

DEUXIÈME PARTIE

Sur les bases axiomatiques de l'addition des segments orientés de même origine et sur la multiplication scolaire

(Conférence faite par M. L. CHATTELUN, au Lycée Henri-IV en mars 1953)

I

Nous nous proposons de fonder axiomatiquement la règle du parallélogramme en géométrie euclidienne. Nous serons conduit dans cette étude à montrer qu'en réalité l'addition des segments orientés concourants est indépendante du *postulatum* d'Euclide, celui-ci n'intervenant seulement que lorsqu'il s'agit de passer des segments concourants aux vecteurs (libres).

Dans tout ce qui suivra, nous sous-entendrons le qualificatif « orienté », et, pour éviter toute ambiguïté avec les vecteurs, nous représenterons par (OA) ou (a) le segment orienté d'origine O , d'extrémité A et de longueur a .

Étant donnés des segments de même origine O , cherchons s'il est possible de définir une opération, appelée *addition*, qui jouisse des propriétés axiomatiques suivantes :

I_1) elle est bien déterminée, c'est-à-dire qu'elle conduit à un segment unique d'origine O , appelé somme ;

I_2) elle est commutative ;

I_3) elle est associative ;

I_4) le segment nul (c'est-à-dire de longueur nulle) est par rapport à l'opération d'effet nul : $(a) + (O) = (O) + (a) = (a)$.

II) Dans le cas où les segments sont portés par une même droite, leur addition découle de l'addition algébrique des scalaires (axiome de permanence).

Explicitons cette condition. En vertu du postulat de Cantor-Dedekind, il existe une correspondance univoque et réciproque entre les points d'un axe et les scalaires, par suite, entre les segments portés par un même axe et les scalaires. On admet que la somme de deux segments colinéaires est un segment colinéaire à ces segments et que le scalaire qui mesure la somme se déduit par les règles ordinaires de l'addition algébrique des mesures des deux segments.

Remarquons que la condition II, jointe aux quatre conditions I, entraîne que l'ensemble des segments de même origine constitue un espace vectoriel, sous réserve d'établir, en outre, ce que nous ferons plus loin, que, k , désignant un scalaire réel, on a $k(a) + k(b) = k(a + b)$, lorsque (a) et (b) ne sont pas colinéaires.

III) La figure formée par deux segments d'origine O et leur somme reste égale à elle-même dans une rotation autour d'un axe quelconque passant par O (axiome de la congruence).

IV) L'opération est continue, c'est-à-dire que si (OA) est un segment fixe et (Ox) un segment qui tend vers zéro, le segment $(OA) + (Ox)$ tend vers un segment limite qui est (OA) (axiome de continuité).

Il en résulte de là que si $(b) \rightarrow (c)$, $(a) + (b) \rightarrow (a) + (c)$. Car, posant $(b) = (c) + (x)$, (x) tendant vers zéro, on a, en vertu de I_3

$$(a) + (b) = (a) + [(c) + (x)] = [(a) + (c)] + (x) \text{ qui } \rightarrow (a) + (c).$$

Etablissons deux propriétés préliminaires.

1° En vertu de II, la somme de deux segments opposés est un segment nul. Réciproquement, si la somme de deux segments est nulle, ces deux segments sont opposés.

Soient en effet (a_1) et (a_2) deux segments tels que $(a_1) + (a_2) = 0$. Considérons le segment (a'_1) opposé à (a_1) : on a $(a_1) + (a'_1) = 0$.

D'après l'hypothèse (condition I_4) $[(a_1) + (a_2)] + (a'_1) = (a'_1)$, d'où (condi-

tions I_2 et I_3) $(a_2) + [(a_1) + (a'_1)] = (a'_1)$ et (condition I_4) $(a_2) = (a'_1)$, ce qui établit la propriété.

2° La somme de deux segments concourants est coplanaire à ces segments.

Soit $(s) = (a_1) + (a_2)$.

Considérons les segments (a'_1) et (a'_2) respectivement opposés à (a_1) et (a_2) . On a $[(a_1) + (a'_1)] + [(a_2) + (a'_2)] = 0$, d'où (conditions I_2 et I_3)

$$[(a_1) + (a_2)] + [(a'_1) + (a'_2)] = 0,$$

et, en posant $(s') = (a'_1) + (a'_2)$, $(s) + (s') = 0$.

Il en résulte, d'après la propriété précédente, que les segments (s) et (s') sont opposés.

Faisons tourner la figure formée par (a_1) , (a_2) et (s) de deux droits autour de l'axe Δ passant par O et perpendiculaire au plan P déterminé par (a_1) et (a_2) .

D'après l'axiome de la congruence, (a_1) , (a_2) et (s) viennent en coïncidence avec (a'_1) , (a'_2) et (s') . Or la coïncidence de (s) et (s') serait impossible si ces segments n'étaient pas dans le plan P , car (s) et (s') étant opposés, resteraient, après la rotation autour de Δ , de part et d'autre du plan P , cette rotation laissant le segment (s) d'un même côté de P ; d'où contradiction.

A. SOMME DE DEUX SEGMENTS CONCOURANTS DE MÊME LONGUEUR

Soient (OA_1) et (OA_2) deux segments de même longueur a ; nous désignerons par $2x$ la mesure de l'angle $\widehat{A_1OA_2}$, moindre que π ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$), par s la longueur de la somme (OS) des deux segments.

a) *Direction de* (OS) . — Soient Oz la bissectrice de l'angle $\widehat{A_1OA_2}$ moindre que π et Oz' la demi-droite opposée. Une rotation de deux droits autour de la droite zOz' amène la figure A_1OA_2 en $A'_1OA'_2$, (OA'_1) et (OA'_2) coïncidant respectivement avec (OA_2) et (OA_1) . D'après l'axiome de la congruence, (OS) vient coïncider avec la somme (OS') de (OA'_1) et (OA'_2) , c'est-à-dire de (OA_2) et (OA_1) . D'autre part, en vertu de I_2 , (OS') n'est autre que (OS) ; par suite, l'égalité $S'O A'_1 = S O A_1$ donne $S O A_2 = S O A_1$, ce qui montre, OS étant dans le plan A_1OA_2 , que la demi-droite OS est portée par la droite zOz' .

b) *Sens de* (OS) . — Supposons (OA_1) fixe et faisons tendre (OA_2) vers (OA_1) en lui faisant balayer l'angle $\widehat{A_2OA_1}$ moindre que π ; d'après l'axiome de continuité (OS) tend vers $(OA_1) + (OA_1)$, c'est-à-dire, en vertu de l'axiome de permanence, vers $2(OA_1)$. Or dans cette rotation Oz vient coïncider avec la demi-droite OA_1 (Oz' coïncidant avec la demi-droite opposée à OA_1); il en résulte que le sens de (OS) ne peut être que celui de Oz .

c) *Longueur de* (OS) . — La longueur s est fonction de a et de x ($s, a, x \geq 0$). Donnons d'abord à x une valeur déterminée et cherchons la forme de la fonction $s = f(a)$. Soient (OA'_1) et (OA'_2) deux segments respectivement colinéaires à (OA_1) et (OA_2) , de même sens qu'eux et de longueur commune a' . Posons

$$(s') = (OA'_1) + (OA'_2).$$

Evaluons de deux façons la somme $(s) + (s')$. On a (conditions I_2 et I_3):

$$[(OA_1) + (OA_2)] + [(OA'_1) + (OA'_2)] = [(OA_1) + (OA'_1)] + [(OA_2) + (OA'_2)].$$

La longueur de la somme $(OA_1) + (OA_2)$ est $f(a)$; celle de $(OA'_1) + (OA'_2)$ est $f(a')$. D'autre part (condition II), les deux segments $[(OA_1) + (OA'_1)]$ et $[(OA_2) + (OA'_2)]$ ont même longueur $a + a'$, de sorte que leur somme a pour longueur $f(a + a')$.

La fonction $f(a)$ satisfait donc à l'équation fonctionnelle $f(a + a') = f(a) + f(a')$. En vertu de l'axiome de continuité, la fonction $f(a)$ est elle-même continue et l'on sait que, dans ces conditions, $f(a)$ est de la forme $H.a$, H étant une constante par

rapport à a (mais une fonction de x). Nous posons $H = 2\varphi(x)$ et nous aurons donc
 $s = 2a\varphi(x)$.

Recherche de la fonction $\varphi(x)$.

Cette fonction doit satisfaire à priori à certaines conditions : elle doit être continue (condition IV), positive ou nulle ($s \geq 0$). De plus $\varphi(0) = 1$ (cas où (OA_1) et (OA_2) sont confondus), et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$ (cas où (OA_1) et (OA_2) sont opposés).

Ainsi la fonction continue $\varphi(x)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) doit satisfaire aux conditions :

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) \geq 0, \\ \varphi(0) = 1, \\ \varphi(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{array} \right.$$

Considérons deux segments (OA'_1) et (OA'_2) de même longueur a , que (OA_1) et (OA_2) , admettant comme bissectrice de l'angle $A'_1OA'_2$, moindre que π la bissectrice Oz , de l'angle A_1OA_2 , moindre que π . Posons $A'_1OA'_2 = 2y$ et supposons, pour fixer les idées, $y < x$ (I).

Evaluons de deux façons la somme

$$(\Sigma) = [(OA_1) + (OA_2)] + [(OA'_1) + (OA'_2)]$$

qu'on peut écrire aussi

$$(\Sigma') = [(OA_1) + (OA'_1)] + [(OA_2) + (OA'_2)] ;$$

c'est un segment porté par Oz .

La longueur de (Σ) est $2a\varphi(x) + 2a\varphi(y)$. D'autre part, $(OA_1) + (OA'_1)$ est un segment de longueur $2a\varphi(\frac{x-y}{2})$ porté par la bissectrice Oz_1 de $A_1OA'_1$; de même $(OA_2) + (OA'_2)$, porté par la bissectrice de Oz_2 de $A_2OA'_2$ a pour longueur $2a\varphi(\frac{x+y}{2})$. D'ailleurs $\widehat{zOz_1} = \widehat{zOz_2} = \frac{x+y}{2}$, par suite la longueur de (Σ')

$$\text{est} \quad 2 \cdot 2a\varphi(\frac{x-y}{2}) \cdot \varphi(\frac{x+y}{2}).$$

D'où l'équation fonctionnelle, trouvée par Poisson, à laquelle satisfait $\varphi(x)$:

$$(E) \quad \varphi(x) + \varphi(y) = 2\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (2)$$

Remarquons que la deuxième condition (C) est satisfaite d'elle-même, car si

l'on remplace dans (E) y par x ($\neq \frac{\pi}{2}$), on obtient $2\varphi(x) = 2\varphi(0) \cdot \varphi(x)$ d'où, $\varphi(x)$ étant $\neq 0$, $\varphi(0) = 1$.

Etude analytique de l'équation (E).

Nous supposons uniquement que la fonction $\varphi(x)$ est continue, sans admettre l'existence de la dérivée.

Propriétés immédiates de la fonction $\varphi(x)$.

1° *La fonction est paire.* — Permutons x et y dans (E) : $\varphi(\frac{y-x}{2}) = \varphi(\frac{x-y}{2})$ d'où, x et y étant quelconques, $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

2° $\varphi(\pi - x) = -\varphi(x)$. — Remplaçons dans (E) y par $\pi - x$:

$$\varphi(x) + \varphi(\pi - x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

d'où, en supposant $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\varphi(x) + \varphi(\pi - x) = 0$,

(1) Le lecteur est prié de faire la figure. On suppose (OA_1) et (OA'_1) d'un même côté de Oz .

3° Fonction $\psi(x)$. — Posons $\psi(x) = \varphi(\frac{\pi}{2} - x)$.

$\psi(x)$ est continue en vertu de la continuité de $\varphi(x)$.

$\psi(x)$ est impaire, car

$$\psi(-x) = \varphi(\frac{\pi}{2} + x) = \varphi[\pi - (\frac{\pi}{2} - x)] = -\varphi(\frac{\pi}{2} - x) = \psi(x).$$

$\psi(x) \geq 0$ pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Les conditions (C) donnent $\psi(0) = 0$ et $\psi(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Remplaçons dans (E) x et y par $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} - y$, il vient

$$(1) \quad \psi(x) + \psi(y) = 2\psi\left(\frac{x+y}{2}\right) \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

4° La fonction $\varphi(x)$ est décroissante entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; $\psi(x)$ est croissante. — Remplaçons dans (E) y par $\pi - y$, il vient

$$(2) \quad \varphi(x) - \varphi(y) = -2\psi\left(\frac{x+y}{2}\right) \psi\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

d'où, en supposant $x > y$, $\varphi(x) - \varphi(y) < 0$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Il résulte immédiatement de là que $\psi(x)$ est croissante entre les mêmes limites. On voit aussi qu'entre ces limites $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont < 1 .

5° Remplaçons dans (1) y par $-y$:

$$(3) \quad \psi(x) - \psi(y) = 2\psi\left(\frac{x-y}{2}\right) \psi\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

6° Ajoutons membre à membre (E) et (2):

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) \psi\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Ajoutons membre à membre (1) et (3):

$$\psi(x) = \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) \psi\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Posons $\frac{x-y}{2} = a$, $\frac{x+y}{2} = b$; les deux relations précédentes deviennent:

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi(a+b) = \varphi(a)\varphi(b) - \psi(a)\psi(b), \\ \psi(a+b) = \psi(a)\varphi(b) + \psi(b)\varphi(a). \end{cases}$$

Ceci établi nous pouvons trouver les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.

Tannery a démontré dans son « Introduction à la Théorie des Fonctions d'une variable » que, moyennant la condition supplémentaire $\frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$, variable » que, moyennant la condition supplémentaire $\psi(x)/x \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$, les seules fonctions continues satisfaisant aux relations (5) sont $\varphi(x) = \cos x$ et $\psi(x) = \sin x$, $\cos x$ et $\sin x$ étant définis par leurs développements en série. Son raisonnement montre que si $\frac{\psi(x)}{x} \rightarrow l$, les fonctions sont alors $\cos lx$ et $\sin lx$.

Or cette condition supplémentaire est satisfaite pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

La relation (1), dans laquelle $\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) \leq 1$, donne $\frac{1}{2}[\psi(x) + \psi(y)] \leq \psi\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

(2) L'équation (E) joue aussi un rôle fondamental dans l'édification de la Trigonométrie en Géométrie non euclidienne.

c'est-à-dire que la fonction $\psi(x)$ est *convexe* (vers le haut). Mais on sait qu'une fonction continue convexe admet en chaque point une dérivée à droite et une dérivée à gauche, sauf au plus en un ensemble dénombrable de points. Soit alors x_0 un point non exceptionnel du segment $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Dans la relation (3) faisons $x = x_0 + h$ et

$$y = x_0, \text{ on obtient } \frac{\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)}{h} = \frac{\psi(\frac{h_0}{2})}{(\frac{h}{2})} \varphi(x_0 + \frac{h}{2}).$$

Faisons tendre h vers 0 par valeurs positives : le premier membre a une limite $\psi^+(x_0)$; $\varphi(x_0 + \frac{h}{2}) \rightarrow \varphi(x_0)$ en vertu de la continuité ; de sorte que $\frac{\psi(\frac{h_0}{2})}{(\frac{h}{2})}$ a une limite $\frac{\psi^+(x_0)}{\varphi(x_0)}$; c'est dire que $\frac{\psi(x)}{x}$ a une limite l quand $x \rightarrow 0$ par valeurs positives. D'ailleurs $\psi(x)$ étant une fonction impaire, $\frac{\psi(x)}{x}$ a encore pour limite l quand $x \rightarrow 0$ par valeurs négatives.

On a donc $\varphi(x) = \cos lx$.

D'autre part, on voit tout de suite que la condition $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$, jointe à $\varphi(x) > 0$ pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ entraîne $l = 1$. Il en résulte qu'en définitive on a $\varphi(x) = \cos x$, et, par suite $s = 2a \cos x$.

Ainsi se trouve déterminée la somme de deux segments concourants de même longueur.

Il importe de remarquer que dans cette étude nous n'avons pas eu à faire intervenir le *postulatum* d'Euclide, ni pour la détermination de la direction et du sens de (OS), ni pour la recherche de la fonction $\varphi(x)$. On sait, en effet, que les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ étant introduites par leurs développements en série, ou ce qui revient au même par leurs propriétés caractéristiques (5) déduites de l'équation (E) à laquelle sont jointes les conditions (C), la théorie analytique des fonctions circulaires (de même que la trigonométrie sphérique) s'édifie indépendamment du *postulatum* d'Euclide.

En géométrie euclidienne, $a \cos x$ n'est autre que la projection orthogonale (OI) de (OA₁) ou (OA₂) sur Os ; on a donc OS = 2.OI, ce qui, dans ce cas, conduit à la règle du parallélogramme.

En géométrie non euclidienne (riemanienne ici, à cause de l'inégalité $\varphi(x) < 1$), on a OI > $a \cos x$, d'où OS < 2 OI.

Pour passer du cas particulier étudié de la somme de deux segments concourants de même longueur au cas général de deux segments concourants quelconques, on peut conduire les raisonnements de manière à ne pas introduire le *postulatum* d'Euclide. C'est ce que nous allons montrer maintenant.

B. SOMME DE DEUX SEGMENTS CONCOURANTS RECTANGULAIRES

Soient (OA) et (OB) deux segments rectangulaires, a et b leurs longueurs. Traçons dans l'angle droit AOB la demi-droite Oz définie par l'angle aigu $\widehat{AOz} = \alpha$ que nous déterminerons plus loin. Les demi-droites OD et OE symétriques de Oz par rapport à OA et OB respectivement sont en prolongement l'une de l'autre.

Marquons sur OD le point D, sur OE le point E et sur Oz le point K à égales distances ρ de O (OD = OE = OK = ρ) et tels que

$$(OA) = (OD) + (OK), (OB) = (OE) + (OK).$$

Les segments (OD) et (OE) étant opposés, on a $(OA) + (OB) = 2(OK)$.

Tout revient à déterminer α et ρ pour que les conditions indiquées soient satisfaites. Or, d'après le cas A, on a

$$(1) \quad \begin{cases} a = 2\rho \cos \alpha, \\ b = 2\rho \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2\rho \sin \alpha, \end{cases}$$

d'où
$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \cos \alpha = \frac{a}{2\rho}.$$

Remarquons que si l'on considère les segments $k(OA)$ et $k(OB)$, ρ se trouve multiplié par le scalaire k et α reste le même ; c'est dire que $k(a) + k(b) = k(a+b)$. Ainsi se trouve établie une propriété annoncée au début de cette étude.

En géométrie euclidienne, les relations (1), qui s'écrivent

$$\begin{cases} OK \cos \alpha = \frac{1}{2} OA, \\ OK \sin \alpha = \frac{1}{2} OB, \end{cases}$$

montrent que le point K se projette orthogonalement sur OA en son milieu et de même sur OB en son milieu. Le point K est donc le milieu de l'hypoténuse AB du triangle rectangle AOB. ($AB = \sqrt{a^2 + b^2}$; $OK = \frac{1}{2} AB$). On retrouve ainsi la règle du parallélogramme.

C. SOMME DE DEUX SEGMENTS CONJUGUÉS QUELCONQUES

Traçons dans l'angle $\widehat{AOB}$ (moindre que π) des deux segments donnés la demi-droite Oz , que nous déterminerons plus loin, et menons la perpendiculaire DOE à Oz ; la demi-droite OA est dans l'angle droit $\widehat{DOz}$ et la demi-droite OB dans l'angle droit $\widehat{EOz}$.

On pose $\widehat{AOD} = \alpha (< \frac{\pi}{2})$, $\widehat{BOE} = \beta (< \frac{\pi}{2})$, $\widehat{AOB} = \varphi (< \pi)$. On a

$$\alpha + \beta = \pi - \varphi.$$

Marquons respectivement sur les demi-droites OD et OE les points D et E situés à égale distance ρ de O ($OD = OE = \rho$), sur Oz les points F et H ($OF = \rho'$, $OH = \rho''$) et tels que

$$(OA) = (OD) + (OF), \quad (OB) = (OE) + (OH).$$

Les segments (OD) et (OE) étant opposés, on aura :

$$(OA) + (OB) = (OF) + (OH)$$

$$\text{ou } (OA) + (OB) = 2(OK), \text{ K étant le milieu de FH.}$$

Tout revient à déterminer α , β , ρ , ρ' , ρ'' pour que les conditions indiquées soient satisfaites.

D'après le cas B, on a :

$$(2) \quad \begin{cases} \rho = a \cos \alpha, \\ \rho' = a \sin \alpha, \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} \rho = b \cos \beta, \\ \rho'' = b \sin \beta. \end{cases} \quad (OA = a ; OB = b).$$

On en tire immédiatement $a \cos \alpha = b \cos \beta = b \cos (\varphi' - \alpha)$,

d'où
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a - b \cos \varphi'}{b \sin \varphi'}.$$

α ainsi déterminé donne la demi-droite OD, par suite Oz ; on obtient ensuite β , ρ , ρ' , ρ'' , d'où les points F et H, par suite K et la somme $(OS) = 2(OK)$ des deux segments (OA) et (OB).

Remarquons encore que si l'on considère les segments $k(OA)$ et $k(OB)$, α et β ne changent pas tandis que ρ , ρ' , ρ'' sont multipliés par le scalaire k . Par suite

$$k(a) + k(b) = k(a + b).$$

En géométrie euclidienne, les relations (2) montrent que A se projette orthogonalement en D sur DOE et en F sur Oz ; de même les relations (3) indiquent que B se projette orthogonalement en E sur DOE et en H sur Oz. Les quadrilatères ODAF et OEBH sont donc des rectangles et l'on a alors $AF = BH (= \rho)$. Il en résulte que le point K milieu de FH est situé sur AB en son milieu. On retrouve ainsi, dans le cas général, la règle du parallélogramme.

II

Etant donnés deux segments concourants $(OA) = (a)$ et $(OB) = (b)$, cherchons s'il est possible de définir une opération, appelée multiplication scalaire, qui jouisse des propriétés axiomatiques suivantes :

I) elle ne fait intervenir que les longueurs a, b des segments et leur angle θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) et elle conduit à un scalaire unique, $f(a, b, \theta)$, appelé produit scalaire ;

II) elle est distributive par rapport à l'addition des segments ;

III) lorsque les segments sont colinéaires et de même sens, leur produit scalaire $f(a, b, 0)$ est égal au produit arithmétique ab de leurs longueurs : $f(a, b, 0) = ab$;

IV) le produit scalaire est positif lorsque θ est aigu ;

V) l'opération est continue, c'est-à-dire que si $(b) \rightarrow (c)$ le produit scalaire de (a) par (b) a une limite qui est le produit scalaire de (a) par (c) .

A. — Soit (c) un segment colinéaire à (b) et de même sens que (b) . La longueur de $(b) + (c)$ est $b + c$ et d'après la condition II), on doit avoir

$$f(a, b, \theta) + f(a, c, \theta) = f(a, b + c, \theta).$$

Fixons a et θ ; en vertu de la condition V), la fonction $f(a, b, \theta)$ considérée comme fonction de b , est continue et l'équation fonctionnelle précédente entraîne

$$f(a, b, \theta) = H(a, \theta) \cdot b,$$

H étant une constante par rapport à b .

Considérons maintenant un segment (c) colinéaire à (a) et de même sens que (a) , on devra avoir comme précédemment

$$H(a, \theta) \cdot b + H(c, \theta) \cdot b = H(a + c, \theta) \cdot b,$$

d'où l'équation fonctionnelle

$$H(a, \theta) + H(c, \theta) = H(a + c, \theta),$$

qui entraîne

$$H(a, \theta) = K \cdot a,$$

K étant une constante par rapport à a , mais une fonction de θ .

On peut donc poser

$$(1) \quad f(a, b, \theta) = ab\varphi(\theta),$$

$\varphi(\theta)$ étant une fonction continue à déterminer.

B. — Il est possible, dès maintenant, d'établir certaines propriétés de la multiplication scalaire, à partir de l'égalité (1) :

a) si (a) ou (b) est nul, le produit scalaire est nul ;

b) si l'on permute a et b , le produit scalaire ne change pas : la multiplication scalaire est commutative ;

c) soit (a') l'opposé de (a) , $(a + a' = 0)$; en vertu de la condition II),

$$f(a, b, \theta) + f(a', b, \theta) = f(a + a', b, \theta) = f(0, b, \theta) = 0,$$

d'où

$$f(a', b, \theta) = -f(a, b, \theta) :$$

si (a) ou (b) change de sens, le produit scalaire change de signe ;

d) changer le sens de (a) revient à remplacer θ par $\pi - \theta$; il en résulte que

$$f(a, b, \pi - \theta) = -f(a, b, \theta),$$

ou, d'après (1),

$$(2) \quad \varphi(\pi - \theta) = -\varphi(\theta).$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, (2) donne $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$, c'est dire que le produit scalaire de deux segments perpendiculaires est nul.

Remarquons encore que si θ est obtus $\pi - \theta$ est aigu, donc $\varphi(\pi - \theta)$ est positif, par suite $\varphi(\theta)$ est négatif : *lorsque θ est obtus, le produit scalaire est négatif.*

Enfin, pour $\theta = 0$, la formule (2) donne $\varphi(\pi) = -\varphi(0)$, d'où résulte, en vertu de la condition III), $\varphi(0) = 1$ et $f(a, b, \pi) = -ab$, ce qui permet de donner la généralisation algébrique de la condition III) : si deux segments sont portés par un même axe, leur produit scalaire est égal au produit de leurs mesures algébriques (rapportées à cet axe).

C. — RECHERCHE DE LA FONCTION $\varphi(\theta)$.

Considérons un segment (OC) = (c) de même longueur que (OB) et tel que (OB) et (OC) soient d'un même côté du plan par rapport au support de (OA). Nous supposons, pour fixer les idées, que (OC) est situé dans l'angle $\widehat{AOB}$ moindre que π .

Nous poserons $\widehat{AOB} = x$, $\widehat{AOC} = y$, ($x > y$).

La somme (OB) + (OC) a pour longueur $2b \cos \frac{x-y}{2}$ et elle fait l'angle $\frac{x+y}{2}$ avec (OA). ($0 \leq \frac{x-y}{2} \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq \frac{x+y}{2} \leq \pi$).

La condition II) donne, en tenant compte de la formule (1),

$$ab\varphi(x) + ac\varphi(y) = a \cdot 2b \cos \frac{x-y}{2} \cdot \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

c'est-à-dire, en remarquant que $c = b$,

$$(E') \quad \varphi(x) + \varphi(y) = 2 \cos \frac{x-y}{2} \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Telle est l'équation fonctionnelle à laquelle doit satisfaire la fonction continue $\varphi(x)$.

$\varphi(x)$ doit, d'autre part, satisfaire aux conditions précédemment trouvées $\varphi(0) = 1$,

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

On voit tout de suite que la fonction $\varphi(x) = \cos x$ répond à ces conditions. Établissons que c'est la *seule* fonction possible.

Montrons d'abord que toute solution de (E') est décroissante dans l'intervalle (0, π).

Remplaçons y par $\pi - y$ dans (E') ; on obtient, en tenant compte de (2),

$$\varphi(x) - \varphi(y) = 2 \sin \frac{x+y}{2} \varphi\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x-y}{2}\right).$$

Les inégalités $0 < \frac{x+y}{2} < \pi$ et $0 < \frac{x-y}{2} < \frac{\pi}{2}$ entraînent que le facteur $\sin \frac{x+y}{2}$ est positif, tandis que $\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x-y}{2}\right)$ est négatif (car $\frac{\pi}{2} + \frac{x-y}{2} > \frac{\pi}{2}$) ; il en résulte que $\varphi(x) - \varphi(y) < 0$, et, comme $x > y$, que $\varphi(x)$ est décroissante.

Ceci établi, nous utiliserons le principe d'une méthode indiquée par J. ANDRADE (« Leçons de Mécanique Physique »).

Faisons $y = 0$ dans (E'), il vient,

$$(3) \quad \varphi(x) + 1 = 2 \cos \frac{x}{2} \varphi\left(\frac{x}{2}\right).$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $1 = \sqrt{2} \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$ d'où $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Connaissant $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, la relation (3) donne $\varphi\left(\frac{\pi}{8}\right)$, et ainsi, de proche en proche $\varphi\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

Faisons dans (E') $x = k \frac{\pi}{2^n}$ $y = (k-2) \frac{\pi}{2^n}$ (k entier), on obtient :

$$\varphi\left(k \frac{\pi}{2^n}\right) + \varphi\left[(k-2) \frac{\pi}{2^n}\right] = 2 \cos \frac{\pi}{2^n} \varphi\left[(k-1) \frac{\pi}{2^n}\right].$$

formule qui donne $\varphi\left(k \frac{\pi}{2^n}\right)$ connaissant φ pour les valeurs précédentes de k .

La fonction $\cos x$ satisfaisant à (E'), et par suite à (3), on a, quels que soient les entier n et k ,

$$\varphi\left(k \frac{\pi}{2^n}\right) = \cos\left(k \frac{\pi}{2^n}\right).$$

Soit x un angle quelconque ($0 \leq x \leq \pi$). Fixons provisoirement n , il existe un entier k tel que

$$k \frac{\pi}{2^n} \leq x < (k+1) \frac{\pi}{2^n}.$$

La différence entre les deux membres extrêmes, $\frac{\pi}{2^n}$, tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$;

il en résulte que $k \frac{\pi}{2^n} \rightarrow x$ quand $n \rightarrow \infty$.

La fonction $\varphi(x)$ étant décroissante, on a

$$\varphi\left[(k+1) \frac{\pi}{2^n}\right] < \varphi(x) \leq \varphi\left(k \frac{\pi}{2^n}\right),$$

ou

$$\cos\left((k+1) \frac{\pi}{2^n}\right) < \varphi(x) \leq \cos k \frac{\pi}{2^n}.$$

Les deux membres extrêmes tendant vers $\cos x$ quand $n \rightarrow \infty$, on a $\varphi(x) = \cos x$.

L'opération envisagée est donc possible et elle conduit à la définition habituelle du produit scalaire : $ab \cos \theta$.

On remarquera encore que les raisonnements précédents n'ont pas fait intervenir le postulatum d'Euclide ; la multiplication scalaire est donc en réalité indépendante de ce postulatum. Mais il convient de noter qu'en Géométrie non euclidienne (ici riemannienne), le produit scalaire ne s'exprime pas en fonction de la projection orthogonale de l'un des segments sur le support de l'autre.

L. CHATTELUN.