

II. Documents officiels

Rapport sur la composition de Mathématiques **(classe de Mathématiques)** **au Concours général des Lycées, Collèges et Ecoles normales en 1953**

Le Jury était composé de MM. ROBERT, Inspecteur général, Président ; BOUSQUET, professeur au Lycée Chaptal (Mathématiques supérieures) ; CHAZAL, professeur au Lycée Saint-Louis (classe préparatoire à l'Ecole Normale Supérieure) ; RAMIS, professeur au Lycée Louis-le-Grand (Navale) ; Mlle RANSON, professeur au Lycée de Sèvres ; M. RICHE, professeur au Lycée Saint-Louis (classe préparatoire à l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud).

ANALYSE DU SUJET (1)

La partie I du problème était l'étude des tangentes à une ellipse (E) inscrite dans un parallélogramme MNM'N'.

Paragraphe 1°. — Cas particulier d'un cercle (C).

Le parallélogramme dénoté ici $mm'n'$, est un losange : les côtés mn , $m'n'$ sont tangents à (C) aux points g , g' symétriques par rapport au centre o du cercle. Les diagonales mm' et nn' sont perpendiculaires, le triangle mon est rectangle en o , og est hauteur, d'où la relation $\overline{gm} \cdot \overline{gn} = -go^2 = -r^2$ ou encore $\overline{gm} \cdot \overline{g'n'} = r^2$, car $\overline{gn} = -\overline{g'n'}$.

Ainsi pour toute tangente (telle que mn') à (C) coupant en deux points (tels que m et n') les tangentes à (C) aux points g , g' , le produit des abscisses de ces points comptées sur ces tangentes à partir de g et g' est égal au carré du rayon de (C).

Considérons, en revenant au losange de l'énoncé, une tangente quelconque pp' à (C) coupant mn et $m'n'$ aux points respectifs p , p' ; de ce qui précède il s'ensuit que $\overline{gp} \cdot \overline{g'p'} = r^2$.

Réciproquement, si une droite coupant mn en p_1 et $m'n'$ en p'_1 est telle que la relation $\overline{gp_1} \cdot \overline{g'p'_1} = r^2$ soit vérifiée, la tangente à (C) distincte de p_1g coupe $m'n'$ en un certain point p''_1 tel que $\overline{gp_1} \cdot \overline{g'p''_1} = r^2$; il en résulte que $\overline{g'p''_1} = \overline{g'p'_1}$ et que la droite $p_1p'_1$ est tangente à (C).

En résumé, il faut et il suffit que $\overline{gp_1} \cdot \overline{g'p'_1} = r^2$ pour que $p_1p'_1$ soit tangente à (C).

Au lieu d'employer les abscisses gp et $g'p'$ des points correspondants p , p' , variables avec la tangente pp' considérée, on peut fixer leurs positions à l'aide des rapports respectifs $\frac{\overline{pm}}{\overline{pn}}$, $\frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}}$. Calculons le second en fonction du premier :

$$\overline{p'm'} = \overline{g'm'} - \overline{g'p'} = \frac{r^2}{\overline{gn}} - \frac{r^2}{\overline{gp}} = \frac{r^2(\overline{gp} - \overline{gn})}{\overline{gp} \cdot \overline{gn}} = \frac{r^2 \overline{pn}}{\overline{gp} \cdot \overline{gn}}$$

$$\text{De même } \overline{p'n'} = \frac{r^2 \overline{mp}}{\overline{gm} \cdot \overline{gp}} \quad \text{et, par division} \quad \frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}} = \frac{\overline{pn}}{\overline{pm}} \cdot \frac{\overline{gm}}{\overline{gn}}$$

ou, sous une forme plus symétrique, $\frac{\overline{pm}}{\overline{pn}} \cdot \frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}} = \frac{\overline{gm}}{\overline{gn}} = \text{constante (1)}.$

(1) Voir le texte *Bulletin* n° 157, pages 144, 145 et 146.

Cette relation (1) est nécessaire pour que la droite pp' soit tangente à (C) : si, réciproquement on la suppose vérifiée avec une droite $p_1p'_1$, c'est-à-dire si

$$\frac{\overline{p_1m}}{\overline{p_1n}} \cdot \frac{\overline{p'_1m'}}{\overline{p'_1n'}} = \frac{\overline{gm}}{\overline{gn}} \quad \text{la considération du point } p''_1 \text{ déjà considérée plus haut, tel que}$$

$$\frac{\overline{p_1m}}{\overline{p_1n}} \cdot \frac{\overline{p''_1m'}}{\overline{p''_1n'}} = \frac{\overline{gm}}{\overline{gn}} \quad \text{amène à conclure que } \frac{\overline{p'_1m'}}{\overline{p'_1n'}} = \frac{\overline{p''_1m'}}{\overline{p''_1n'}}$$

c'est-à-dire que p'_1 coïncide avec p''_1 .

En résumé, la relation (1) est nécessaire et suffisante pour que la droite pp' soit tangente à (C).

Paragraphe 2°. — Cas général d'une ellipse (E).

On désigne ici par P et P' les points où une droite (T) coupe les côtés parallèles MN, M'N' du parallélogramme circonscrit à (E).

Considérons l'ellipse (E) comme la projection, sur son plan, d'un cercle (C). Toute tangente à (E) est également la projection d'une tangente déterminée à (C) : au parallélogramme MNM'N' circonscrit à (E) correspond ainsi un certain parallélogramme $mnm'n'$ circonscrit à (C). Les points G et G' sont les projections des points de contact g et g' de mn et $m'n'$ avec (C) ; P et P' sont les projections de certains points p et p' appartenant respectivement à mn et $m'n'$.

Pour que (T) soit tangente à (E), il faut et il suffit que la droite pp' soit tan-

$$\text{gente à (C), c'est-à-dire que } \frac{\overline{pm}}{\overline{pn}} \times \frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}} = \frac{\overline{gm}}{\overline{gn}}.$$

Trois points alignés du plan de (C) et leurs projections sur le plan de (E) cons-

$$\text{tituent deux figures semblables : ainsi } \frac{\overline{tm}}{\overline{tn}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} \quad \frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}} = \frac{\overline{P'M'}}{\overline{P'N'}} \quad \frac{\overline{gm}}{\overline{gn}} = \frac{\overline{GM}}{\overline{GN}}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que (T) soit tangente à (E) est donc :

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} \cdot \frac{\overline{P'M'}}{\overline{P'N'}} = \frac{\overline{GM}}{\overline{GN}} \quad (2).$$

PARTIE II. — On y considère, outre l'ellipse (E), son cercle orthoptique (Ω) et un point S situé sur la sphère ayant ce cercle (Ω) comme grand cercle. s désigne la projection orthogonale de S sur le plan (Q) de (E). Une tangente (T₁) à (E) rencontre nécessairement le cercle (Ω) aux points de rencontre de (T₁) avec les deux tangentes à (E), orthogonales à (T₁) : A, B, désignant ces points, leurs symétriques A', B' par rapport au centre O de (E) appartiennent à (Ω) et le parallélogramme ABA'B' est un rectangle circonscrit à (E) et inscrit dans (Ω).

Paragraphe 1°. — Le point s [intérieur à (Ω), mais non nécessairement à (E)] n'est pas généralement situé sur (T₁) : supposons que s ne soit pas sur (T₁), c'est-à-dire que le plan (ST₁) ne soit pas perpendiculaire au plan (Q) : dans ces conditions la perpendiculaire menée par S au plan (ST₁) coupe le plan (Q) en un certain point t_1 . La droite st_1 , projection de St_1 , est perpendiculaire sur la trace (T₁) [du plan (ST₁) sur (Q)] en un certain point h .

Dans le plan St_1h , le triangle t_1Sh est rectangle en S, la hauteur issue de S étant Ss . D'où la relation $\overline{sh} \cdot \overline{st_1} = -sS^2 = -\varphi^2$ en posant $Ss = \varphi$, que l'énoncé suppose non nul. Le point t_1 est donc inverse du pied h de la perpendiculaire à (T₁) issue de s , dans l'inversion de pôle s et de puissance $-\varphi^2$. Cette puissance est celle de s par rapport à (Ω).

S est situé sur la sphère ayant (Ω) comme grand cercle, sphère dont AA' et

BB' sont diamètres. SA est donc orthogonal à SA', et de même SB est orthogonal à SB'. SA et SB situées dans le plan ST₁ sont orthogonales à la droite St₁.

Il en résulte que SA est perpendiculaire au plan SA't₁ et que SB est perpendiculaire au plan SB't₁.

Le plan SA't₁ est bien défini si t₁ ne coïncide pas avec A' : il en est ainsi si s n'est pas situé sur BA'. Précisons que nous supposons *s non situé sur BA' ou sur AB'*.

Le plan SA't₁ coupe la droite (T₁) en un certain point A'' ; il ne saurait, en effet être parallèle à (T₁), sinon sa normale SA serait orthogonale à (T₁) et s serait situé sur AB', ce qui est exclus. La trace de SA't₁ sur (Q) est A't₁, qui contient donc A'', et qui est orthogonale à SA, et aussi à sa projection sA. Dans le triangle t₁AA'', t₁s et As sont deux hauteurs et s est l'orthocentre. On peut noter aussi que les trois droites SA, SA'', St₁ forment un trièdre trirectangle, puisque chacune des deux droites St₁, SA est perpendiculaire au plan des deux autres.

Le symétrique de s par rapport à (T₁) est situé sur le cercle AA''t₁, d'où résulte la propriété, classique pour l'orthocentre d'un triangle : $\overline{hA} \cdot \overline{hA''} = -\overline{hs} \cdot \overline{ht_1}$ (3). On verrait de même que le plan SB't₁ est bien défini, coupe (T₁) en un certain point B'' aligné avec t₁ et B' et que s est l'orthocentre du triangle t₁BB'', d'où la relation

$$\overline{hB} \cdot \overline{hB''} = -\overline{hs} \cdot \overline{ht_1} \quad (4).$$

Remarque. — Si s est situé sur BA', la première relation définit un point A'' ; dans la seconde, B'' étant rejeté à l'infini sur (T₁), hB devient nul et hB'' infini. On peut considérer que la seconde relation subsiste encore. De même si s est situé sur AB'.

Si s est situé sur (T₁), t₁ est rejeté à l'infini sur sh et l'on voit aussitôt que A'' et B'' sont respectivement confondus avec B et A.

2° Voyons la situation du point t₁ par rapport à l'ellipse (E).

Dans les cas particuliers faisant l'objet de la remarque précédente, t₁ est en A', ou en B', ou à l'infini : t₁ est donc extérieur à (E).

Si h est extérieur, sur (T₁), au segment AB, t₁ est extérieur à la bande de plan comprise entre les parallèles BA', AB', qui sont tangentes à (E) : il est donc impossible que t₁ soit sur l'ellipse ou à son intérieur, l'ellipse étant intérieure à cette bande. t₁ est donc extérieur à (E).

Enfin, si h est intérieur au segment AB, il est intérieur au cercle (Q). Or l'inversion de pôle s et de puissance $-e^2$ n'altère pas le cercle (Q), mais échange ses régions intérieure et extérieure ; elle change, d'autre part h en t₁. t₁ est donc extérieur au cercle orthoptique (Q) de (E) ; à fortiori il est extérieur à (E).

Donc, dans tous les cas t₁ est extérieur à (E) : il s'ensuit qu'on peut mener par t₁ deux tangentes (T₂) et (T₃) à (E). Les points de rencontre de (T₂) avec AB et A'B' sont désignés par t₃ et t'₃ ; les points de rencontre de (T₃) avec AB et A'B' sont désignés par t₂ et t'₂. Avec ces notations le triangle t₁t₂t₃ est circonscrit à l'ellipse (E) et les côtés opposés aux sommets t₁, t₂, t₃ sont respectivement les droites (T₁), (T₂), (T₃).

Nous écarterons tous les cas particuliers où s serait situé sur un côté du rectangle ABA'B' autre que A'B' ; dans ces conditions les points t₁, t₂, t₃ sont à distance finie.

La relation étudiée dans (I, 2°) s'applique ici au rectangle ABA'B' circonscrit à (E) et qui représente un cas particulier du parallélogramme MNM'N'. Rappelons que, pour qu'une droite (T), coupant AB en t et A'B' en t', soit tangente à (E) il faut et il suffit que ces points satisfassent à la relation [transposition de (2)] :

$$\frac{\overline{tA}}{\overline{tB}} \cdot \frac{\overline{t'A}}{\overline{t'B'}} = K$$

K ne dépendant que du rectangle et de (E), mais étant indépendant de t et t'.

Cette relation donne un moyen algébrique de caractériser, par leurs points de rencontre avec AB et A'B', les tangentes (T₂) et (T₃) menées du point t₁ à (E). Pour que la droite (T) passe par t₁, intersection de A''A' et B''B', il faut et il suffit

$$\text{que } \frac{\overline{tA'}}{\overline{tB'}} = \frac{\overline{tA''}}{\overline{tB''}}.$$

En éliminant le rapport $\frac{\overline{tA'}}{\overline{tB'}}$ entre les deux relations qui précèdent, on obtient la condition, nécessaire et suffisante, à laquelle doit répondre t pour que t soit un des points t₂ et t₃ :

$$\frac{\overline{tA}}{\overline{tB}} \times \frac{\overline{tA''}}{\overline{tB''}} = K \quad \text{soit } \overline{tA} \cdot \overline{tA''} - K \overline{tB} \cdot \overline{tB''} = 0 \quad (5).$$

(T₁) étant orientée, posons $\overline{ht} = x$, d'où $\overline{tA} = \overline{hA} - x$, $\overline{tA''} = \overline{hA''} - x$, $\overline{tB} = \overline{hB} - x$, $\overline{tB''} = \overline{hB''} - x$. La condition (5) se traduit par une équation du second degré en x.

$$(\overline{hA} - x)(\overline{hA''} - x) - K(\overline{hB} - x)(\overline{hB''} - x) = 0.$$

Le coefficient de x² dans le premier membre est 1 - K. Le coefficient constant est $\overline{hA} \cdot \overline{hA''} - K \overline{hB} \cdot \overline{hB''}$, c'est-à-dire, en tenant compte des relations (3) et (4) établies plus haut

$$- \overline{hs} \cdot \overline{ht_1} (1 - K).$$

L'équation du second degré admettant comme racines $x_2 = \overline{ht_2}$, $x_3 = \overline{ht_3}$, d'après sa signification, le produit x₂x₃ de ces racines s'exprime par le quotient des coefficients précédents : 1 - K est non nul, puisqu'il y a deux racines. Ainsi

$$x_2 x_3 = - \overline{hs} \cdot \overline{ht_1}.$$

Soit

$$\overline{ht_2} \cdot \overline{ht_3} = - \overline{hs} \cdot \overline{ht_1} \quad (6).$$

Le triangle t₁t₂t₃ a un orthocentre s' situé sur la hauteur t₁h, défini par la relation $\overline{ht_2} \cdot \overline{ht_3} = - \overline{hs'} \cdot \overline{ht_1}$, qui, par comparaison avec (6) donne [ht₁ étant non nul] $\overline{hs'} = \overline{hs}$. s' coïncide avec s. Donc : le triangle t₁t₂t₃ a comme orthocentre le point s, projection de S sur le plan (Q).

Dans le triangle hSt₁, qui est rectangle en h, remarquons que $\overline{hS^2} = \overline{hs} \cdot \overline{ht_1}$.

La relation (6) s'interprète donc encore par $\overline{ht_2} \cdot \overline{ht_3} = \overline{hS^2}$, et prouve que le triangle t₂St₃ est rectangle en S : ainsi St₂ et St₃ sont orthogonales, et l'on sait déjà que chacune de ces deux droites, étant contenue dans le plan ST₁, est orthogonale à St₁. Donc le trièdre dont les arêtes sont St₁, St₂, St₃ est trirectangle. Ou encore, en considérant ses faces qui sont les plans (ST₁), (ST₂), (ST₃) : les trois plans (ST₁), (ST₂), (ST₃) sont deux à deux perpendiculaires.

A toute tangente (T₁) à (E) correspondent deux autres tangentes déterminées (T₂) et (T₃) à (E) et le point fixe S [quel que soit S d'ailleurs, sur la sphère de grand cercle (Q)] est tel que les plans déterminés par S et les droites (T₁), (T₂), (T₃) soit trirectangle.

Remarque. — On voit sans peine que les cas réservés dans l'étude précédente, s'ils se présentent, ne mettent pas en défaut la conclusion précédente : il s'y présente seulement le fait que le trièdre trirectangle y a une arête parallèle au plan (Q).

(T₁), (T₂), (T₃) forment un groupe symétrique de trois tangentes à (E), c'est-à-dire que l'échange de deux tangentes ne modifie pas globalement ce groupe.

PARTIE III. — Elle consiste dans l'étude du lieu du point t₁ (ou t₂ ou t₃), car ces lieux sont, d'après ce qui précède, indiscernables.

Pour abréger, nous désignons par t l'un quelconque t_i des sommets t₁, t₂, t₃ (i = 1, 2, 3) et par (T) le côté opposé (T_i) du triangle t₁t₂t₃ ; h continue à désigner,

comme on l'a fait dans le cas où $i = 1$, la projection de s sur la droite (T). Rappelons que $\overline{sh} \cdot \overline{st} = -\rho^2$.

1° (E) peut être considérée comme projection d'un cercle sur le plan (Q). En d'autres termes, le cylindre admettant (E) comme section droite est coupé par certains plans (II) suivant des cercles. Il suffit ici de caractériser leurs directions, tout plan parallèle à un plan (II) étant aussi, *à priori*, un plan (II) : ou aussi les directions de droites normales aux plans (II), et, pour fixer les idées, les droites (F) passant par s et perpendiculaires aux plans (II).

Si un cercle a comme projection orthogonale sur (Q) l'ellipse (E), un de ses diamètres est projeté suivant le grand axe Ox de (E), et il est parallèle à (Q) : ainsi les plans (II) sont parallèles à Ox . L'angle aigu θ du plan du cercle avec (Q)

est tel que $\cos \theta = \frac{b}{a}$ (7). Donc les droites (F) sont orthogonales à Ox . Soit Oz la perpendiculaire élevée en O au plan (Q) ; une droite (F) fait avec Oz un angle aigu égal à θ . Il existe deux droites (F), symétriques par rapport au plan (Q) situées dans le plan parallèle au plan yOz et passant par s et leur angle commun θ avec Oz [complémentaire de l'angle de ces droites avec (Q)] est défini par (7), et

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$: réciproquement, il est immédiat que tout plan perpendiculaire à une telle droite contient un cercle, dont le centre est le point d'intersection de ce plan avec Oz , dont le rayon est a et qui est projeté sur (Q) suivant l'ellipse (E) ; car la projection sur (Q) de ce cercle est une ellipse qui a les mêmes axes, en grandeur et en position, que (E).

Transformons une telle droite (F) par une rotation d'axe sS (parallèle à Oz) et d'un angle droit, le sens de rotation étant quelconque ; on obtient une droite (F_1) passant par s . Il n'existe que deux telles droites (F_1), car la symétrie par rapport à la droite sS et la symétrie par rapport au plan (Q) produisent le même effet sur une telle droite (F_1). Elle est orthogonale à Oy : autrement dit la parallèle à (F_1) passant par O est dans le plan xOz . Cette parallèle fait avec (Q) un angle égal à celui que (F) forme avec (Q), qui vaut donc $\frac{\pi}{2} - \theta$.

Or, on sait que par (Q) passent deux cylindres de révolution, de rayons égaux à b , dont les axes passant par O sont dans le plan xOz : leur épure classique montre que l'angle aigu d'un tel axe avec Ox , c'est-à-dire son angle avec (Q) a un sinus égal à $\frac{b}{a}$: cet angle est donc égal à $\frac{\pi}{2} - \theta$.

Cette étude montre que les droites (F_1), symétriques par rapport au plan (Q) sont parallèles aux axes de ces cylindres de révolution, ou, si l'on préfère, à leurs génératrices.

2° (T) est tangente à (E) en un point que nous désignerons par μ . (F_1) ayant été choisie, considérons le cylindre de révolution contenant (E) et de génératrices parallèles à (F_1). D'après le théorème de Dandelin, les foyers Φ et Φ' de (E) sont les points de contact avec le plan (Q) des deux sphères inscrites dans ce cylindre qui sont tangentes au plan (Q) : soit (Σ) celle de ces sphères qui passe par Φ . La parallèle à (F_1) passant par μ est génératrice du cylindre et c'est une tangente à la sphère (Σ) en un point M de cette génératrice. Le plan tangent en M à (Σ) est aussi le plan tangent au cylindre le long de μM , et contient donc la tangente (T) à (E) au point μ .

On voit que par (T) passent deux plans tangents à (Σ), savoir le plan (Q) et le plan (ΓM), dont les points de contact respectifs sont Φ et M . Ils sont évidemment symétriques par rapport au plan médiateur du segment ΦM . La droite (T) est donc

dans ce plan médiateur : la symétrie par rapport à ce plan échange Φ et M et n'altère pas le point μ .

Donc l'angle (aigu ou droit) de (T) avec la droite $\mu\Phi$ est égal à l'angle (aigu ou droit) de (T) avec la droite μM , autrement dit à l'angle α des droites (T) et (F_1) , en supposant $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Ce raisonnement s'applique aussi au foyer Φ' et d'ailleurs (T) forme des angles égaux, *à priori*, avec $\mu\Phi$ et $\mu\Phi'$.

Calculons $\sin \alpha$, en considérant que α est angle des rayons vecteurs focaux $\mu\Phi$ et $\mu\Phi'$ du point μ de (E) avec la tangente (T) , d'après ce qui précède : en appelant f et f' les distances respectives de Φ et Φ' à la droite (T) , écrivons que

$$\sin \alpha = \frac{f}{\mu\Phi} = \frac{f'}{\mu\Phi'} = \frac{f+f'}{\mu\Phi + \mu\Phi'}$$

K désignant la projection orthogonale de O sur (T) , O est le milieu de $\Phi\Phi'$, segment situé tout entier d'un même côté de O , d'où résulte que $f + f' = 2OK$. D'autre part $\mu\Phi + \mu\Phi' = 2a$. Ainsi on obtient $\sin \alpha = \frac{OK}{a}$ (8).

Calcul de la distance δ du point t , qui engendre le lieu demandé (L) , à la droite fixe (F) .

On voit immédiatement que $\delta = st \sin(st, F)$ (st, F) étant un angle aigu ou droit.

La rotation d'un angle droit autour de sS , qui transforme (F) en (F_1) , transforme d'autre part st en une parallèle à (T) , puisque st est orthogonale à (T) . Donc $\sin(st, F) = \sin(T, F_1)$ [(T, F_1) étant aigu ou droit], la rotation conservant les angles.

Le second membre de cette relation, $\sin \alpha$, peut être remplacé, d'après (8), par $\frac{OK}{a}$. Donc $\delta = st \cdot \frac{OK}{a}$ (9).

3° En suivant les indications du texte, commençons par déterminer le lieu (L) dans l'hypothèse où s est confondu avec O .

Alors sh est confondu avec OK . Comme $st.sh = \varphi^2$, actuellement égal à R^2 [R rayon de (Ω) ; on sait que $R^2 = a^2 + b^2$] la relation (9) devient $\delta = \frac{a^2 + b^2}{a}$.

La distance de t à (F) est constante. t appartient donc à la section, par le plan $(\mathcal{Q})$, du cylindre de révolution d'axe (OF) et de rayon $\frac{a^2 + b^2}{a}$; cette section est une ellipse (ϵ) de centre O .

Réciproquement, à un point τ de cette ellipse (ϵ) correspondent deux tangentes (T) à (E) ayant la direction perpendiculaire au vecteur $O\tau$, et, par conséquent, deux points t du lieu (L) , dont chacun est associé à la projection K de O sur (T) par la relation $OK \cdot Ot = -(a^2 + b^2)$; ces deux points sont nécessairement sur l'ellipse (ϵ) . Comme la droite $O\tau$ ne coupe (ϵ) qu'en deux points, l'un des points t considérés coïncide avec τ et τ appartient au lieu (L) . On peut conclure alors à l'identité du lieu (L) avec l'ellipse (ϵ) .

Cette ellipse a , *à priori*, comme axes de symétrie Ox et Oy : le demi-axe A porté sur Ox est égal au rayon $\frac{a^2 + b^2}{a}$ du cylindre. Pour calculer le demi-axe B de (ϵ) porté sur Oy , il suffit de se rappeler les définitions de (F) et de θ ; on voit que $B = \frac{a^2 + b^2}{a} \cdot \frac{\cos \theta}{1}$, d'où, d'après (7) $B = \frac{a^2 + b^2}{b}$.

Observer que A est le demi-petit axe, B le demi-grand axe de (ϵ) : $A < B$, et

que $\frac{A}{B} = \frac{b}{a}$: les deux ellipses (E) et (L) sont semblables et pourraient être rendues homothétiques par rotation d'un angle droit, de l'une d'elles, autour de Oz.

4° Supposons maintenant s distinct de O : appelons (D) la polaire de s par rapport au cercle (Ω) : elle est perpendiculaire à la droite Os en un point O', tel que $\overline{Os} \cdot \overline{OO'} = R^2$, ce qui fait connaître OO', puisque $Os \neq O$.

Le plan polaire de O' par rapport à la sphère de grand cercle (Ω) est perpendiculaire à Os en s , donc contient le point S de cette sphère ; la droite O'S est tangente à cette sphère en S, ou encore le triangle OSO' est rectangle, en S : on en déduit la relation, entre vecteurs de l'hypoténuse OO', $\overline{sO} \cdot \overline{sO'} = -sS^2 = -\rho^2$.

La comparaison entre cette relation et la suivante : $\overline{sh} \cdot \overline{st} = -\rho^2$ montre que $\overline{sO} \cdot \overline{sO'} = \overline{sh} \cdot \overline{st}$; les points O, O', h , t , sont sur un même cercle, ce qui équivaut, comme il est classique, au fait que les triangles shO et sO't sont semblables.

La similitude (indirecte) qui transforme ainsi s en s , h en O', O en t transforme la droite (T) perpendiculaire à sh en h en la perpendiculaire à sO' en O', savoir la droite (D). Le rapport de cette similitude est donc le rapport de la distance de t à (D) à la distance de O à (T), soit $\frac{d}{OK}$, en appelant d la distance de t à (D).

Ce rapport de similitude est, d'autre part, égal à $\frac{st}{sO}$. D'où la relation

$$\frac{d}{OK} = \frac{st}{sO} \quad (10).$$

Éliminons st entre les relations (9) et (10) : ceci donne finalement $\frac{\delta}{d} = \frac{sO}{a}$ (11) OK disparaissant, en même temps, dans le résultat. Le second membre de (11) est une constante. Le rapport des distances des points du lieu (L) aux droites (F) et (D), dont la seconde seule est dans le plan ($\mathcal{Q}$), est égal à $\frac{sO}{a}$. Soit (L') le lieu des points du plan ($\mathcal{Q}$) dont le rapport des distances à (F) et à (D) est égal à $\frac{sO}{a}$. Tout point de (L) appartient à (L').

Réciproquement à un point τ du lieu (L') correspondent deux tangentes (T) à (E) ayant la direction perpendiculaire au vecteur $s\tau$ et par conséquent deux points t du lieu (L) dont chacun est associé à la projection h de s sur (T) par la relation $\overline{sh} \cdot \overline{st} = -\rho^2$. La relation (9) $\delta = st \cdot \frac{OK}{a}$, qui ne reposait que sur la tangence de (T) à (E), et non sur un choix spécial de t , s'applique au point τ : nous écrirons pour plus de précision $\delta(\tau) = s\tau \cdot \frac{OK}{a}$ (9').

Par hypothèse, τ appartenant à (L') : $\frac{\delta(\tau)}{d(\tau)} = \frac{sO}{a}$ (11').

De (9') et (11'), par élimination de $\delta(\tau)$, résulte $\frac{s\tau}{sO} = \frac{d(\tau)}{OK}$.

Par hypothèse t appartient à (L), donc, d'après (10) $\frac{st}{sO} = \frac{d(t)}{OK}$.

La comparaison conduit à $\frac{s\tau}{d(\tau)} = \frac{st}{d(t)}$: le point τ et chacun des deux points t lui correspondant appartiennent, d'une part, à la droite $s\tau$, et d'autre part au lieu des points dont le rapport des distances à s et à D est $\frac{s\tau}{d(\tau)}$ (conique de foyer s).

Une telle conique et une telle droite n'ont au plus que deux points communs, s n'étant pas sur D (conséquence du fait que $\varphi \neq 0$) : nécessairement τ coïncide avec l'un des deux points t : tout point de (L') appartient à (L) .

On peut maintenant conclure à l'identité des lieux (L) et (L') . Ainsi (L) est identique au lieu géométrique des points du plan $(\mathcal{Q})$ dont le rapport des distances aux droites (F) et (D) est égal à $\frac{sO}{a}$.

5° Etude de la projection orthogonale (Γ) de (L) sur un plan (Π) , perpendiculaire à (F) . — Par (D) passe un plan (U) déterminé parallèle à (F) . La distance mk d'un point quelconque m du plan $(\mathcal{Q})$ à la droite (D) est proportionnelle à la distance ml de m à ce plan (U) : car le triangle mlk rectangle en l donne la relation

$ml = mk \cos \beta$ (12) où β est l'angle $\widehat{km\hat{l}}$. Cet angle est indépendant de m : c'est l'angle aigu de la droite Os (parallèle à mk) avec une normale au plan (U) .

Ceci posé, projetons la courbe (L) sur un plan (Π) déterminé et perpendiculaire à (F) en un point σ : le plan (U) est le plan projetant la droite (D) sur le plan (Π) et son intersection (Δ) avec (Π) est la projection de (D) sur (Π) . La projection de m est un point n de (Π) .

Pour que n appartienne à la projection (Γ) de (L) il faut et il suffit que m appartienne à (L) , c'est-à-dire que $\frac{\delta(m)}{d(m)} = \frac{sO}{a}$ d'après la relation (11) caractéristique, dans $(\mathcal{Q})$, des points de (L) .

$d(m)$ est la distance mk de m à (D) , qui d'après (12), est égale à $\frac{ml}{\cos \beta}$; la condition devient $\frac{\delta(m)}{ml} = \frac{sO}{\cos \beta} \cdot \frac{1}{a}$.

$\delta(m)$ distance de m à (F) se projette en vraie grandeur sur (Π) selon la distance de n à σ , soit $\delta(m) = n\sigma$.

ml distance de m au plan (U) , perpendiculaire à (Π) se projette en vraie grandeur sur (Π) selon la distance $n\lambda$ de n à (Δ) .

La condition s'écrit $\frac{n\sigma}{n\lambda} = e$ (13) en posant $e = \frac{sO}{\cos \beta} \cdot \frac{1}{a}$ (constante). C'est dire que la projection (Γ) de (L) sur (Π) est une conique de foyer σ [trace de la droite (F) sur (Π)], de directrice (Δ) et d'excentricité e .

s n'est pas situé sur D puisque $s\overline{O} \cdot s\overline{O}' = -\varphi^2$ et qu'on suppose $\varphi \neq 0$, d'où certainement $s\overline{O}' \neq 0$: donc σ n'est pas sur (Δ) : (Γ) est une conique proprement dite, ellipse, hyperbole ou parabole selon que $e < 1$ ou $e > 1$ ou $e = 1$.

Discutons ces éventualités selon la position de s dans $(\mathcal{Q})$: transformons à cet effet l'expression trouvée pour e . Les perpendiculaires Os et sS au plan $(\mathcal{Q})$ élevées en O et s coupent le plan (Π) en des points O_1 et s_1 . Os peut être considéré comme la projection orthogonale du segment O_1s_1 sur le plan $(\mathcal{Q})$. O_1s_1 est orthogonal à (F) , puisque situé dans le plan (Π) , et O_1s_1 est orthogonal à (D) , puisque contenu dans le plan sOs qui est perpendiculaire à (D) .

O_1s_1 est donc une perpendiculaire au plan (U) qui est parallèle aux directions de droites (D) et (F) . L'angle Os, O_1s_1 est ainsi l'angle β considéré plus haut. Os est projection orthogonale de O_1s_1 sur la droite Os , donc $Os = O_1s_1 \cos \beta$ et $\frac{sO}{\cos \beta} = O_1s_1$.

L'expression de e devient $e = \frac{O_1s}{a}$ (14).

Ce rapport est égal, inférieur, ou supérieur à 1, selon que, dans le plan (Π) , le point s , est situé sur le cercle de centre O_1 et de rayon a , intérieur ou extérieur à

ce cercle. Or ce cercle est précisément projeté orthogonalement sur (Q) suivant l'ellipse (E) . D'où les résultats suivants :

Lorsque s est situé sur (E) , (Γ) est une parabole : lorsque s est intérieur à (E) , (Γ) est une ellipse ; lorsque s est extérieur à (E) [soit dans la région comprise entre (E) et (Q)] (Γ) est une hyperbole.

On ne demandait pas d'établir que, dans le cas général, le lieu (L) est lui-même une conique, ce que l'on pressent ; mais la démonstration ne serait plus aussi élémentaire. On aurait pu encore discuter la nature de (Γ) en cherchant si cette courbe a des points à l'infini, ou, ce qui revient au même, si (L) a des points à l'infini. Rappelons qu'on a vu déjà que t n'est rejeté à l'infini que si $sh = 0$, c'est-à-dire s situé sur (Γ) : trouver les points à l'infini de (L) , se ramène à mener du point s les tangentes à (E) , et cela confirme les résultats précédents.

Le lieu (L) peut-il être un cercle ?

Il est nécessaire que (Γ) soit une ellipse, donc que s soit, d'abord, intérieur à (E) . Cette restriction étant supposée remplie, il est nécessaire et suffisant pour que (L) soit un cercle, que le cylindre de section droite (Γ) soit coupé par le plan (Q) suivant un cercle : d'après une étude déjà faite dans (III, 1°) il y a pour cela deux conditions :

1° que l'axe focal (ou grand axe) de Γ soit parallèle à (Q) ;

2° que l'angle θ des plans (Π) et (Q) [voir III, 1°] ait son cosinus égal au rapport du petit au grand axe de (Γ) .

Or $\cos \theta = \frac{b}{a}$. Cela revient à dire que (Γ) soit semblable à (E) .

La première condition exige que la directrice (Δ) de (Γ) soit orthogonale à la direction du plan (Π) qui est en même temps une direction du plan (Q) : c'est la direction de Ox . (Δ) est la projection de (D) sur (Π) : pour que l'angle de Ox avec (Δ) soit droit, il faut et il suffit que l'angle de Ox avec (D) soit aussi droit ; enfin (D) étant orthogonal, dans (Q) , à la droite Os , il faut et il suffit que s soit situé sur la droite Ox .

La seconde condition peut s'exprimer en égalant les excentricités de (Γ) et de (E) , d'où d'après la formule (14) $\frac{O_1s_1}{a} = \frac{c}{a}$ c étant la demi-distance focale de (E) . Mais si s est sur Ox $Os = O_1s_1$. Il vient alors $Os = c$; s doit être l'un des foyers de (E) .

Réciproquement si s est pris en Φ ou Φ' [foyers de (E)], les conditions requises pour que (L) soit un cercle sont toutes remplies.

On le contrôle très simplement en considérant (par exemple pour s confondu avec Φ) les triangles $t_1t_2t_3$ inscrits dans (L) , circonscrits à (E) et ayant, ici, pour orthocentre Φ .

Le symétrique de Φ par rapport à un des côtés (T_1) , (T_2) , (T_3) d'un tel triangle est, d'une part, sur le cercle $t_1t_2t_3$; d'autre part, Φ étant foyer de (E) , ce symétrique est sur le cercle directeur de (E) de centre Φ' et de rayon $2a$. Les trois symétriques en question ne déterminent qu'un seul cercle et t_1 , t_2 , t_3 appartiennent donc au cercle directeur précédent. Donc, lorsque s est en l'un des foyers de (E) , le lieu (L) se confond avec le cercle directeur de (E) dont le centre est l'autre foyer.

RESULTATS GENERAUX

Le nombre de concurrents était inférieur d'un cinquième au nombre de ceux qui avaient été présentés en 1952. Ce n'est pas là, cependant, la seule différence résultant de la comparaison des deux concours consécutifs. Les correcteurs, sur-

veillant à Paris l'épreuve, s'étaient d'emblée rendus compte que le concours de 1954 serait nettement moins bien réussi que ceux des deux années précédentes.

La première correction des compositions, effectuée avec un barème initial provisoirement adopté par le jury et ne faisant jouer qu'un faible rôle, relatif, à la partie I, a montré que la grande majorité des copies se groupaient au-dessous de 5 sur 20 ; une tête, comparablement réduite, se manifestait entre 5 et 8, terminée par une pointe très effilée, d'une dizaine de compositions, s'étirant jusqu'à 13.

Or ce n'était pas du tout la physionomie des résultats de 1952, beaucoup plus homogènes, avec une cotation provisoire progressive peu différente de celle adoptée cette année.

L'explication de cette anomalie a été facile à déceler : la partie I, considérée *a priori* par tous les correcteurs comme un prélude n'offrant pas la moindre difficulté, a arrêté beaucoup d'élèves, fait perdre du temps à ceux qui l'ont finalement dominée, et, seule, la pointe d'avant-garde, formée des meilleurs concurrents, a franchi ce cap préliminaire sans s'y arrêter longuement.

Le texte de cette partie I n'indiquait pas la relation $\frac{\overline{pm}}{\overline{pn}} \cdot \frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}} = \frac{\overline{gm}}{\overline{gn}}$
(voir I, 1°),

mais la donnait à *découvrir*, par transformation, précisait-on, de la relation $\overline{gp} \cdot \overline{g'p'} = r^2$ entre les points p et p' .

Il est surprenant qu'une nuance aussi minime dans les indications données aux élèves, ait eu une telle répercussion. Ceux qui n'ont pas du tout réfléchi à la

demande faite, qui consistait à évaluer $\frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}}$ à l'aide de $\frac{\overline{pm}}{\overline{pn}}$ et de constantes, ont été tout de suite handicapés ; ils auraient pu en suivant la lettre du texte exprimer $\overline{gp}$ à l'aide de $\frac{\overline{pm}}{\overline{pn}}$ et $\overline{g'p'}$ à l'aide de $\frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}}$ et porter les expressions obtenues dans la condition $\overline{gp} \cdot \overline{g'p'} = r^2$.

Ce calcul avait l'avantage de fournir la relation cherchée comme condition *nécessaire et suffisante* pour que pp' soit tangente au cercle. Il n'est pas très long et on le rencontre dans bien des copies mais présenté avec quelle lourdeur ! On n'a

pas l'idée de l'abréger en posant $\frac{\overline{pm}}{\overline{pn}} = \lambda$, $\frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}} = \lambda'$; d'autre part, les formules de

géométrie analytique comme $\overline{gp} = \frac{\overline{gm} - \lambda \overline{gn}}{1 - \lambda}$ ne sont pas familières aux élèves de

Mathématiques. Ce qu'il faut tirer comme conclusion de cette mésaventure, c'est que nos élèves sont beaucoup trop dressés à démontrer des résultats fournis par le professeur ou le livre ; ils arrivent alors par tous les moyens au succès. Mais ils se posent trop rarement la question : *Comment aurais-je pu trouver ce résultat* si la question posée ne l'eût pas mentionné, se contentant d'aiguiller le chercheur dans une voie déterminée d'étude ?

Dans tout le restant du problème, sauf les dernières parties de III, le texte guidait sans cesse les concurrents, et ils se sont bien trouvés de cette tutelle ; ainsi les paragraphes (II, 1°) et (III, 1°) n'ont pas arrêté les candidats.

Dans (II, 2°), pour établir, sans calcul, que t_1 est extérieur à l'ellipse (E), il s'est produit ce fait que ce ne sont pas toujours les meilleurs candidats qui l'ont justifié correctement. On s'est en général servi de la remarque : si h est intérieur à

(Ω), t_1 est extérieur à (Ω), et à fortiori à (E) : mais on a souvent oublié de se demander si h est toujours sur le segment AB.

L'équation du deuxième degré n'a pas gêné ceux des candidats qui avaient établi la relation demandée en (I, 1°). Regrettons cependant, dans ce passage, une grossière faute d'homogénéité dans l'une des meilleures copies.

La partie III a joué son rôle pour départager les meilleurs, ce que l'on avait prévu. C'est surtout l'égalité angulaire (résultant cependant d'une simple rotation) qui a définitivement arrêté de nombreux candidats ; mais l'examen de la figure de Dandelin, qui s'introduisait dans (III, 2°), nous a valu quelques démonstrations très élégantes.

Dans (III, 4°) la formule $d.Os = OK$ *st* n'a été établie que par deux concurrents. A ce stade de la compétition, les candidats savent qu'un résultat relatif à un lieu géométrique implique l'étude d'une condition nécessaire et suffisante. On n'en apprécie pas moins la franchise de celui qui écrit : « Il y aurait lieu de démontrer la réciproque. »

Cette démonstration, reconnaissons-le, avec la même sincérité, eût exigé un peu plus de temps pour être mise au point.

On a encore justifié que (I) est une conique, mais la discussion de sa nature et la recherche des cas où (L) est un cercle ne sont étudiées dans aucune copie.

Les défauts de mise au point les plus fréquemment signalés sont la confusion entre « condition nécessaire » et « condition nécessaire et suffisante », celle aussi entre $gp.g'p'$ et $gp.g'p'$.

Le fait que la section plane triangulaire d'un trièdre trirectangle a son orthocentre confondu avec la projection orthogonale du sommet du trièdre sur ce plan semble familier à beaucoup de candidats, qui n'en reprennent pas, bien souvent, la démonstration : cela ne dispense pas de précisions justificatives, pour passer, inversement, du fait que s est orthocentre de $t_1t_2t_3$, au fait que le trièdre (St_1, St_2, St_3) est trirectangle.

Certains emploient l'expression de « contre-projection » dans un sens qui a paru très obscur. Il semble qu'on puisse sans inconvénient se passer pratiquement de ce néologisme, bon tout au plus dans une étude systématique de l'opération ponctuelle inverse d'une projection orthogonale.

D'autres affirment qu'une ellipse est la projection de son cercle principal, absurdité, ou confusion, dans leur esprit, de la projection et de l'affinité.

La présentation et l'orthographe sont convenables à de rares exceptions près : les mots les plus écorchés sont : hypoténuse et losange.

Treize compositions ont été retenues pour une seconde lecture. Il a été possible de décerner deux prix et quatre accessits : les moyennes (sur 20) sont 13,7 et 13,2 pour les prix ; 11,6, 11, 10,6 et 10,3 pour les accessits. La première copie non retenue pour une récompense est fort éloignée des précédentes (moyenne 8,5) ; la dernière des treize compositions lues par tous les correcteurs a la moyenne 6,8.

La copie classée première est d'une rédaction pleine de netteté et de probité : nous eussions désiré son impression au *Bulletin Officiel* ; mais, pour des raisons de place, il ne fut pas donné suite à notre projet.

Sur les six concurrents primés, quatre se retrouvent comme lauréats du Concours général de Physique.

Il est rare dans les annales du Concours général, que la sélection des candidats récompensés soit aussi aisée, et, d'après ce qui précède, probante. Ainsi la rédaction peu explicite du texte, qui est à l'origine de l'insuccès de l'épreuve chez la masse des concurrents, aura finalement contribué au bon choix des meilleurs.

Tous les lauréats sont élèves de lycées ; mais il n'est pas douteux que certains, comme le premier prix du Concours de Première en 1952, et qui était élève d'un collège, ont été ainsi conduits à achever leur scolarité secondaire dans un lycée. Le

premier prix du concours de Mathématiques en 1953 avait obtenu en 1952 un deuxième accessit au concours de Première.

La concordance de tels résultats, dans des épreuves qui portent, en somme, sur la totalité des programmes des classes, à dominante scientifique, préparant au Baccalauréat, donne grande confiance, non seulement dans la vertu éducative des mathématiques, mais dans la valeur des maîtres qui ont formé tous ces jeunes gens à la réflexion, à l'observation, aux qualités de composition, d'ordre et de méthode.

L'émulation introduit une note humaine, dont on ne saurait exagérer le prix, dans le travail que nous exigeons des jeunes gens, qui, certes, ne sont pas placés tous dans des considérations comparables, à âge égal, dans une compétition de ce genre : certains ont pu ne « démarrer » que d'une manière relativement récente, tous n'ont pas bénéficié des éléments de culture réputés les plus formateurs, ou d'une ambiance permettant une activité intellectuelle désintéressée. Le but du Concours général n'est pas de distinguer les uns des autres, mais de mettre en évidence la synthèse des efforts du corps enseignant et des élèves. Il ne fait aucun doute que la véritable émulation consiste, pour chacun, et avant tout, à se dépasser soi-même.

P. ROBERT,

Inspecteur général de l'Instruction publique.