

TEXTES D'EXAMENS 1953

I. Baccalauréat

Première Partie

SESSION DE JUIN

France Métropolitaine. A). I. *Cours.* — 1. Etablir les formules donnant la somme et le produit des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Condition pour qu'il existe deux nombres dont la somme ait une valeur donnée s et le produit une valeur donnée p . — 2. Démontrer qu'un trinôme du second degré qui ne s'annule pour aucune valeur de x a toujours le même signe, quel que soit x . — 3. Définir et calculer, sans appliquer de formule, la dérivée de la fonction $y = -x^2 + x + 6$ pour $x = -2$. Signification géométrique.

II. *Problème.* — On donne dans un plan (P) un triangle isocèle ACB ($AB = AC = a$) dont l'angle au sommet A vaut 120° . Soit H le milieu de BC.

1° Le cercle de centre H et de rayon HA coupe la droite AB en un point B' distinct de A. Calculer, en fonction de a , la longueur du segment AB'.

2° Soient Bx, Cy, Hs trois demi-droites de même sens perpendiculaires au plan (P) et M un point arbitrairement choisi sur Bx ; on écrira $BM = x$. Démontrer géométriquement qu'il existe sur la demi-droite Cy un point N et un seul tel que l'angle NAM soit droit.

Calculer CN = y en fonction de x et de a.

Application numérique. — M étant défini par $x = \frac{a}{2} (\sqrt{11} + 3)$ calculer la valeur de y qui définira le point N, le rayon R de la sphère de diamètre MN, l'angle du plan tangent en M à cette sphère et de la droite Bx.

3° Soit O un point arbitrairement choisi sur Hs ; on posera $HO = z$. Calculer, en fonction de z et de a, le rayon de la sphère (O) de centre O passant par A. Comment faut-il choisir z pour que cette sphère coupe la demi-droite Bx ou lui soit tangente ?

Lorsqu'il en est ainsi, soit M un point commun à la sphère (O) et à la droite Bx et N le symétrique de M par rapport à O. Démontrer que l'angle MAN est droit.

En déduire le lieu des centres des sphères de diamètre MN, M et N étant choisis comme dans le 2°.

B). I. *Cours.* — 1. Soit (D) une droite qui coupe un plan (P) en un point A. Qu'appelle-t-on angle de la droite (D) et du plan (P) ? Que peut-on dire de l'angle de la droite (D) avec une droite du plan (P) passant par le point A ?

2. Définition d'une pyramide régulière et calcul de l'aire latérale de cette pyramide.

3. Condition pour qu'une sphère et un plan aient des points communs. Nature de l'intersection, lorsqu'elle existe.

II. *Problème.* — 1° Développer et ordonner suivant les puissances décroissantes de x les polynômes $(x-1)^2$, $x(x-1)^2$. Déterminer a et b de manière que le polynôme $(x-1)^2(ax+b)$, développé et ordonné suivant les puissances décroissantes, s'écrive x^3-3x+2 .

2° Etudier les variations des deux fonctions de la variable x :

$$y_1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$$

$$y_2 = \frac{1}{x}$$

et construire les courbes représentatives (C_1) et (C_2) de ces fonctions. Vérifier que le point A d'abscisse 1 et d'ordonnée 1 est commun à ces deux courbes. Calculer le coefficient angulaire de la tangente en A à la courbe (C_1) et le coefficient angulaire de la tangente en A à la courbe (C_2) . Dessiner les deux courbes rapportées aux mêmes axes de coordonnées.

3° Démontrer que les courbes (C_1) et (C_2) ont un point commun B et un seul distinct de A, en calculant les coordonnées du point B.

A', C, C', M, M', TA). I. *Cours.* — 1. Etude du signe du trinôme du 2° degré sur les exemples suivants :

$$-2x^2 + 3x - 1, \quad -x^2 + 2x + 15 ;$$

Application. — Résoudre les inéquations simultanées :

$$-2x^2 + 3x - 1 < 0, \quad -x^2 + 2x + 15 > 0.$$

2. Définir et calculer sans appliquer de formule la dérivée de la fonction $y = -x^2 + 3x - 2$ pour la valeur $x = 1$. Signification géométrique.

3. Angle d'une droite et d'un plan : définition et propriété caractéristique.

II. *Problème.* — Un trièdre $Sxyz$ a ses deux faces sSx et sSy égales à un droit. La troisième face sSy est un angle aigu α . On considère sur les arêtes Sx , Sy , des points A, B tels que la droite AB soit perpendiculaire à SA, et sur Sz un point C.

On pose $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$.

1° Montrer qu'il existe une sphère circonscrite au tétraèdre SABC, dont le centre O est dans le plan sSy . Réciproquement, étant donné arbitrairement un point O dans l'angle sSy , existe-t-il des points A, B, C situés respectivement sur les arêtes Sx , Sy , Sz tels que O soit le centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre SABC ?

2° Montrer qu'il existe des points A, B, C tels que le dièdre d'arête AB du tétraèdre SABC ait pour mesure α (> 0). Quel est dans ce cas la valeur du rapport $\frac{c}{b}$?

3° Montrer que dans le cas précédent, le tétraèdre SABC est tel que l'on ait :
 $AB = SC$ et $AC = SB$.

Montrer qu'il est impossible de choisir les points A, B, C de façon qu'on ait en outre $BC = SA$.

Se plaçant toujours dans le cas des paragraphes 2 et 3, calculer en fonction de b , c , et α l'angle dièdre φ d'arête BC du tétraèdre SABC (on considérera l'aire de la projection du triangle ABC sur le plan sSy).

Montrer en déterminant l'une de ses fonctions trigonométriques qu'il existe un angle aigu α tel que l'on ait $\varphi = \alpha$.

T.B). I. *Cours.* — 1. Plan tangent à la sphère en un de ses points : définition, existence, propriété.

2. Plan perpendiculaire à une droite en un point de cette droite : définition, propriété.

3. Définir et calculer (sans utiliser de formule) la dérivée de la fonction $y = \frac{x}{x-3}$ pour la valeur $x=2$. Signification géométrique.

II. *Problème.* — On désigne par (C) la base inférieure et par (C') la base supérieure d'un cylindre de révolution de hauteur x et de diamètre $2x$. Ce cylindre est surmonté d'un cône de révolution de base (C'). La distance SH du sommet S du cône au plan du cercle (C) est donnée et égale à h .

1° Calculer les volumes respectifs V_1 et V_2 du cylindre et du cône en fonction de h et de x .

2° On désigne par Y le rapport $\frac{V_1}{V_2}$. Etudier et représenter graphiquement la variation de Y en fonction de x dans le cas particulier où h a la valeur numérique $h=2$.

3° On coupe l'ensemble par un plan passant par son axe.

Évaluer l'aire y de la section en fonction de h et de x .

Etudier et représenter graphiquement la variation de y en fonction de x en supposant encore $h=2$.

4° Quelles sont les valeurs de la dérivée de y aux extrémités de la courbe précédente ? En déduire la construction des tangentes à cette courbe en ces points.

5° Faire apparaître clairement sur la figure l'angle α des plans tangents au cylindre et au cône en un point de leur directrice commune (C').

Valeur de $\tan \alpha$?

T.B. 2° *épreuve* : Dans une usine, les salaires journaliers sont répartis en pourcentage et sous une forme simplifiée de la façon suivante :

SALAIRE	HOMMES	FEMMES
De 600 à 700 francs	30	45
De 700 à 800 francs ..	32	30
De 800 à 900 francs	24	19
De 900 à 1.000 francs	14	6
	100	100

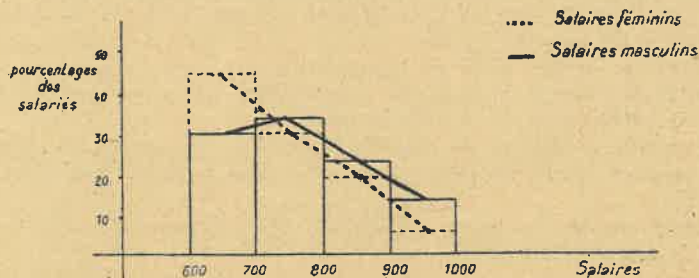
On demande :

1° La moyenne des salaires masculins : m ;

2° La moyenne des salaires féminins : m' ;

3° La moyenne des salaires d'un ménage : M .

Pour résoudre cette dernière question, on démontrera d'abord que $M = m + m'$ de la façon suivante : étant données une variable x pouvant prendre les valeurs x_1, x_2, x_3, x_4 de moyenne m , et une variable y pouvant prendre les valeurs $y_1, y_2,$



y_2, y_4 de moyenne m' , montrer que la variable $z = x + y$ (x et y se combinant de toutes les façons possibles) a pour valeur moyenne $M = m + m'$.

Peut-on généraliser dans le cas où les variables x et y prendraient n valeurs ?

Problème d'ordre économique : La représentation qui vous est fournie conforme aux données ci-dessus, vous paraît-elle générale, c'est-à-dire valable pour toutes les formes de l'activité économique ?

Pourriez-vous citer des exemples dans le commerce ou l'industrie confirmant ou au contraire infirmant cette répartition ?

Les syndicats féminins ont depuis longtemps revendiqué l'application de la formule : à travail égal, salaire égal.

Ces graphiques sont-ils en contradiction avec cette formule ? Sinon, quels sont les commentaires qu'ils vous inspirent ?

Martinique. A.B.) I. Cours. — 1. Définir et calculer la dérivée de la fonction $y = 3x^2 - 4x + 1$ pour $x = 1$.

Construire la tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 1. — 2. Lieu géométrique des perpendiculaires à une droite de l'espace, en un point de cette droite. — 3. Plan tangent à la sphère en l'un de ses points.

II. **Problème.** — On donne dans un plan (P) un losange ABCD, dont l'angle en A (angle BAD) est égal à 60° . On pose $BD = a$.

Par la grande diagonale AC du losange, on mène le plan (Q) perpendiculaire au plan (P). Dans ce plan (Q) on trace un segment AS de longueur a .

1° Montrer que si le triangle SBD est équilatéral la projection H du point S sur le plan (P) est le centre de gravité du triangle ABD. Dans la suite du problème on suppose cette condition remplie.

2° Calculer SH et SC en fonction de a . Vérifier que le triangle SBC est rectangle en B. Démontrer géométriquement cette propriété en utilisant les théorèmes sur la projection orthogonale d'un angle droit.

3° I étant le milieu de SC, montrer que le plan IBD est un plan de symétrie pour le tétraèdre SCBD et que le trièdre IBCD est trirectangle.

4° Calculer l'aire totale et le volume de la pyramide IBDS en fonction de a .

C.M.) I. Cours. — 1. Résolution de l'équation $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$. — Application. — Résoudre $\operatorname{tg} x \times \operatorname{tg} 3x = 1$. — 2. Etude et représentation graphique de la fonction $y = (x + 1)(3 - x)$.

Calculer la pente de la tangente au point d'abscisse $x = 3$. — 3. Plan tangent au cylindre à directrice circulaire.

II. **Problème.** — On donne un tétraèdre ABCD, de base BDC et tel que l'arête AD soit perpendiculaire au plan BCD. Soit DE la hauteur du triangle de base DBC relative à BC.

1° Démontrer que le plan ADE est perpendiculaire au plan ABC.

2° On trace dans la face ABC la hauteur BF relative à AC et dans la face DBC la hauteur BK relative à DC :

a. Montrer que le plan BFK est perpendiculaire au plan ABC ;

b. Montrer que l'orthocentre H du triangle ABC est la projection orthogonale sur ce plan de l'orthocentre N du triangle BCD.

3° On suppose le triangle de base BCD fixe ; le sommet A du tétraèdre se déplace sur une demi-droite Dx perpendiculaire au plan de base. Déterminer les lieux de H et de F.

4° Montrer que les six points CEHFKN sont sur une même sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

Réunion. A.B). I. *Cours.* — 1. Démontrer qu'il existe une sphère passant par quatre points non situés dans un même plan. Cas où les quatre points sont dans un même plan.

2. Plan tangent à la sphère.

3. Définition de deux plans perpendiculaires. Condition nécessaire et suffisante pour que deux plans soient perpendiculaires.

II. *Problème.* — 1° Etudier les variations de la fonction $y = (x - 1)(2 - x)$ et tracer la courbe représentative (C).

2° Soit A le point de l'axe $y'y$ qui a pour ordonnée $\frac{1}{2}$. Trouver l'équation d'une droite (D) de pente m qui passe par A. Discuter, suivant les valeurs de m , le nombre de points communs à la courbe (C) et à la droite (D). Coordonnées de ces points communs.

3° Vérifier que, dans les deux cas où la droite (D) et la courbe (C) n'ont qu'un point commun, la droite est tangente à la courbe: Quel est l'angle des deux tangentes issues de A ?

C.M). I. *Cours.* — 1. Aire de la zone. Aire de la sphère.

2. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette orthogonalement sur un plan suivant un angle droit.

3. Résoudre l'équation $\cos x = \cos a$.

Application. — x et y représentant les mesures algébriques, supposées comprises entre -2π et $+2\pi$, de deux arcs exprimés en radians, déterminer x et y sachant que : $\cos x = \cos y$. $2x + y = 2\pi$.

II. *Problème.* — On donne dans un plan (P) un cercle de centre O et de rayon R. Un hexagone régulier ABCDEF est inscrit dans ce cercle. On considère la pyramide de base ABCDEF et de sommet S sur la perpendiculaire en O au plan (P).

1° H désignant le milieu du segment AB, démontrer que les plans SOH et SAD sont deux plans de symétrie de la pyramide.

2° Sachant que $OS = \frac{3R}{2}$, calculer la surface totale et le volume de cette pyramide en fonction de R.

3° Dans la même hypothèse ($OS = \frac{3R}{2}$) montrer qu'il existe une sphère de centre I passant par les 7 points ABCDEFS et calculer SI.

4° Déterminer $OS = h$ pour que le centre de la sphère passant par ABCDEFS soit aussi le centre d'une sphère tangente au plan (P) et aux arêtes latérales de la pyramide.

SESSION DE SEPTEMBRE

France Métropolitaine. A). I. *Cours.* — 1. Calculer pour $x = 3$ la dérivée de $y = -x^2 + 3x + 2$.

Construire la tangente à la courbe représentative de la fonction y de la variable x , au point A d'abscisse 3 (on ne demande pas de construire cette courbe). — 2. Montrer que par un point O situé hors d'un plan (P), on peut mener un plan parallèle au plan (P) et un seul. — 3. Etudier le signe du trinôme $-x^2 + x + 6$ suivant la valeur donnée à x .

II. *Problème.* — 1° Calculer les côtés d'un triangle isocèle AOB connaissant l'angle au sommet AOB qui mesure 120° et la hauteur relative à la base OH, qui a pour mesure $OH = a\sqrt{2}$, a étant une longueur donnée.

2° On mène par O la droite X'OX perpendiculaire au plan (P) du triangle AOB. On désigne par I le point de la demi-droite OX tel que le triangle IAB soit équilatéral et par J le point de la demi-droite OX' tel que le triangle JAB soit rectangle. Calculer OI, OJ et déterminer la nature des triangles IAJ, IBJ.

3° Déterminer le centre Ω et le rayon R de la sphère (Σ) circonscrite au tétraèdre ABIJ. Soit M un point du segment OI ; on écrit $OM = x$. Calculer, en fonction de x , l'aire S de la section de (Σ) par le plan (P') mené par M parallèlement à (P).

Etudier les variations de la fonction $y = \frac{S}{\pi}$ lorsque x prend toutes les valeurs que lui permet sa définition. Représenter graphiquement ces variations en supposant $a = 1$ cm.

4° Déterminer le centre du cercle circonscrit au triangle ABM et calculer son rayon en fonction de x .

B). I. Cours. — 1. Définition d'une droite perpendiculaire à un plan. Démontrer que, par un point d'un plan, il passe une droite perpendiculaire à ce plan et une seule.

2. Soient (P) un plan et O un point situé hors du plan. Définir la longueur de la perpendiculaire OA et de l'oblique OB à ce plan. Condition pour que deux obliques soient égales. Lieu géométrique des pieds des obliques OM ayant une longueur donnée, supérieure à OA.

3. Définition des plans parallèles. Démontrer qu'il existe un plan et un seul passant par un point O situé hors d'un plan (P), parallèle à ce plan.

II. Problème. — On considère la fonction $y = -(x-1)(x-5)$.

1° Etudier ses variations et construire la courbe représentative (C).

2° On appelle A le point commun à (C) et à l'axe Oy, B et C les points communs à (C) et à l'axe Ox. Calculer les coefficients angulaires des tangentes à (C) en A, B, C, puis construire ces tangentes.

3° Par chaque point M d'abscisse négative ou nulle de (C), on mène la parallèle à la bissectrice de l'angle xOy. Cette parallèle coupe (C) en M et en un second point M'. On demande le lieu géométrique du milieu de MM' lorsque M occupe toutes les positions permises par sa définition.

A', C, C', M, M', T.A). I. Cours. — 1. Expressions de $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$ en fonction de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$. Application. — Sachant que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, calculer $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$.

2. Plus courte distance de deux droites : définition, existence.

3. Aire de la zone.

II. Problème. — On considère une pyramide SABC dont la base est un triangle équilatéral ABC de hauteur h . Sur la hauteur AH de ce triangle, on prend le point O tel que $AO = \frac{AH}{3}$. On élève en O la perpendiculaire au plan et sur cette perpendiculaire on prend le point S tel que $OS = BC$.

1° Montrer que les droites AS et BC sont orthogonales.

2° Calculer les longueurs des segments SH, SA, SB, SC.

3° Par un point J situé entre O et H, on mène le plan (P) parallèle aux droites SO et BC. Ce plan (P) coupe AB en M, SB en N, SC en Q et AC en R. Quelle est la nature du quadrilatère MNQR ? Calculer son aire y en fonction de h et de la mesure x du segment AJ.

4° Représenter graphiquement les variations de la fonction y de la variable x quand J décrit OH.

5° Utiliser le graphique précédent pour déterminer l'existence et le nombre des solutions de l'équation $y = l^2$, l étant une longueur donnée. En déduire les conditions d'existence de points J tels que l'aire du quadrilatère MNQR soit égale à l'aire d'un carré de côté l . Préciser, suivant la valeur de l , la position de ce point J quand il existe et est unique, les positions des deux points J trouvés lorsque le problème admet deux solutions.

T.B). I. *Cours.* — 1. Définition d'une progression arithmétique. Propriété des termes équidistants des extrêmes ; somme des termes d'une progression arithmétique.

Application. — Calculer la somme des nombres impairs de 101 inclusivement à 1.001 inclusivement.

2. Lignes de plus grande pente d'un plan : définition, existence.

3. Propriétés des obliques et de la perpendiculaire menées à un plan par un point extérieur à ce plan. Réciproques.

II. *Problème.* — 1° Etudier suivant les valeurs de x le signe de l'expression :

$$(2x - 1)(x + 1) - (x + 1)(x + 2).$$

2° Etudier les variations des fonctions :

$$y_1 = (2x - 1)(x + 1)$$

et

$$y_2 = (x + 1)(x + 2).$$

Construire avec le même système d'axes de coordonnées rectangulaires les courbes (C_1) et (C_2) représentant ces variations. (On prendra le centimètre comme unité de longueur).

3° Calculer les coordonnées des points d'intersection A et B de ces deux courbes. A désignant celui des deux points dont l'abscisse est la plus petite.

Retrouver à l'aide de ces graphiques les résultats de la première question.

4° m désignant un nombre donné, démontrer que la droite représentative de la fonction :

$$y = m(x + 1)$$

passé par A. Cette droite rencontre en outre (C_1) en M_1 et (C_2) en M_2 . Calculer les coordonnées de ces deux points et celles du milieu P de $M_1 M_2$. Déterminer m de façon que le milieu P de $M_1 M_2$ appartienne à la fois aux deux courbes (C_1) , (C_2) .

T.B). 2° *Epreuve.* — Une région agricole est divisée en lots cultivables à peu près carrés, dont les côtés forment la progression arithmétique suivante : a , $a + r$, $a + 2r$, $a + 3r$, ... $a + (n - 1)r$.

On veut caractériser l'ensemble de ces lots par une valeur typique : moyenne ou médiane

On évalue le lot type en prenant : 1° La moyenne des côtés ; 2° La moyenne des surfaces ; 3° La médiane des côtés ; 4° La médiane des surfaces.

Calculer chacune de ces valeurs types.

Montrer que les deux premières moyennes ne sont pas équivalentes. Quelle est la plus grande ? (On comparera la surface du carré moyen dans le premier cas et celle du carré moyen dans le second cas).

Montrer que les valeurs médianes sont équivalentes dans le troisième et le quatrième cas.

Quelle valeur typique choisira-t-on ?

On répondra à toutes les questions en prenant d'abord $n = 3$, puis n quelconque.

PROBLEME D'ORDRE ECONOMIQUE

Le bureau des statistiques du Ministère de l'Agriculture fournit sur l'évolution du territoire cultivé de 1910 à 1951 le tableau suivant :

ANNÉES	TERRES labourables	HERBAGES pâturages	VIGNES	CULTURES maraîchères	CULTURES diverses	Territoire cultivé	SURFACE totale du territoire	OBSERVATIONS
1910.....	23.679	10.063	1.684	248	1.124	36.798	52.956	Sans l'Alsace et la Lorraine.
1914. ...	22.185	9 861	1.597	258	913	34.818	52.956	Guerre 1914-1918.
1918.....	20.881	10.235	1.567	275	801	33.759	52.956	
1928.....	22.168	11.414	1.584	312	765	36.243	55.104	Av. Mosel., B.-Rh., H.-Rh.
1938.....	20.196	11.776	1.605	437	502	34.516	55.104	Guerre 1939-1945.
1945.....	17.324	12.024	1.525	624	501	31.998	55.104	
1951.....	18.578	12.277	1.572	534	497	33.458	55.160	Av. Brigue et Tende.

NOTA. — Les surfaces sont exprimées en milliers d'hectares.

Quelles indications d'ordre économique, tirez-vous de l'examen de ce tableau ?

Martinique. A, B). I. *Cours.* — 1. Sphère. Intersection avec une droite ; tangentes à la sphère.

2. Démontrer que si une droite est orthogonale à deux droites concourantes d'un plan elle est orthogonale à toutes les droites du plan.

3. Variation de la fonction $y = x^2 - 4x - 5$. Construire la courbe représentative et la tangente à cette courbe au point d'abscisse $x = 0$.

II. *Problème.* — Soit dans un plan fixe (P) un angle droit $\widehat{xOy}$; soit D la perpendiculaire au plan (P) menée par O. Sur D on prend un point fixe A tel que $OA = 2a$. Soit I le milieu de OA. On mène par A la demi-droite Az parallèle à Oy et de même sens. On considère un point B de Ox et un point C de Az tels que $IB = IC$. On mène par B la droite Δ parallèle à Oy. Soit H le pied de la perpendiculaire menée de C à Δ .

1° Montrer que le quadrilatère ACHB est un rectangle et que le milieu M de BC est équidistant des cinq points O, A, B, C, H.

2° Montrer que si B et C varient sur Ox et Az de sorte que l'on ait toujours $IB = IC$, le point M se déplace sur une droite fixe.

3° Lieu d'un point P appartenant au segment BC et partageant ce segment dans un rapport fixe :

$$\frac{PB}{PC} = k.$$

4° On pose $OB = x$ et on prend sur Ox un point E tel que $OE = a$. En supposant $x > a$, calculer le volume V du tétraèdre MAEB. Déterminer x pour que V soit égal au tiers du volume du cube d'arête OI.

x ayant la valeur trouvée ci-dessus, calculer MB, ME et la hauteur issue de A du tétraèdre MAEB.

C.M). I. *Cours.* — 1. Volume du tronc de pyramide à bases parallèles.

2. Etablir la formule donnant le cosinus de la somme de deux arcs. En déduire les formules donnant le sinus de la somme de deux arcs, le cosinus et le sinus de la différence de deux arcs.

3. Aire d'une zone sphérique. Aire de la sphère.

II. *Problème.* — On considère les fonctions $y(x) = mx^2 - 2(m+1)x + m$ et leurs courbes représentatives C_m , chacune d'elles correspondant à une valeur de m .

1° Montrer que toutes les courbes passent par un même point A d'abscisse + 1. Étudier le sens de la concavité de ces courbes suivant les valeurs de m . Construire sur un même graphique les courbes C_1 et C_2 correspondant aux valeurs $m = 1$, $m = -2$.

2° Montrer que ces deux courbes et toutes les courbes C_m ont la même tangente au point commun A.

3° Déterminer les points d'intersection des courbes C_m avec la droite d'équation $y = -x - 1$. Calculer les pentes des tangentes aux courbes C_m en ces points.

Utiliser ces résultats pour déterminer la courbe C_m tangente à la droite Ox . (On déterminera C_m par son équation).

4° Discuter le nombre des points d'intersection d'une courbe C_m avec une droite de coefficient angulaire p , issue de O origine des coordonnées. Déterminer pour une courbe C_m donnée les droites correspondant aux deux valeurs extrêmes trouvées pour p . Montrer que l'une de ces droites Δ ne dépend pas de C_m ; l'autre dépend de m et sera notée Δ_m .

Quelles sont les coordonnées des points d'intersection d'une courbe C_m avec les droites Δ et Δ_m (l'indice m étant le même pour C_m et Δ_m) ? Montrer que Δ et Δ_m sont tangentes à la courbe C_m . Déterminer le lieu du point de contact de C_m et Δ_m quand m varie.

Réunion. A.B). I. *Cours.* — 1. Exposer sur l'exemple $2x^2 - 7x + 4 = 0$ la méthode générale de résolution de l'équation du second degré. — 2. Variation de la

fonction $y = -x^2 + 2x + 2$. — 3. Soit la fonction $y = \frac{1}{2x}$. Démontrer que cette fonction est décroissante. Démontrer que la courbe représentative des variations de cette fonction admet un centre de symétrie et deux axes de symétrie.

Application. — Utiliser la courbe précédente pour résoudre et discuter graphiquement le système d'équations :

$$2xy = 1 ; x + y - m = 0.$$

II. *Problème.* — Soient A et B deux points fixes diamétralement opposés d'une circonférence de rayon R. M un point de la circonférence tel que $\widehat{BAM} = 30^\circ$.

Sur la perpendiculaire en A au plan de la circonférence on porte une longueur $AS = x$.

1° Montrer que le triangle SMB est rectangle ; calculer ses côtés en fonction de R et de x .

2° Montrer que le dièdre d'arête SM (formé par les plans ASM et MSB) est droit.

3° Calculer en fonction de R et de x le volume de la pyramide SAMB ; déterminer x pour que ce volume soit égal à $\frac{R^3 \sqrt{3}}{3}$.

4° x ayant la valeur précédemment trouvée, déterminer le centre et calculer le rayon de la sphère circonscrite à la pyramide SAMB.

C, M). I. *Cours.* — 1. Plans tangents à une sphère passant par une droite donnée. — 2. Définir et calculer pour $x=3$ la dérivée de $y = \frac{x-1}{2x-4}$. Interprétation graphique. — 3. Volume du tronc de pyramide à bases parallèles.

II. *Problème.* — On donne l'équation du second degré en x :

$$(1) \quad mx^2 - mpx + p = 0.$$

1° Former la relation à laquelle doivent satisfaire les paramètres m et p pour que les racines a et b de l'équation (1) soient l'une le sinus, l'autre la tangente d'un même angle a :

$$(a = \sin a, b = \operatorname{tg} a).$$

2° De la relation trouvée au 1° on tire p en fonction de m et l'on substitue dans l'équation (1). Cette équation ne dépend plus alors que d'un paramètre m . Exprimer en fonction de m :

$$a = \sin a \text{ et } b = \operatorname{tg} a, \text{ ainsi que } \frac{1 - \cos a}{\sin a} \text{ et } \frac{\sin a}{1 + \cos a}.$$

En déduire la valeur de m en fonction de a .

3° m et p satisfaisant toujours à la condition du 1°, calculer m pour que l'on ait $mp = -\frac{1}{2}$. En déduire les valeurs de $\operatorname{tg} a$ et de a .

4° Toujours dans les conditions du 1°, calculer m en fonction de a . Discuter.

Appliquer au cas $a = \frac{1}{2}$; en déduire $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$ et $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$.

Seconde Partie

SESSION DE JUIN

France Métropolitaine. M, MT). I. *Cours.* — 1. x étant exprimé en radians, limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers zéro. Dérivée de $y = \sin x$. Que deviennent les résultats précédents quand x est exprimé en degrés ? — 2. Résolution et discussion de l'équation :

$$a \cos x + b \sin x = c.$$

Une seule méthode est demandée. — 3. Résoudre un triangle connaissant les trois côtés. Retrouver par voie trigonométrique les inégalités fondamentales entre les côtés du triangle.

II. *Problème.* — Soient D et D' deux droites parallèles et deux points fixes O et A sur la première.

On considère un couple de points M et M' variables sur D et restant symétriques par rapport à A.

1° Construire les cercles (C) et (C') tangents à D', passant par O et respectivement par M et M'.

En désignant par N et N' les points de contact des cercles (C) et (C') avec D', montrer que les droites MN et M'N' se rencontrent en un point fixe I. Prouver que le second point de rencontre B des cercles (C) et (C') se déplace sur une droite fixe ; préciser le lieu de B.

2° La tangente en M à (C) et la tangente en M' à (C') se rencontrent en un point P. Montrer que les droites PM et PM' admettent PI pour l'une de leurs bissectrices et qu'elles enveloppent un cercle fixe (T).

Montrer que le point P se déplace sur la droite I'A', I' désignant le symétrique de O par rapport à I et A' le symétrique de O par rapport à A ; préciser le lieu de P.

Montrer qu'on retrouve au point P l'angle des tangentes en O aux deux cercles (C) et (C'). Construire un couple de points M et M' symétriques par rapport à A et tel que les cercles (C) et (C') soient orthogonaux ; quel est le nombre des solutions ?

3° On soumet les cercles (C) et (C') à l'inversion de centre O et de module OI^2 ; comparer la figure ainsi obtenue à la figure formée par les tangentes MP et MP' ; quel est l'inverse Q de B ?

L'emploi de cette inversion permet-il une nouvelle construction des couples de points M et M' donnant deux cercles (C) et (C') orthogonaux ?

Martinique. M). I. *Cours.* — 1. Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris entre ces côtés. — 2. Dérivée de $y = \sin x$. On déterminera la limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers zéro. — 3. Transformer en un produit les expressions $\sin a + \sin b$, $\sin a - \sin b$, $\cos a + \cos b$, $\cos a - \cos b$.

II. *Problème.* — Soient deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, sur Ox un point A d'abscisse positive a , sur Oy un point B d'ordonnée positive b . C est le 4° sommet du rectangle de côtés OA et OB, I le point de rencontre de ses diagonales

1° M étant un point de la droite AC et N un point de la droite BC, on pose $AM = y$ et $BN = x$.

Etablir la relation qui lie x et y lorsque le cercle (M) de centre M passant par A, et le cercle (N) de centre N passant par B, sont orthogonaux. En déduire que, dans ces conditions, le lieu du 4° sommet D du rectangle de côtés CM et CN est la médiatrice de OC. Quel est le lieu du milieu de MN ?

Dans tout ce qui suit, on supposera que les cercles (M) et (N) sont orthogonaux.

2° Une inversion de pôle A de puissance $2AM \cdot AC$ transforme le cercle (M) en la droite BC. Montrer que cette inversion conserve le cercle (N).

En déduire que l'un des points d'intersection Q des cercles (M) et (N) est sur AB. Montrer que leur 2° point d'intersection P décrit le cercle circonscrit au rectangle OACB. Montrer que PQ coupe ce dernier cercle en un point fixe S.

3° Montrer que la somme des puissances de I par rapport à (M) et (N) est nulle. En déduire que le triangle MIN est rectangle.

Retrouver géométriquement que le lieu de D est la médiatrice de OC.

4° Quel est le lieu du symétrique de I par rapport à MN ? Quelle est l'enveloppe de MN ?

Réunion. M). I. *Cours.* — 1. Résolution de l'équation $\sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{2}$. — 2. Résolution d'un triangle connaissant deux côtés b et c et l'angle A compris entre ces deux côtés. — 3. Résolution d'un triangle connaissant les trois côtés (on rendra les formules calculables par logarithmes).

II. *Problème.* — Soit un cercle fixe (O) et une droite fixe (D) extérieure à ce cercle. On considère les cercles (C) tangents à la fois au cercle (O) et à la droite (D).

1° Montrer que la droite joignant les points de contact d'un cercle (C), tangent extérieurement au cercle (O), avec ce cercle et avec la droite (D) passe par un point fixe. Montrer qu'il en est de même pour un cercle (C) tangent intérieurement au cercle (O). Dans le cas des cercles tangents extérieurement, trouver le lieu des points de contact des tangentes aux cercles (C) issus du point fixe précédemment trouvé.

2° Trouver le lieu des centres des cercles (C) tangents extérieurement à (O) et celui des centres des cercles (C) tangents intérieurement à (O). Construire les cercles (C) ayant leurs centres sur une droite donnée (Δ). Construire les cercles (C) tangents à une droite donnée (Δ). (La discussion de ces deux dernières constructions n'est pas demandée).

3° Soient deux cercles fixes (O) et (O') extérieurs. On considère les cercles (C) tangents à la fois à (O) et (O'). Montrer que les cercles passant par un point fixe A de (O) et par les deux points de contact de (C) avec (O) et (O') passent par l'un ou l'autre de deux autres points fixes I et J que l'on déterminera. Préciser dans les divers cas celui des deux points fixes par lequel passent ces cercles.

4° On considère les cercles (C') passant par A, par l'un des points I et J et tangents à un cercle (C). Trouver le lieu des points de contact lorsque le cercle (C) varie.

SESSION DE SEPTEMBRE

France Métropolitaine. M). 1. *Cours.* — 1. Intersection d'une hyperbole et d'une droite (le candidat est laissé libre du choix de la définition de l'hyperbole). — 2. Inverse d'un cercle par rapport à un point de son plan. — 3. Inégalité entre les faces d'un trièdre.

II. *Problème.* — On considère un triangle ABC, de côtés a, b, c , d'angles A, B, C (on suppose $B > C$). Soit (O) son cercle circonscrit, de rayon R. Le côté BC et le cercle (O) sont coupés en D et E par la bissectrice intérieure, en D' et E' par la bissectrice extérieure de l'angle A. On désigne par I le centre du cercle inscrit, par I_a, I_b, I_c les centres des cercles exinscrits respectivement dans les angles A, B, C.

1° Montrer que la polaire de I par rapport au cercle de diamètre DD' passe par I_a . Que dire des points I_b et I_c par rapport à ce cercle ?

Montrer que la projection $i_b i_c$ de $I_b I_c$ sur BC est égale à $b + c$.

Calculer en fonction des angles B et C l'angle que fait la bissectrice extérieure AD' avec le côté BC.

2° Appliquer ces résultats à la construction d'un triangle ABC, connaissant $B - C = 2\alpha$, $AH = h_a$, et $b + c = 2l$, où H désigne le pied de la hauteur issue de A. Discuter.

3° Calculer $b + c$ et h_a en fonction de R et des angles A, B, C. Avec les mêmes données que dans le 2°, calculer les angles du triangle ABC. On pourra prendre comme inconnue $\cos \frac{A}{2}$. Retrouver les résultats de la discussion géométrique.

N. B. — Cette troisième question peut être traitée indépendamment des deux autres.

Martinique. 1. *Cours.* — 1. U étant une fonction dérivable donnée de x , calculer la dérivée par rapport à x de la fonction : $y = \sin U$.

Application. — Dérivée de $y = \sin(3x^2 + 1)$.

N. B. — Tout ce qui vise la limite de : $\frac{\sin x}{x}$ lorsque $|x|$ tend vers 0 sera rappelé mais non démontré. — 2. Résolution de l'équation : $a \cos x + b \sin x = c$. (On insistera surtout sur la méthode dite de l'angle auxiliaire). *Application.* — Résoudre : $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1$. — 3. Résoudre un triangle connaissant deux côtés a et b et l'angle $\hat{A}$ opposé à a . Discuter.

II. *Problème.* — Etant donnés un cercle (O) [centre O, rayon R] et un point A, on appelle *angle sous lequel de A on voit (O)* l'angle des demi-tangentes issues de A à (O). Le problème qui suit a pour but de résoudre quelques questions visant les cercles variables (O) [O, R] vus du point fixe A sous l'angle de 90° ; on désignera par T le point de contact de l'une des deux tangentes menées de A à l'un des cercles (O) et par H le pied de la polaire de A par rapport à ce cercle (O).

1° Lieux des points O et T si (O) passe par un point donné B ?

2° Lieu de O si (O) est tangent à une droite donnée Δ ? A quel problème classique est ramenée la construction des cercles (O) tangents à deux droites données Δ et Δ' ? (On ne rappellera pas la solution de ce problème classique).

3° Calculer : $\frac{\overline{AO}}{\overline{AH}}$; H étant donné, construire (O).

4° (O_1) et (O_2) sont deux des cercles (O), H_1 et H_2 les pieds des polaires de A par rapport à ces deux cercles ; démontrer que l'axe radical de (O_1) et de (O_2) est la médiatrice du segment H_1H_2 .

(On considérera le cercle qui passe par A, H_1 , H_2 et on utilisera le résultat du 3°).

5° On envisage parmi les cercles (O) ceux qui sont orthogonaux à un cercle (ω) [ω , ρ] donné. Dédurre du 4° que le point H reste alors sur un cercle fixe qu'on précisera. Réciproque ? Lieu de O ?

Réunion. I. Cours. — 1 Réduction d'une fraction ordinaire en fraction décimale. Conditions de possibilité. — 2. Recherche du P.G.C.D. de deux nombres par la méthode des divisions successives. Propriétés du P.G.C.D. de deux nombres. — 3 Expression générale des multiples communs à deux nombres. P.P.C.M. de deux nombres.

II. Problème. — On considère la fonction $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + a}$ où a est une constante. On demande :

1° Les valeurs de a pour lesquelles la fonction se réduit à une fonction homographique.

Les valeurs de a pour lesquelles la fonction admet deux asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées.

Les valeurs de a pour lesquelles la fonction passe par un minimum puis un maximum.

Les valeurs de a pour lesquelles la fonction varie toujours dans le même sens.

2° Construire la courbe représentative dans les cas particuliers suivants :

$$a = 0 ; a = \frac{7}{2} ; a = 5.$$

3° On revient au cas où $a = 0$. On coupe la courbe représentative C_0 par une parallèle D à l'axe des abscisses d'ordonnée m . Pour quelles valeurs de m la droite D coupe-t-elle la courbe C_0 en deux points M et M' ? Quel est le lieu géométrique du milieu P de MM' ? Par quels points remarquables de la courbe passe-t-il ? On construira ce lieu H sur le même graphique que la courbe C_0 .

II. Brevet élémentaire

Aix (juin). — I. Algèbre. — 1° Simplifier l'expression $y = \frac{2}{3 - \frac{1}{1 - \frac{2x - 7}{3x - 10}}}$

2° Construire la droite D représentant la fonction $y = 2x - 6$. Donner les coordonnées des points où cette droite rencontre les axes Ox et Oy.

3° On mène la perpendiculaire D' de O sur la droite D. Trouver la fonction qui serait représentée graphiquement par cette perpendiculaire.

4° Soit H le point d'intersection de D et D'. Calculer les coordonnées du point H.

5° Calculer la distance du point O à la droite D

11. *Géométrie*. — 1° Soient deux cercles O et O' tangents intérieurement en A. Une sécante, issue de A, coupe le cercle O en B et le cercle O' en C :

- a) démontrer que OB et O'C sont parallèles ;
- b) démontrer que la tangente en B au cercle O est parallèle à la tangente en C au cercle O'.

2° On suppose maintenant que $R' = \frac{R}{2}$:

- a) montrer que C est le milieu de AB ;
- b) déterminer AB pour que la tangente en C au cercle O' passe par D diamétralement opposé à A dans le cercle O ;
- c) dans ces conditions, la tangente en B au cercle O coupe AD en E. Calculer DE ;
- d) calculer DC.

Aix (septembre). — I. *Géométrie*. — On donne un triangle ABC dans lequel $\hat{B} = 45^\circ$. Les hauteurs AA' et BB' se coupent en H.

- 1° Démontrer que $AA' = BA'$ et que $A'H = A'C$.
- 2° Démontrer que A'HB'C est inscriptible et que B'A' est bissectrice de $\widehat{BB'C}$.
- 3° Soit A'K perpendiculaire sur AC. Démontrer que $A'K = B'K$.
- 4° Où se trouve le centre I du cercle circonscrit au quadrilatère A'HB'C ? Quelle ligne décrit-il quand C se déplace sur le prolongement de BA', le triangle ABA' restant fixe.

II. *Algèbre*. — Soit le système des deux équations

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 & (1) \\ y = \frac{3}{2}x & (2) \end{cases}$$

1° Représenter pour chaque équation les variations de y en fonction de x (unité : 1 cm. sur chaque axe). On obtient deux droites D et D' qui se coupent en P. Déterminer graphiquement les coordonnées de P. Vérifier par le calcul.

2° La droite D rencontre XX' en A et YY' en B. Vérifier que $\overline{OA}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PA}^2$. Que peut-on en conclure ? Pouvait-on prévoir ce résultat en examinant simplement le système donné ?

Nancy (juin). — I. *Algèbre*. — On considère 2 axes de coordonnées rectangulaires et l'on adopte le cm. comme unité sur chaque axe.

1° Tracer les droites ayant pour équations :

$$1) -2x + 3y = 8$$

$$2) x + 3y = 5.$$

2° Trouver graphiquement, puis par le calcul, les coordonnées de leur point commun A.

3° Soient B et C les points d'intersection des deux droites avec l'axe des abscisses. Calculer les côtés du triangle ABC.

II. *Géométrie*. — On donne un cercle de centre O, de rayon R, on trace deux diamètres perpendiculaires AB et CD. De A on mène une corde AIM qui coupe le rayon CO en I et le cercle en M.

1° Montrer que $OA \cdot OB = AI \cdot AM$.

2° Dans le cas où $OI = \frac{R}{3}$, calculer AI, AM, MB et la distance de M au diamètre AB.

3° On suppose que le triangle MCI est isocèle. Calculer dans ces conditions l'angle $\widehat{MAB}$.

Nancy (septembre). — I. *Algèbre*. — On considère le système :

$$x - y = -3 \quad (1),$$

$$2x + my = 15 \quad (2), \text{ où } m \text{ est un nombre connu variable.}$$

1° Exprimer x et y en fonction de m .

2° Comment choisir m pour que x et y soient proportionnels à 4 et 7 ?

3° Soient (D_1) et (D_2) les droites d'équations (1) et (2) dans le cas où $m = 1$. Construire ces droites.

4° Ces droites se coupent en P. Déterminer les coordonnées de P. Les nombres trouvés ne pouvaient-ils pas être prévus en partie d'après le résultat trouvé en 2° ?

II. *Géométrie*. — Soit un triangle isocèle ABC, rectangle en A et d'hypoténuse $BC = 2a$. Sur la hauteur AH de ce triangle, on choisit un point D tel que $DH = \frac{AD}{2}$. On mène en C la perpendiculaire CX à BD. BD coupe AC en F et CX en E.

1° Calculer les côtés du triangle AEC, son aire, ainsi que l'aire du quadrilatère ABCE.

2° Le cercle circonscrit au triangle ABC coupe AE en M et BE en N. Calculer EM et EN, ainsi que les rapports $\frac{EM}{EN}$ et $\frac{EA}{EF}$.

3° Comparer les cordes MN et AC en grandeur et en direction.

III. Ecoles normales d'Instituteurs

Sujet unique (juin). — I. *Algèbre*. — Le long d'une voie ferrée, dont chacun des rails a une longueur de 15 mètres, les intervalles entre deux rails consécutifs provoquent des chocs que l'on perçoit lorsqu'on se trouve dans un train en mouvement sur la dite voie.

1° Un voyageur compte 6 chocs pendant 10 secondes, le premier choc et le dernier coïncidant respectivement avec le début et la fin de l'intervalle de temps considéré. (*De telles coïncidences seront toujours supposées réalisées dans les questions suivantes*). Quelle est la vitesse du train en km./h. ?

2° Un voyageur compte n chocs pendant 20 secondes. Quelle est, en fonction de n , la vitesse du train en km./h. ?

3° Pendant combien de secondes faudrait-il compter les chocs pour que leur nombre, diminué d'une unité, indique la vitesse du train en km./h., *quelle que soit cette vitesse* ?

II. *Géométrie*. — Soit un trapèze rectangle convexe ABCD de bases AB et CD et de hauteur AD. On suppose $AB = a$ et $CD = AD = 2a$, a étant une longueur donnée.

1° Soit I le milieu de AD. Démontrer que le triangle BIC est isocèle. Calculer ses côtés en fonction de a .

2° Soit O le point d'intersection des diagonales AC et BD. Démontrer que les triangles AOD et BOC sont équivalents. Calculer les aires des triangles AOB, BOC, COD et DOA.

3° Même question qu'au 2°, en supposant que ABCD est un trapèze convexe quelconque, de bases b et B et de hauteur h .

Paris (septembre). — I. *Algèbre*. — 1° Simplifier les expressions :

$$A = \frac{x^2}{x^3 + 3x^2} \quad B = \frac{6 - 2x}{x^2 - 6x + 9} \quad C = \frac{60x}{5x^3 - 45x}$$

Calculer en fonction de x l'expression : $A - B - C$ et simplifier le résultat obtenu.

2° Calculer x pour que B soit égal à $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3° Vérifier que les expressions $y = \frac{1}{A}$ et $z = \frac{1}{B}$ sont des fonctions du premier degré en x . Construire dans le même système d'axes de coordonnées rectangulaires les droites représentant la variation de ces fonctions.

Calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

II. *Géométrie*. — Dans un quadrilatère convexe $ABCD$, les sommets A et B sont fixes, les sommets C et D sont mobiles, mais on a toujours :

$$AB = AD = 3a, \quad CB = CD = 4a.$$

1° Montrer que les diagonales AC et BD sont rectangulaires.

2° Soit M l'intersection de ces diagonales. Sur quelles lignes peuvent se déplacer les points C , D et M ?

3° Montrer qu'il existe toujours un cercle tangent aux quatre côtés du quadrilatère. Soit I son centre, r son rayon et S l'aire du quadrilatère $ABCD$. En utilisant les aires des triangles IAB , IBC , ICD et IDA montrer que le rapport $\frac{S}{r}$ reste constant quand C et D se déplacent.

4° Calculer en fonction de a les longueurs des diagonales, la surface S et le rayon r , lorsque le quadrilatère $ABCD$ peut être inscrit dans un cercle.

Nancy (septembre). — I. *Algèbre*. — On donne un segment de droite $AB = 10$ cm. et, sur ce segment, un point variable M défini par $AM = x$. On construit d'un même côté de AB , les carrés $ACDM$ et $MEFB$ de côtés AM et MB . On désigne par y la longueur de la ligne polygonale fermée $ACDEFBA$.

1° Calculer y en fonction de x . On considérera deux cas de figure selon que M est à gauche ou à droite du milieu O de AB .

2° Etudier les variations de y lorsque M se déplace de A à B . Représentation graphique.

3° a) Déterminer x de façon que y soit le double du périmètre du carré $ACDM$. Solutions algébrique et graphique.

b) Déterminer x de façon que le rapport de y et du périmètre du carré $ACDM$ soit égal à k . Quelles sont les valeurs possibles de k ? Discussion graphique.

II. *Géométrie*. — On donne une circonférence O de rayon R et un diamètre fixe AA' sur lequel on prend deux points fixes B et B' , symétriques par rapport à O .

Par B et B' on mène deux cordes parallèles PBQ et $P'B'Q'$.

1° Montrer que le quadrilatère $PP'Q'Q$ est un rectangle et que $PB = B'Q'$. $BQ = B'P'$. En déduire que le produit $BP \times B'P'$ est constant quand B et B' restent fixes, la direction commune des deux cordes PQ et $P'Q'$ varie.

2° Soient M et M' les points de rencontre de PP' avec les tangentes en A et en A' au cercle. Montrer que les quadrilatères $ABPM$ et $A'BPM'$ sont inscriptibles. En déduire que l'angle MBM' garde une valeur constante qu'on donnera.

Sur quelle droite fixe reste le milieu I de MM' quand la direction de PQ et $P'Q'$ varie ?