_1$ et $\vec{O}_1C_3$ sont dans le même des deux demi-espaces définis par le plan $\mathcal{P}$, le théorème est démontré, car les deux trièdres $(\vec{OA}_1, \vec{OB}_3, \vec{OC}_3)$ et $(\vec{OA}_1, \vec{OB}_1, \vec{OC}_1)$ ont la même disposition.

Si $\vec{O}_1C_1$ et $\vec{O}_1C_3$ sont dans deux demi-espaces différents, la transformation $(\mathcal{P})$ définie par le plan $\mathcal{P}$ qui laisse $\vec{O}_1A_1$ et $\vec{O}_1B_3$ invariants, associera à $\vec{O}_1C_2, \vec{O}_1C_4$ et les deux trièdres $(\vec{O}_1A_1, \vec{O}_1B_3, \vec{O}_1C_4)$ et $(\vec{O}_1A_1, \vec{O}_1B_1, \vec{O}_1C_1)$ auront la même disposition. La proposition est donc démontrée.

13. DÉFINITION. — Un trièdre $(\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$ étant choisi comme « REPÈRE », un trièdre $(\vec{O'U'}, \vec{O'V'}, \vec{O'W'})$ sera dit « POSITIF » si le nombre de transformations (π) qui permettent de transformer ce dernier en un trièdre $(\vec{OU''}, \vec{OV''}, \vec{OW''})$, de même disposition que le repère est un nombre pair. Il sera dit négatif si ce nombre est impair.

14. NOTATION. — On désignera par Ω_2 tout produit d'un nombre *pair* de transformations (π) et par (Ω_1) tout produit d'un nombre *impair* de transformations (π) .

On notera que : la transformation inverse notée $(\pi)^{-1}$, d'une transformation (π) est une transformation (π) et aussi que : le produit d'une transformation (π) par elle-même : $(\pi)(\pi) = 1$ est une coïncidence ou identité.

15. THÉORÈME. — *Si deux trièdres sont « positifs » (resp. négatifs), il existe un produit Ω_2 d'un nombre pair de transformations (π) , qui transforme l'un d'eux en un trièdre de même disposition que l'autre.*

Remarquons d'abord que si un produit Ω_2 transforme un trièdre $(\vec{O_2U_2}, \vec{O_2V_2}, \vec{O_2W_2})$ en un trièdre de même disposition qu'un trièdre $(\vec{O_1U_1}, \vec{O_1V_1}, \vec{O_1W_1})$, la transformation inverse Ω_2^{-1} transforme $(\vec{O_1U_1}, \vec{O_1V_1}, \vec{O_1W_1})$ en un trièdre de même disposition que le trièdre $(\vec{O_2U_2}, \vec{O_2V_2}, \vec{O_2W_2})$.

Dès lors, soit $(\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$ le trièdre repère.

Si $(\vec{O_1U_1}, \vec{O_1V_1}, \vec{O_1W_1})$ est un trièdre positif, il existe un produit Ω_2 qui le transforme en un trièdre de même disposition que le repère.

Si $(\vec{O_2U_2}, \vec{O_2V_2}, \vec{O_2W_2})$ est un trièdre positif, il existe un produit Ω'_2 qui le transforme en un trièdre de même disposition que le repère.

Par suite, le produit $(\Omega_2)(\Omega'_2)^{-1}$ transformera le premier trièdre en un trièdre de même disposition que le second. Or, ce produit comporte un nombre pair de transformations π . Il est donc un produit (Ω''_2) . C.Q.F.D. (1).

16. THÉORÈME. — *Si deux trièdres sont l'un positif, l'autre négatif, il existe un produit Ω_1 d'un nombre impair de transformations (π) qui transforme l'un d'eux en un trièdre de même disposition que l'autre.*

Il résulte de ces deux théorèmes, dont les conclusions s'excluent l'une l'autre, que leurs réciproques sont valables.

17. THÉORÈME. — *Les trièdres $\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW}$ et $\vec{OV}, \vec{OU}, \vec{OW}$ sont de dispositions contraires.*

Soit (π) le plan orthogonal au plan $\mathcal{P}$ qui contient $\vec{OU}$ et $\vec{OV}$ et qui contient le vecteur $\vec{B}$ bissecteur de l'angle des deux vecteurs $\vec{OU}$ et $\vec{OV}$.

La transformation (π) définie par le plan π associe : $\vec{OU}$ à $\vec{OV}$ et $\vec{OV}$ à $\vec{OU}$ et laisse globalement invariant chacun des demi-espaces déterminés par le plan $\mathcal{P}$ orthogonal à π . Donc $\vec{OW}$ et $\vec{OW'}$ sont dans le même demi-espace dont $\mathcal{P}$ est frontière.

Donc : $\vec{OU}.\vec{OV}.\vec{OW}$ et $\vec{OV}.\vec{OU}.\vec{OW'}$ sont de disposition contraire puisqu'homologués dans une transformation (π) . Or : $\vec{OV}.\vec{OU}.\vec{OW}$ et $\vec{OV}.\vec{OU}.\vec{OW'}$ sont de même disposition par définition. Donc : $(\vec{OU}.\vec{OV}.\vec{OW})$ et $(\vec{OV}.\vec{OU}.\vec{OW})$ sont de disposition contraire.

18. THÉORÈME. — *Les trièdres $(\vec{OU}.\vec{OV}.\vec{OW})$ et $(\vec{OU}.\vec{OV}.\vec{OW})$ sont de disposition contraire.*

Soit $\mathcal{P}_1$ le plan $(\vec{OU}, \vec{OV})$ et $\mathcal{P}_2$ le plan $(\vec{OU}, \vec{OW})$. Une transformation (π) définie par l'un des bissecteurs du dièdre formé par les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, transforme le demi-plan défini dans $\mathcal{P}_1$ par le support de OU qui contient $\vec{OV_1}$ en le demi-plan défini dans $\mathcal{P}_2$ par ce même support et qui contient $\vec{OW}$.

(1) D'une manière générale deux trièdres positifs (resp. négatifs) seront dits de même sens ; un trièdre négatif et un trièdre positif seront dits de sens contraires.

Dans cette transformation $(\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$ devient $(\vec{OU}, \vec{OW'}, \vec{OV'})$ et les deux trièdres $(\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$ et $(\vec{OU}, \vec{OW'}, \vec{OV'})$ ont la même disposition par définition.

Donc : $(\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$ et $(\vec{OU}, \vec{OW'}, \vec{OV'})$ sont de disposition contraire.

19. CONSÉQUENCE. — a) les trièdres $(\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$ et $(\vec{OW}, \vec{OU}, \vec{OV})$ sont de même sens ;

b) les trièdres $(\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$ et $(\vec{OU}, \vec{OV}, -\vec{OW})$ sont de sens contraires ;

c) les trièdres $(\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$ et $(-\vec{OU}, -\vec{OV}, -\vec{OW})$ sont de sens contraires.

20. APPLICATION. — Dans un tétraèdre régulier ABCD, deux trièdres définis en échangeant deux sommets quelconques sont de sens contraires.

Ex. : AB, AC, AD et CB, CA, CD,

ou : AB, AC, AD et AB, AD, AC.

Même proposition si le tétraèdre est quelconque.

21. CONCLUSION. — Si deux figures sont homologues dans un produit Ω_2 d'un nombre pair de transformation (π) , deux trièdres homologues : (OA, OB, OC) et $(O'A', O'B', O'C')$ sont de même sens.

Si deux figures sont homologues dans un produit Ω_1 d'un nombre impair de transformations (π) , deux trièdres homologues sont de sens contraires.

III. — Déplacements et antidéplacements

22. DÉFINITIONS. — On appelle « déplacement » tout produit Ω_2 d'un nombre pair de transformations (π) .

On appelle « antidéplacement » tout produit Ω_1 d'un nombre impair de transformations (π) .

On appelle « figures égales » deux figures homologues l'une de l'autre dans un déplacement.

On appelle « figures antiégales » deux figures homologues dans un antidéplacement.

23. THÉORÈME. — Toute isométrie est un déplacement ou un antidéplacement. C'est le théorème n° 12.

24. CONCLUSION. — Le déplacement est une transformation ponctuelle qui conserve les distances mutuelles de deux points arbitraires et la disposition des trièdres. L'antidéplacement est une transformation ponctuelle qui conserve les distances mutuelles de deux points arbitraires et modifie la disposition des trièdres.

25. CONSÉQUENCES. — La transformation inverse d'un déplacement est un déplacement.

L'identité est un déplacement.

Le produit de deux déplacements est un déplacement.

Les déplacements forment un « groupe de transformations ».

26. CONSÉQUENCES. — Le produit de deux transformations (π_1) et (π_2) définis par deux plans π_1 et π_2 :

1° si π_1 est parallèle à π_2 , s'appelle une translation ;

2° si π_1 est sécant à π_2 suivant une droite D, s'appelle une rotation d'axe D ;

3° si π_1 est orthogonal à π_2 , s'appelle une transposition ;

4° si π_1 est confondu avec π_2 , est l'identité.

NOTE. — Les lignes qui précèdent sont un « essai » d'exposition à l'usage des élèves de *Math. Élémentaires*, suggéré par la brillante conférence faite en mai 1953 par M. G. CHOQUET, Professeur à la Sorbonne, devant les Professeurs de Mathématiques qui y avaient été conviés par la Commission d'Axiomatique de l'A.P.M.E.P. Il conviendrait de trouver une dénomination brève et évocatrice pour dénommer

les transformations (π). Le mot de symétrie étant susceptible de créer des confusions. Elles peuvent avantageusement remplacer les transpositions employées traditionnellement jusqu'ici dans l'étude des déplacements.

H. MIRABEL,
*Professeur de Mathématiques Supérieures
au Lycée Saint-Louis.*