

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Publication trimestrielle

Administration : Musée Pédagogique, 29, rue d'Ulm, Paris (5^e)

SOMMAIRE

PREMIÈRE PARTIE

- I. *Epreuve de Mathématiques au Baccalauréat (1^{re} Partie, Série A). Circulaire du 9 novembre 1953* 29
- II. Documents officiels : *Concours général des Lycées et Collèges (Classe de Mathématiques), Rapport de M. l'Inspecteur général ROBERT* 30
- ✓ *Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second Degré (Ancien Régime), Rapport de M. l'Inspecteur général ROBERT* 41

DEUXIÈME PARTIE

- L. CHATELUN : *Sur les bases axiomatiques de l'addition des segments orientés de même origine et sur la multiplication scalaire* 55
- H. MIRABEL : *Symétries à plan invariant et orientation des trièdres. Déplacements et Antidéplacements* 63
- E. EHRHARDT : *Théorèmes et formules parallèles du triangle* 68
- F. HÉRAUT : *Ecriture des égalités numériques dans le triangle* 72
- F. MOUTON : *Sur un problème national de Baccalauréat* 72
- P. GAL : *Théorème de Salmon* 73
- Invitation de l'Union des Physiciens 74

TEXTES D'EXAMENS 1953

Cotisations : 400 fr.

Abonnements : 800 fr.

Expédition des Bulletins : 29, rue d'Ulm, Paris 5^e

Abonnement d'un an au *Bulletin* (prix net) : France 800 fr.

Prix d'un numéro du *Bulletin* ou d'un *Supplément* (prix net) : France. 200 fr.

Les membres de l'Association (cotisation : 400 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés*.

Régler par chèque postal en utilisant l'adresse suivante :

Paris, Cc. 5708-21

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5^e)

Couverture page II

Présidents d'Honneur

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

Président : M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris (5°).
Vice-Présidents : Mlle MASSON, 3, avenue de la Porte-de-Montrouge, Paris (14°).
M. BENOIST, Collège Diderot, 60, bd de La Villette, Paris (19°).
M. CAGNAC, 53, rue de Babylone, Paris (7°).
M. GIRAULT, 5, rue Isabey, Paris (16°).
Secrétaires : M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16°).
M. ROSTOLLAND, professeur au Lycée Marcel-Roby, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).
Trésorier : M. LEGRAND, 3 bis, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).

Comité :

Membres élus

Sortants en 1954 : Mlle BARBIER (*Victor-Duruy*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. GIRAULT (*J.-B. Say*) ; M. JACQUEMART (*Pasteur*) ; M. MINOIS (*Lakanal*) ; M. RUFF (*Voltaire*).

Sortants en 1955 : M. CAGNAC (*Louis-le-Grand*) ; M. DURRANDE (*St-Louis*) ; M. HUISMAN (*Montaigne*) ; M. MARVILLET (*Strasbourg, Kléber*) ; M. MONJALLON (*St-Louis*) ; M. SINGIER (*St-Louis*).

Sortants en 1956 : Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; M. BAY (*Condorcet*) ; M. CARALP (*Montaigne*) ; M. CROZES (*Henri-IV*) ; M. DELTHEIL (*Fac. Sc. Toulouse*) ; M. PÉTRUS (*Janson*).

Sortants en 1957 : M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; M. ITARD (*Henri-IV*) ; M. MAILLARD (*Charlemagne*) ; M. POCHARD (*Condorcet*) ; M. ROSTOLLAND (*Marcel-Roby*) ; M. THOVERT (*Lyon, Ampère*).

Membres de droit

Mme NICOU (Lyon, *Marie-Vidalenc*) ; M. CANONGE (Castres) ; Mlle APERE (*Fénelon*) ; M. POUX (Saint-Cloud).

Rapporteurs

Classes Nouvelles : Mlle MASSON ; *Enseignement moderne court :* M. GIRAULT ; *Enseignement technique :* M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. GIRAULT ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, M. MINOIS, Mlle PROTIN (S.Ex.) ; *Mathématiques Supérieures :* M. DURRANDE ; *Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques :* *Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* *Brevet et Ecoles Normales :* M. — *Baccalauréat :* M. FAVRELLE. — *Grandes Ecoles :* M. CHAZAL. — *Concours général :* M. SINGIER ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (*Besançon*) ; *Dijon :* M. X... ; *Lille :* M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (*Lyon, Ampère*) ; *Montpellier :* M. DUSSOL (*Montpellier*) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (*Nancy, Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULT (*Rennes*) ; *Strasbourg :* M. EHRIART (*Strasbourg, Kléber*) ; *Maroc :* M. QUEYSANNE (*Casablanca, Lyautéy*) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (*Tunis, Carnot*).

Bulletin de l'Association
des
Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement public

PREMIÈRE PARTIE

**I. Epreuve de Mathématiques
à la Première Partie du Baccalauréat série A**

Circulaire du 9 novembre 1953

(Supérieur, 2^e Bureau)

aux Recteurs

Objet : *Série A.*

J'ai l'honneur d'appeler votre attention sur les dispositions du Décret du 5 juin 1953 qui réconduit, pour les sessions de 1954, les dispositions du Décret du 13 octobre 1952 instituant de nouvelles séries du baccalauréat correspondant aux nouvelles sections de l'Enseignement du Second Degré et de l'Enseignement Technique.

Ce texte maintient, parallèlement à l'institution de la série A', qui comporte obligatoirement une composition de mathématiques à l'écrit, la suppression de la possibilité de choisir une composition de mathématiques à la série A.

En conséquence, le bénéfice du régime transitoire institué par le Décret du 31 mars 1953 ne peut plus être sollicité par les candidats à la série A qui doivent désormais obligatoirement subir une épreuve de langue vivante étrangère à l'écrit.

Aucune dérogation à ces dispositions ne sera accordée.

Je vous serais obligé de bien vouloir assurer la diffusion de la présente circulaire en invitant les chefs d'établissements à la faire lire dans les classes intéressées et à l'afficher dans un emplacement approprié.

Pour le Ministre et par autorisation,
Le Directeur général de l'Enseignement Supérieur :
G. BERGER.

II. Documents officiels

Rapport sur la composition de Mathématiques (classe de Mathématiques) au Concours général des Lycées, Collèges et Ecoles normales en 1953

Le Jury était composé de MM. ROBERT, Inspecteur général, Président ; BOUSQUET, professeur au Lycée Chaptal (Mathématiques supérieures) ; CHAZAL, professeur au Lycée Saint-Louis (classe préparatoire à l'Ecole Normale Supérieure) ; RAMIS, professeur au Lycée Louis-le-Grand (Navale) ; Mlle RANSON, professeur au Lycée de Sèvres ; M. RICHE, professeur au Lycée Saint-Louis (classe préparatoire à l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud).

ANALYSE DU SUJET (1)

La partie I du problème était l'étude des tangentes à une ellipse (E) inscrite dans un parallélogramme MNM'N'.

Paragraphe 1°. — Cas particulier d'un cercle (C).

Le parallélogramme dénoté ici $mm'n'$, est un losange : les côtés mn , $m'n'$ sont tangents à (C) aux points g , g' symétriques par rapport au centre o du cercle. Les diagonales mm' et nn' sont perpendiculaires, le triangle mon est rectangle en o , og est hauteur, d'où la relation $\overline{gm} \cdot \overline{gn} = -go^2 = -r^2$ ou encore $\overline{gm} \cdot \overline{g'n'} = r^2$, car $\overline{gn} = -\overline{g'n'}$.

Ainsi pour toute tangente (telle que mn') à (C) coupant en deux points (tels que m et n') les tangentes à (C) aux points g , g' , le produit des abscisses de ces points comptées sur ces tangentes à partir de g et g' est égal au carré du rayon de (C).

Considérons, en revenant au losange de l'énoncé, une tangente quelconque pp' à (C) coupant mn et $m'n'$ aux points respectifs p , p' ; de ce qui précède il s'ensuit que $\overline{gp} \cdot \overline{g'p'} = r^2$.

Réciproquement, si une droite coupant mn en p_1 et $m'n'$ en p'_1 est telle que la relation $\overline{gp_1} \cdot \overline{g'p'_1} = r^2$ soit vérifiée, la tangente à (C) distincte de p_1g coupe $m'n'$ en un certain point p''_1 tel que $\overline{gp_1} \cdot \overline{g'p''_1} = r^2$; il en résulte que $\overline{g'p''_1} = \overline{g'p'_1}$ et que la droite $p_1p'_1$ est tangente à (C).

En résumé, il faut et il suffit que $\overline{gp_1} \cdot \overline{g'p'_1} = r^2$ pour que $p_1p'_1$ soit tangente à (C).

Au lieu d'employer les abscisses gp et $g'p'$ des points correspondants p , p' , variables avec la tangente pp' considérée, on peut fixer leurs positions à l'aide des rapports respectifs $\frac{\overline{pm}}{\overline{pn}}$, $\frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}}$. Calculons le second en fonction du premier :

$$\overline{p'm'} = \overline{g'm'} - \overline{g'p'} = \frac{r^2}{\overline{gn}} - \frac{r^2}{\overline{gp}} = \frac{r^2(\overline{gp} - \overline{gn})}{\overline{gp} \cdot \overline{gn}} = \frac{r^2 \overline{np}}{\overline{gp} \cdot \overline{gn}}$$

$$\text{De même } \overline{p'n'} = \frac{r^2 \overline{mp}}{\overline{gm} \cdot \overline{gp}} \quad \text{et, par division} \quad \frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}} = \frac{\overline{pn}}{\overline{pm}} \cdot \frac{\overline{gn}}{\overline{gm}}$$

ou, sous une forme plus symétrique, $\frac{\overline{pm}}{\overline{pn}} \cdot \frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}} = \frac{\overline{gm}}{\overline{gn}} = \text{constante (1)}.$

(1) Voir le texte Bulletin n° 157, pages 144, 145 et 146.

Cette relation (1) est nécessaire pour que la droite pp' soit tangente à (C) : si, réciproquement on la suppose vérifiée avec une droite $p_1p'_1$, c'est-à-dire si

$$\frac{\overline{p_1m}}{\overline{p_1n}} \cdot \frac{\overline{p'_1m'}}{\overline{p'_1n'}} = \frac{\overline{gm}}{\overline{gn}} \quad \text{la considération du point } p''_1 \text{ déjà considérée plus haut, tel que}$$

$$\frac{\overline{p_1m}}{\overline{p_1n}} \cdot \frac{\overline{p''_1m'}}{\overline{p''_1n'}} = \frac{\overline{gm}}{\overline{gn}} \quad \text{amène à conclure que } \frac{\overline{p'_1m'}}{\overline{p'_1n'}} = \frac{\overline{p''_1m'}}{\overline{p''_1n'}}$$

c'est-à-dire que p'_1 coïncide avec p''_1 .

En résumé, la relation (1) est nécessaire et suffisante pour que la droite pp' soit tangente à (C).

Paragraphe 2°. — Cas général d'une ellipse (E).

On désigne ici par P et P' les points où une droite (T) coupe les côtés parallèles MN, M'N' du parallélogramme circonscrit à (E).

Considérons l'ellipse (E) comme la projection, sur son plan, d'un cercle (C). Toute tangente à (E) est également la projection d'une tangente déterminée à (C) : au parallélogramme MNM'N' circonscrit à (E) correspond ainsi un certain parallélogramme $mnm'n'$ circonscrit à (C). Les points G et G' sont les projections des points de contact g et g' de mn et $m'n'$ avec (C) ; P et P' sont les projections de certains points p et p' appartenant respectivement à mn et $m'n'$.

Pour que (T) soit tangente à (E), il faut et il suffit que la droite pp' soit tan-

$$\text{gente à (C), c'est-à-dire que } \frac{\overline{pm}}{\overline{pn}} \times \frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}} = \frac{\overline{gm}}{\overline{gn}}.$$

Trois points alignés du plan de (C) et leurs projections sur le plan de (E) cons-

$$\text{tituent deux figures semblables : ainsi } \frac{\overline{pm}}{\overline{pn}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} \quad \frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}} = \frac{\overline{P'M'}}{\overline{P'N'}} \quad \frac{\overline{gm}}{\overline{gn}} = \frac{\overline{GM}}{\overline{GN}}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que (T) soit tangente à (E) est donc :

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} \cdot \frac{\overline{P'M'}}{\overline{P'N'}} = \frac{\overline{GM}}{\overline{GN}} \quad (2).$$

PARTIE II. — On y considère, outre l'ellipse (E), son cercle orthoptique (Ω) et un point S situé sur la sphère ayant ce cercle (Ω) comme grand cercle. s désigne la projection orthogonale de S sur le plan (Q) de (E). Une tangente (T₁) à (E) rencontre nécessairement le cercle (Ω) aux points de rencontre de (T₁) avec les deux tangentes à (E), orthogonales à (T₁) : A, B, désignant ces points, leurs symétriques A', B' par rapport au centre O de (E) appartiennent à (Ω) et le parallélogramme ABA'B' est un rectangle circonscrit à (E) et inscrit dans (Ω).

Paragraphe 1°. — Le point s [intérieur à (Ω), mais non nécessairement à (E)] n'est pas généralement situé sur (T₁) : supposons que s ne soit pas sur (T₁), c'est-à-dire que le plan (ST₁) ne soit pas perpendiculaire au plan (Q) : dans ces conditions la perpendiculaire menée par S au plan (ST₁) coupe le plan (Q) en un certain point t_1 . La droite st_1 , projection de St_1 , est perpendiculaire sur la trace (T₁) [du plan (ST₁) sur (Q)] en un certain point h .

Dans le plan St_1h , le triangle t_1Sh est rectangle en S, la hauteur issue de S étant Ss . D'où la relation $\overline{sh} \cdot \overline{st_1} = -sS^2 = -\varphi^2$ en posant $Ss = \varphi$, que l'énoncé suppose non nul. Le point t_1 est donc inverse du pied h de la perpendiculaire à (T₁) issue de s , dans l'inversion de pôle s et de puissance $-\varphi^2$. Cette puissance est celle de s par rapport à (Ω).

S est situé sur la sphère ayant (Ω) comme grand cercle, sphère dont AA' et

BB' sont diamètres. SA est donc orthogonal à SA', et de même SB est orthogonal à SB'. SA et SB situées dans le plan ST₁ sont orthogonales à la droite St₁.

Il en résulte que SA est perpendiculaire au plan SA't₁ et que SB est perpendiculaire au plan SB't₁.

Le plan SA't₁ est bien défini si t₁ ne coïncide pas avec A' : il en est ainsi si s n'est pas situé sur BA'. Précisons que nous supposons *s non situé sur BA' ou sur AB'*.

Le plan SA't₁ coupe la droite (T₁) en un certain point A'' ; il ne saurait, en effet être parallèle à (T₁), sinon sa normale SA serait orthogonale à (T₁) et s serait situé sur AB', ce qui est exclus. La trace de SA't₁ sur (Q) est A't₁, qui contient donc A'', et qui est orthogonale à SA, et aussi à sa projection sA. Dans le triangle t₁AA'', t₁s et As sont deux hauteurs et s est l'orthocentre. On peut noter aussi que les trois droites SA, SA'', St₁ forment un trièdre trirectangle, puisque chacune des deux droites St₁, SA est perpendiculaire au plan des deux autres.

Le symétrique de s par rapport à (T₁) est situé sur le cercle AA''t₁, d'où résulte la propriété, classique pour l'orthocentre d'un triangle : $\overline{hA} \cdot \overline{hA''} = -\overline{hs} \cdot \overline{ht_1}$ (3). On verrait de même que le plan SB't₁ est bien défini, coupe (T₁) en un certain point B'' aligné avec t₁ et B' et que s est l'orthocentre du triangle t₁BB'', d'où la relation

$$\overline{hB} \cdot \overline{hB''} = -\overline{hs} \cdot \overline{ht_1} \quad (4).$$

Remarque. — Si s est situé sur BA', la première relation définit un point A'' ; dans la seconde, B'' étant rejeté à l'infini sur (T₁), hB devient nul et hB'' infini. On peut considérer que la seconde relation subsiste encore. De même si s est situé sur AB'.

Si s est situé sur (T₁), t₁ est rejeté à l'infini sur sh et l'on voit aussitôt que A'' et B'' sont respectivement confondus avec B et A.

2° Voyons la situation du point t₁ par rapport à l'ellipse (E).

Dans les cas particuliers faisant l'objet de la remarque précédente, t₁ est en A', ou en B', ou à l'infini : t₁ est donc extérieur à (E).

Si h est extérieur, sur (T₁), au segment AB, t₁ est extérieur à la bande de plan comprise entre les parallèles BA', AB', qui sont tangentes à (E) : il est donc impossible que t₁ soit sur l'ellipse ou à son intérieur, l'ellipse étant intérieure à cette bande. t₁ est donc extérieur à (E).

Enfin, si h est intérieur au segment AB, il est intérieur au cercle (Q). Or l'inversion de pôle s et de puissance $-\varphi^2$ n'altère pas le cercle (Q), mais échange ses régions intérieure et extérieure ; elle change, d'autre part h en t₁. t₁ est donc extérieur au cercle orthoptique (Q) de (E) ; à fortiori il est extérieur à (E).

Donc, dans tous les cas t₁ est extérieur à (E) : il s'ensuit qu'on peut mener par t₁ deux tangentes (T₂) et (T₃) à (E). Les points de rencontre de (T₂) avec AB et A'B' sont désignés par t₃ et t'₃ ; les points de rencontre de (T₃) avec AB et A'B' sont désignés par t₂ et t'₂. Avec ces notations le triangle t₁t₂t₃ est circonscrit à l'ellipse (E) et les côtés opposés aux sommets t₁, t₂, t₃ sont respectivement les droites (T₁), (T₂), (T₃).

Nous écarterons tous les cas particuliers où s serait situé sur un côté du rectangle ABA'B' autre que A'B' ; dans ces conditions les points t₁, t₂, t₃ sont à distance finie.

La relation étudiée dans (I, 2°) s'applique ici au rectangle ABA'B' circonscrit à (E) et qui représente un cas particulier du parallélogramme MNM'N'. Rappelons que, pour qu'une droite (T), coupant AB en t et A'B' en t', soit tangente à (E) il faut et il suffit que ces points satisfassent à la relation [transposition de (2)] :

$$\frac{\overline{tA}}{\overline{tB}} \cdot \frac{\overline{t'A}}{\overline{t'B'}} = K$$

K ne dépendant que du rectangle et de (E), mais étant indépendant de t et t'.

Cette relation donne un moyen algébrique de caractériser, par leurs points de rencontre avec AB et A'B', les tangentes (T₂) et (T₃) menées du point t₁ à (E). Pour que la droite (T) passe par t₁, intersection de A''A' et B''B', il faut et il suffit

que
$$\frac{\overline{tA'}}{\overline{tB'}} = \frac{\overline{tA''}}{\overline{tB''}}.$$

En éliminant le rapport $\frac{\overline{tA'}}{\overline{tB'}}$ entre les deux relations qui précèdent, on obtient la condition, nécessaire et suffisante, à laquelle doit répondre t pour que t soit un des points t₂ et t₃ :

$$\frac{\overline{tA}}{\overline{tB}} \times \frac{\overline{tA''}}{\overline{tB''}} = K \quad \text{soit} \quad \overline{tA} \cdot \overline{tA''} - K \overline{tB} \cdot \overline{tB''} = 0 \quad (5).$$

(T₁) étant orientée, posons $\overline{ht} = x$, d'où $\overline{tA} = \overline{hA} - x$, $\overline{tA''} = \overline{hA''} - x$, $\overline{tB} = \overline{hB} - x$, $\overline{tB''} = \overline{hB''} - x$. La condition (5) se traduit par une équation du second degré en x.

$$(\overline{hA} - x)(\overline{hA''} - x) - K(\overline{hB} - x)(\overline{hB''} - x) = 0.$$

Le coefficient de x² dans le premier membre est 1 - K. Le coefficient constant est $\overline{hA} \cdot \overline{hA''} - K \overline{hB} \cdot \overline{hB''}$, c'est-à-dire, en tenant compte des relations (3) et (4) établies plus haut

$$-\overline{hs} \cdot \overline{ht_1} (1 - K).$$

L'équation du second degré admettant comme racines $x_2 = \overline{ht_2}$, $x_3 = \overline{ht_3}$, d'après sa signification, le produit x₂x₃ de ces racines s'exprime par le quotient des coefficients précédents : 1 - K est non nul, puisqu'il y a deux racines. Ainsi

$$x_2 x_3 = -\overline{hs} \cdot \overline{ht_1}.$$

Soit

$$\overline{ht_2} \cdot \overline{ht_3} = -\overline{hs} \cdot \overline{ht_1} \quad (6).$$

Le triangle t₁t₂t₃ a un orthocentre s' situé sur la hauteur t₁h, défini par la relation $\overline{ht_2} \cdot \overline{ht_3} = -\overline{hs'} \cdot \overline{ht_1}$, qui, par comparaison avec (6) donne [ht₁ étant non nul] $\overline{hs'} = \overline{hs}$. s' coïncide avec s. Donc : le triangle t₁t₂t₃ a comme orthocentre le point s, projection de S sur le plan (Q).

Dans le triangle hSt₁, qui est rectangle en h, remarquons que $hS^2 = \overline{hs} \cdot \overline{ht_1}$.

La relation (6) s'interprète donc encore par $\overline{ht_2} \cdot \overline{ht_3} = hS^2$, et prouve que le triangle t₂St₃ est rectangle en S : ainsi St₂ et St₃ sont orthogonales, et l'on sait déjà que chacune de ces deux droites, étant contenue dans le plan ST₁, est orthogonale à St₁. Donc le trièdre dont les arêtes sont St₁, St₂, St₃ est trirectangle. Ou encore, en considérant ses faces qui sont les plans (ST₁), (ST₂), (ST₃) : les trois plans (ST₁), (ST₂), (ST₃) sont deux à deux perpendiculaires.

A toute tangente (T₁) à (E) correspondent deux autres tangentes déterminées (T₂) et (T₃) à (E) et le point fixe S [quel que soit S d'ailleurs, sur la sphère de grand cercle (Q)] est tel que les plans déterminés par S et les droites (T₁), (T₂), (T₃) soit trirectangle.

Remarque. — On voit sans peine que les cas réservés dans l'étude précédente, s'ils se présentent, ne mettent pas en défaut la conclusion précédente : il s'y présente seulement le fait que le trièdre trirectangle y a une arête parallèle au plan (Q).

(T₁), (T₂), (T₃) forment un groupe symétrique de trois tangentes à (E), c'est-à-dire que l'échange de deux tangentes ne modifie pas globalement ce groupe.

PARTIE III. — Elle consiste dans l'étude du lieu du point t₁ (ou t₂ ou t₃), car ces lieux sont, d'après ce qui précède, indiscernables.

Pour abréger, nous désignons par t l'un quelconque t_i des sommets t₁, t₂, t₃ (i = 1, 2, 3) et par (T) le côté opposé (T_i) du triangle t₁t₂t₃ ; h continue à désigner,

comme on l'a fait dans le cas où $i = 1$, la projection de s sur la droite (T). Rappelons que $\overline{sh} \cdot \overline{st} = -\rho^2$.

1° (E) peut être considérée comme projection d'un cercle sur le plan (Q). En d'autres termes, le cylindre admettant (E) comme section droite est coupé par certains plans (II) suivant des cercles. Il suffit ici de caractériser leurs directions, tout plan parallèle à un plan (II) étant aussi, *à priori*, un plan (II) : ou aussi les directions de droites normales aux plans (II), et, pour fixer les idées, les droites (F) passant par s et perpendiculaires aux plans (II).

Si un cercle a comme projection orthogonale sur (Q) l'ellipse (E), un de ses diamètres est projeté suivant le grand axe Ox de (E), et il est parallèle à (Q) : ainsi les plans (II) sont parallèles à Ox . L'angle aigu θ du plan du cercle avec (Q)

est tel que $\cos \theta = \frac{b}{a}$ (7). Donc les droites (F) sont orthogonales à Ox . Soit Oz la perpendiculaire élevée en O au plan (Q) ; une droite (F) fait avec Oz un angle aigu égal à θ . Il existe deux droites (F), symétriques par rapport au plan (Q) situées dans le plan parallèle au plan yOz et passant par s et leur angle commun θ avec Oz [complémentaire de l'angle de ces droites avec (Q)] est défini par (7), et

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$: réciproquement, il est immédiat que tout plan perpendiculaire à une telle droite contient un cercle, dont le centre est le point d'intersection de ce plan avec Oz , dont le rayon est a et qui est projeté sur (Q) suivant l'ellipse (E) ; car la projection sur (Q) de ce cercle est une ellipse qui a les mêmes axes, en grandeur et en position, que (E).

Transformons une telle droite (F) par une rotation d'axe sS (parallèle à Oz) et d'un angle droit, le sens de rotation étant quelconque ; on obtient une droite (F_1) passant par s . Il n'existe que deux telles droites (F_1), car la symétrie par rapport à la droite sS et la symétrie par rapport au plan (Q) produisent le même effet sur une telle droite (F_1). Elle est orthogonale à Oy : autrement dit la parallèle à (F_1) passant par O est dans le plan xOz . Cette parallèle fait avec (Q) un angle égal à celui que (F) forme avec (Q), qui vaut donc $\frac{\pi}{2} - \theta$.

Or, on sait que par (Q) passent deux cylindres de révolution, de rayons égaux à b , dont les axes passant par O sont dans le plan xOz : leur épure classique montre que l'angle aigu d'un tel axe avec Ox , c'est-à-dire son angle avec (Q) a un sinus égal à $\frac{b}{a}$: cet angle est donc égal à $\frac{\pi}{2} - \theta$.

Cette étude montre que les droites (F_1), symétriques par rapport au plan (Q) sont parallèles aux axes de ces cylindres de révolution, ou, si l'on préfère, à leurs génératrices.

2° (T) est tangente à (E) en un point que nous désignerons par μ . (F_1) ayant été choisie, considérons le cylindre de révolution contenant (E) et de génératrices parallèles à (F_1). D'après le théorème de Dandelin, les foyers Φ et Φ' de (E) sont les points de contact avec le plan (Q) des deux sphères inscrites dans ce cylindre qui sont tangentes au plan (Q) : soit (Σ) celle de ces sphères qui passe par Φ . La parallèle à (F_1) passant par μ est génératrice du cylindre et c'est une tangente à la sphère (Σ) en un point M de cette génératrice. Le plan tangent en M à (Σ) est aussi le plan tangent au cylindre le long de μM , et contient donc la tangente (T) à (E) au point μ .

On voit que par (T) passent deux plans tangents à (Σ), savoir le plan (Q) et le plan (ΓM), dont les points de contact respectifs sont Φ et M . Ils sont évidemment symétriques par rapport au plan médiateur du segment ΦM . La droite (T) est donc

dans ce plan médiateur : la symétrie par rapport à ce plan échange Φ et M et n'altère pas le point μ .

Donc l'angle (aigu ou droit) de (T) avec la droite $\mu\Phi$ est égal à l'angle (aigu ou droit) de (T) avec la droite μM ; autrement dit à l'angle α des droites (T) et (F_1) , en supposant $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Ce raisonnement s'applique aussi au foyer Φ' et d'ailleurs (T) forme des angles égaux, *à priori*, avec $\mu\Phi$ et $\mu\Phi'$.

Calculons $\sin \alpha$, en considérant que α est angle des rayons vecteurs focaux $\mu\Phi$ et $\mu\Phi'$ du point μ de (E) avec la tangente (T) , d'après ce qui précède : en appelant f et f' les distances respectives de Φ et Φ' à la droite (T) , écrivons que

$$\sin \alpha = \frac{f}{\mu\Phi} = \frac{f'}{\mu\Phi'} = \frac{f+f'}{\mu\Phi + \mu\Phi'}$$

K désignant la projection orthogonale de O sur (T) , O est le milieu de $\Phi\Phi'$, segment situé tout entier d'un même côté de O , d'où résulte que $f + f' = 2OK$. D'autre part $\mu\Phi + \mu\Phi' = 2a$. Ainsi on obtient $\sin \alpha = \frac{OK}{a}$ (8).

Calcul de la distance δ du point t , qui engendre le lieu demandé (L) , à la droite fixe (F) .

On voit immédiatement que $\delta = st \sin(st, F)$ (st, F) étant un angle aigu ou droit.

La rotation d'un angle droit autour de sS , qui transforme (F) en (F_1) , transforme d'autre part st en une parallèle à (T) , puisque st est orthogonale à (T) . Donc $\sin(st, F) = \sin(T, F_1)$ [(T, F_1) étant aigu ou droit], la rotation conservant les angles.

Le second membre de cette relation, $\sin \alpha$, peut être remplacé, d'après (8), par $\frac{OK}{a}$. Donc $\delta = st \cdot \frac{OK}{a}$ (9).

3° En suivant les indications du texte, commençons par déterminer le lieu (L) dans l'hypothèse où s est confondu avec O .

Alors sh est confondu avec OK . Comme $st.sh = \varphi^2$, actuellement égal à R^2 [R rayon de (Ω) ; on sait que $R^2 = a^2 + b^2$] la relation (9) devient $\delta = \frac{a^2 + b^2}{a}$.

La distance de t à (F) est constante. t appartient donc à la section, par le plan $(\mathcal{Q})$, du cylindre de révolution d'axe (OF) et de rayon $\frac{a^2 + b^2}{a}$; cette section est une ellipse (ϵ) de centre O .

Réciproquement, à un point τ de cette ellipse (ϵ) correspondent deux tangentes (T) à (E) ayant la direction perpendiculaire au vecteur $O\tau$, et, par conséquent, deux points t du lieu (L) , dont chacun est associé à la projection K de O sur (T) par la relation $OK \cdot Ot = -(a^2 + b^2)$; ces deux points sont nécessairement sur l'ellipse (ϵ) . Comme la droite $O\tau$ ne coupe (ϵ) qu'en deux points, l'un des points t considérés coïncide avec τ et τ appartient au lieu (L) . On peut conclure alors à l'identité du lieu (L) avec l'ellipse (ϵ) .

Cette ellipse a , *à priori*, comme axes de symétrie Ox et Oy : le demi-axe A porté sur Ox est égal au rayon $\frac{a^2 + b^2}{a}$ du cylindre. Pour calculer le demi-axe B de (ϵ) porté sur Oy , il suffit de se rappeler les définitions de (F) et de θ ; on voit que $B = \frac{a^2 + b^2}{a} \cdot \frac{\cos \theta}{1}$, d'où, d'après (7) $B = \frac{a^2 + b^2}{b}$.

Observer que A est le demi-petit axe, B le demi-grand axe de (ϵ) : $A < B$, et

que $\frac{A}{B} = \frac{b}{a}$: les deux ellipses (E) et (L) sont semblables et pourraient être rendues homothétiques par rotation d'un angle droit, de l'une d'elles, autour de Oz.

4° Supposons maintenant s distinct de O : appelons (D) la polaire de s par rapport au cercle (Ω) : elle est perpendiculaire à la droite Os en un point O', tel que $\overline{Os} \cdot \overline{OO'} = R^2$, ce qui fait connaître OO', puisque $Os \neq O$.

Le plan polaire de O' par rapport à la sphère de grand cercle (Ω) est perpendiculaire à Os en s , donc contient le point S de cette sphère ; la droite O'S est tangente à cette sphère en S, ou encore le triangle OSO' est rectangle, en S : on en déduit la relation, entre vecteurs de l'hypoténuse OO', $\overline{sO} \cdot \overline{sO'} = -sS^2 = -\varphi^2$.

La comparaison entre cette relation et la suivante : $\overline{sh} \cdot \overline{st} = -\varphi^2$ montre que $\overline{sO} \cdot \overline{sO'} = \overline{sh} \cdot \overline{st}$; les points O, O', h , t , sont sur un même cercle, ce qui équivaut, comme il est classique, au fait que les triangles shO et sO't sont semblables.

La similitude (indirecte) qui transforme ainsi s en s , h en O', O en t transforme la droite (T) perpendiculaire à sh en h en la perpendiculaire à sO' en O', savoir la droite (D). Le rapport de cette similitude est donc le rapport de la distance de t à (D) à la distance de O à (T), soit $\frac{d}{OK}$, en appelant d la distance de t à (D).

Ce rapport de similitude est, d'autre part, égal à $\frac{st}{sO}$. D'où la relation

$$\frac{d}{OK} = \frac{st}{sO} \quad (10).$$

Éliminons st entre les relations (9) et (10) : ceci donne finalement $\frac{\delta}{d} = \frac{sO}{a}$ (11) OK disparaissant, en même temps, dans le résultat. Le second membre de (11) est une constante. Le rapport des distances des points du lieu (L) aux droites (F) et (D), dont la seconde seule est dans le plan ($\mathcal{Q}$), est égal à $\frac{sO}{a}$. Soit (L') le lieu des points du plan ($\mathcal{Q}$) dont le rapport des distances à (F) et à (D) est égal à $\frac{sO}{a}$. Tout point de (L) appartient à (L').

Réciproquement à un point τ du lieu (L') correspondent deux tangentes (T) à (E) ayant la direction perpendiculaire au vecteur $s\tau$ et par conséquent deux points t du lieu (L) dont chacun est associé à la projection h de s sur (T) par la relation $\overline{sh} \cdot \overline{st} = -\varphi^2$. La relation (9) $\delta = st \cdot \frac{OK}{a}$, qui ne reposait que sur la tangence de (T) à (E), et non sur un choix spécial de t , s'applique au point τ : nous écrirons pour plus de précision $\delta(\tau) = s\tau \cdot \frac{OK}{a}$ (9').

Par hypothèse, τ appartenant à (L') : $\frac{\delta(\tau)}{d(\tau)} = \frac{sO}{a}$ (11').

De (9') et (11'), par élimination de $\delta(\tau)$, résulte $\frac{s\tau}{sO} = \frac{d(\tau)}{OK}$.

Par hypothèse t appartient à (L), donc, d'après (10) $\frac{st}{sO} = \frac{d(t)}{OK}$.

La comparaison conduit à $\frac{s\tau}{d(\tau)} = \frac{st}{d(t)}$: le point τ et chacun des deux points t lui correspondant appartiennent, d'une part, à la droite $s\tau$, et d'autre part au lieu des points dont le rapport des distances à s et à D est $\frac{s\tau}{d(\tau)}$ (conique de foyer s).

Une telle conique et une telle droite n'ont au plus que deux points communs, s n'étant pas sur D (conséquence du fait que $\varphi \neq 0$) : nécessairement τ coïncide avec l'un des deux points t : tout point de (L') appartient à (L) .

On peut maintenant conclure à l'identité des lieux (L) et (L') . Ainsi (L) est identique au lieu géométrique des points du plan $(\mathcal{Q})$ dont le rapport des distances aux droites (F) et (D) est égal à $\frac{sO}{a}$.

5° Etude de la projection orthogonale (Γ) de (L) sur un plan (Π) , perpendiculaire à (F) . — Par (D) passe un plan (U) déterminé parallèle à (F) . La distance mk d'un point quelconque m du plan $(\mathcal{Q})$ à la droite (D) est proportionnelle à la distance ml de m à ce plan (U) : car le triangle mlk rectangle en l donne la relation

$ml = mk \cos \beta$ (12) où β est l'angle $\widehat{km\hat{l}}$. Cet angle est indépendant de m : c'est l'angle aigu de la droite Os (parallèle à mk) avec une normale au plan (U) .

Ceci posé, projetons la courbe (L) sur un plan (Π) déterminé et perpendiculaire à (F) en un point σ : le plan (U) est le plan projetant la droite (D) sur le plan (Π) et son intersection (Δ) avec (Π) est la projection de (D) sur (Π) . La projection de m est un point n de (Π) .

Pour que n appartienne à la projection (Γ) de (L) il faut et il suffit que m appartienne à (L) , c'est-à-dire que $\frac{\delta(m)}{d(m)} = \frac{sO}{a}$ d'après la relation (11) caractéristique, dans $(\mathcal{Q})$, des points de (L) .

$d(m)$ est la distance mk de m à (D) , qui d'après (12), est égale à $\frac{ml}{\cos \beta}$; la condition devient $\frac{\delta(m)}{ml} = \frac{sO}{\cos \beta} \cdot \frac{1}{a}$.

$\delta(m)$ distance de m à (F) se projette en vraie grandeur sur (Π) selon la distance de n à σ , soit $\delta(m) = n\sigma$.

ml distance de m au plan (U) , perpendiculaire à (Π) se projette en vraie grandeur sur (Π) selon la distance $n\lambda$ de n à (Δ) .

La condition s'écrit $\frac{n\sigma}{n\lambda} = e$ (13) en posant $e = \frac{sO}{\cos \beta} \cdot \frac{1}{a}$ (constante). C'est dire que la projection (Γ) de (L) sur (Π) est une conique de foyer σ [trace de la droite (F) sur (Π)], de directrice (Δ) et d'excentricité e .

s n'est pas situé sur D puisque $s\overline{O} \cdot s\overline{O}' = -\varphi^2$ et qu'on suppose $\varphi \neq 0$, d'où certainement $s\overline{O}' \neq 0$: donc σ n'est pas sur (Δ) : (Γ) est une conique proprement dite, ellipse, hyperbole ou parabole selon que $e < 1$ ou $e > 1$ ou $e = 1$.

Discutons ces éventualités selon la position de s dans $(\mathcal{Q})$: transformons à cet effet l'expression trouvée pour e . Les perpendiculaires Os et sS au plan $(\mathcal{Q})$ élevées en O et s coupent le plan (Π) en des points O_1 et s_1 . Os peut être considéré comme la projection orthogonale du segment O_1s_1 sur le plan $(\mathcal{Q})$. O_1s_1 est orthogonal à (F) , puisque situé dans le plan (Π) , et O_1s_1 est orthogonal à (D) , puisque contenu dans le plan sOs qui est perpendiculaire à (D) .

O_1s_1 est donc une perpendiculaire au plan (U) qui est parallèle aux directions de droites (D) et (F) . L'angle Os, O_1s_1 est ainsi l'angle β considéré plus haut. Os est projection orthogonale de O_1s_1 sur la droite Os , donc $Os = O_1s_1 \cos \beta$ et $\frac{sO}{\cos \beta} = O_1s_1$.

L'expression de e devient $e = \frac{O_1s}{a}$ (14).

Ce rapport est égal, inférieur, ou supérieur à 1, selon que, dans le plan (Π) , le point s , est situé sur le cercle de centre O_1 et de rayon a , intérieur ou extérieur à

ce cercle. Or ce cercle est précisément projeté orthogonalement sur (Q) suivant l'ellipse (E) . D'où les résultats suivants :

Lorsque s est situé sur (E) , (Γ) est une parabole : lorsque s est intérieur à (E) , (Γ) est une ellipse ; lorsque s est extérieur à (E) [soit dans la région comprise entre (E) et (Q)] (Γ) est une hyperbole.

On ne demandait pas d'établir que, dans le cas général, le lieu (L) est lui-même une conique, ce que l'on pressent ; mais la démonstration ne serait plus aussi élémentaire. On aurait pu encore discuter la nature de (Γ) en cherchant si cette courbe a des points à l'infini, ou, ce qui revient au même, si (L) a des points à l'infini. Rappelons qu'on a vu déjà que t n'est rejeté à l'infini que si $sh = 0$, c'est-à-dire s situé sur (Γ) : trouver les points à l'infini de (L) , se ramène à mener du point s les tangentes à (E) , et cela confirme les résultats précédents.

Le lieu (L) peut-il être un cercle ?

Il est nécessaire que (Γ) soit une ellipse, donc que s soit, d'abord, intérieur à (E) . Cette restriction étant supposée remplie, il est nécessaire et suffisant pour que (L) soit un cercle, que le cylindre de section droite (Γ) soit coupé par le plan (Q) suivant un cercle : d'après une étude déjà faite dans (III, 1°) il y a pour cela deux conditions :

1° que l'axe focal (ou grand axe) de Γ soit parallèle à (Q) ;

2° que l'angle θ des plans (Π) et (Q) [voir III, 1°] ait son cosinus égal au rapport du petit au grand axe de (Γ) .

Or $\cos \theta = \frac{b}{a}$. Cela revient à dire que (Γ) soit semblable à (E) .

La première condition exige que la directrice (Δ) de (Γ) soit orthogonale à la direction du plan (Π) qui est en même temps une direction du plan (Q) : c'est la direction de Ox . (Δ) est la projection de (D) sur (Π) : pour que l'angle de Ox avec (Δ) soit droit, il faut et il suffit que l'angle de Ox avec (D) soit aussi droit ; enfin (D) étant orthogonal, dans (Q) , à la droite Os , il faut et il suffit que s soit situé sur la droite Ox .

La seconde condition peut s'exprimer en égalant les excentricités de (Γ) et de (E) , d'où d'après la formule (14) $\frac{O_1s_1}{a} = \frac{c}{a}$ c étant la demi-distance focale de (E) . Mais si s est sur Ox $Os = O_1s_1$. Il vient alors $Os = c$; s doit être l'un des foyers de (E) .

Réciproquement si s est pris en Φ ou Φ' [foyers de (E)], les conditions requises pour que (L) soit un cercle sont toutes remplies.

On le contrôle très simplement en considérant (par exemple pour s confondu avec Φ) les triangles $t_1t_2t_3$ inscrits dans (L) , circonscrits à (E) et ayant, ici, pour orthocentre Φ .

Le symétrique de Φ par rapport à un des côtés (T_1) , (T_2) , (T_3) d'un tel triangle est, d'une part, sur le cercle $t_1t_2t_3$; d'autre part, Φ étant foyer de (E) , ce symétrique est sur le cercle directeur de (E) de centre Φ' et de rayon $2a$. Les trois symétriques en question ne déterminent qu'un seul cercle et t_1 , t_2 , t_3 appartiennent donc au cercle directeur précédent. Donc, lorsque s est en l'un des foyers de (E) , le lieu (L) se confond avec le cercle directeur de (E) dont le centre est l'autre foyer.

RESULTATS GENERAUX

Le nombre de concurrents était inférieur d'un cinquième au nombre de ceux qui avaient été présentés en 1952. Ce n'est pas là, cependant, la seule différence résultant de la comparaison des deux concours consécutifs. Les correcteurs, sur-

veillant à Paris l'épreuve, s'étaient d'emblée rendus compte que le concours de 1954 serait nettement moins bien réussi que ceux des deux années précédentes.

La première correction des compositions, effectuée avec un barème initial provisoirement adopté par le jury et ne faisant jouer qu'un faible rôle, relatif, à la partie I, a montré que la grande majorité des copies se groupaient au-dessous de 5 sur 20 ; une tête, comparablement réduite, se manifestait entre 5 et 8, terminée par une pointe très effilée, d'une dizaine de compositions, s'étirant jusqu'à 13.

Or ce n'était pas du tout la physionomie des résultats de 1952, beaucoup plus homogènes, avec une cotation provisoire progressive peu différente de celle adoptée cette année.

L'explication de cette anomalie a été facile à déceler : la partie I, considérée *a priori* par tous les correcteurs comme un prélude n'offrant pas la moindre difficulté, a arrêté beaucoup d'élèves, fait perdre du temps à ceux qui l'ont finalement dominée, et, seule, la pointe d'avant-garde, formée des meilleurs concurrents, a franchi ce cap préliminaire sans s'y arrêter longuement.

Le texte de cette partie I n'indiquait pas la relation $\frac{\overline{pm}}{\overline{pn}} \cdot \frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}} = \frac{\overline{gm}}{\overline{gn}}$
(voir I, 1°),

mais la donnait à *découvrir*, par transformation, précisait-on, de la relation $\overline{gp} \cdot \overline{g'p'} = r^2$ entre les points p et p' .

Il est surprenant qu'une nuance aussi minime dans les indications données aux élèves, ait eu une telle répercussion. Ceux qui n'ont pas du tout réfléchi à la

demande faite, qui consistait à évaluer $\frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}}$ à l'aide de $\frac{\overline{pm}}{\overline{pn}}$ et de constantes, ont été

tout de suite handicapés ; ils auraient pu en suivant la lettre du texte exprimer $\overline{gp}$ à l'aide de $\frac{\overline{pm}}{\overline{pn}}$ et $\overline{g'p'}$ à l'aide de $\frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}}$ et porter les expressions obtenues dans la condition $\overline{gp} \cdot \overline{g'p'} = r^2$.

Ce calcul avait l'avantage de fournir la relation cherchée comme condition *nécessaire et suffisante* pour que pp' soit tangente au cercle. Il n'est pas très long et on le rencontre dans bien des copies mais présenté avec quelle lourdeur ! On n'a

pas l'idée de l'abréger en posant $\frac{\overline{pm}}{\overline{pn}} = \lambda$, $\frac{\overline{p'm'}}{\overline{p'n'}} = \lambda'$; d'autre part, les formules de

géométrie analytique comme $\overline{gp} = \frac{\overline{gm} - \lambda \overline{gn}}{1 - \lambda}$ ne sont pas familières aux élèves de

Mathématiques. Ce qu'il faut tirer comme conclusion de cette mésaventure, c'est que nos élèves sont beaucoup trop dressés à démontrer des résultats fournis par le professeur ou le livre ; ils arrivent alors par tous les moyens au succès. Mais ils se posent trop rarement la question : *Comment aurais-je pu trouver ce résultat* si la question posée ne l'eût pas mentionné, se contentant d'aiguiller le chercheur dans une voie déterminée d'étude ?

Dans tout le restant du problème, sauf les dernières parties de III, le texte guidait sans cesse les concurrents, et ils se sont bien trouvés de cette tutelle ; ainsi les paragraphes (II, 1°) et (III, 1°) n'ont pas arrêté les candidats.

Dans (II, 2°), pour établir, sans calcul, que t_1 est extérieur à l'ellipse (E), il s'est produit ce fait que ce ne sont pas toujours les meilleurs candidats qui l'ont justifié correctement. On s'est en général servi de la remarque : si h est intérieur à

(Ω), t_1 est extérieur à (Ω), et *à fortiori* à (E) : mais on a souvent oublié de se demander si h est toujours sur le segment AB.

L'équation du deuxième degré n'a pas gêné ceux des candidats qui avaient établi la relation demandée en (I, 1°). Regrettons cependant, dans ce passage, une grossière faute d'homogénéité dans l'une des meilleures copies.

La partie III a joué son rôle pour départager les meilleurs, ce que l'on avait prévu. C'est surtout l'égalité angulaire (résultant cependant d'une simple rotation) qui a définitivement arrêté de nombreux candidats ; mais l'examen de la figure de Dandelin, qui s'introduisait dans (III, 2°), nous a valu quelques démonstrations très élégantes.

Dans (III, 4°) la formule $d.Os = OK$ *st* n'a été établie que par deux concurrents. A ce stade de la compétition, les candidats savent qu'un résultat relatif à un lieu géométrique implique l'étude d'une condition nécessaire et suffisante. On n'en apprécie pas moins la franchise de celui qui écrit : « Il y aurait lieu de démontrer la réciproque. »

Cette démonstration, reconnaissons-le, avec la même sincérité, eût exigé un peu plus de temps pour être mise au point.

On a encore justifié que (I) est une conique, mais la discussion de sa nature et la recherche des cas où (L) est un cercle ne sont étudiées dans aucune copie.

Les défauts de mise au point les plus fréquemment signalés sont la confusion entre « condition nécessaire » et « condition nécessaire et suffisante », celle aussi entre $gp.g'p'$ et $gp.g'p'$.

Le fait que la section plane triangulaire d'un trièdre trirectangle a son orthocentre confondu avec la projection orthogonale du sommet du trièdre sur ce plan semble familier à beaucoup de candidats, qui n'en reprennent pas, bien souvent, la démonstration : cela ne dispense pas de précisions justificatives, pour passer, inversement, du fait que s est orthocentre de $t_1t_2t_3$, au fait que le trièdre (St_1, St_2, St_3) est trirectangle.

Certains emploient l'expression de « contre-projection » dans un sens qui a paru très obscur. Il semble qu'on puisse sans inconvénient se passer pratiquement de ce néologisme, bon tout au plus dans une étude systématique de l'opération ponctuelle inverse d'une projection orthogonale.

D'autres affirment qu'une ellipse est la projection de son cercle principal, absurdité, ou confusion, dans leur esprit, de la projection et de l'affinité.

La présentation et l'orthographe sont convenables à de rares exceptions près : les mots les plus écorchés sont : hypoténuse et losange.

Treize compositions ont été retenues pour une seconde lecture. Il a été possible de décerner deux prix et quatre accessits : les moyennes (sur 20) sont 13,7 et 13,2 pour les prix ; 11,6, 11, 10,6 et 10,3 pour les accessits. La première copie non retenue pour une récompense est fort éloignée des précédentes (moyenne 8,5) ; la dernière des treize compositions lues par tous les correcteurs a la moyenne 6,8.

La copie classée première est d'une rédaction pleine de netteté et de probité : nous eussions désiré son impression au *Bulletin Officiel* ; mais, pour des raisons de place, il ne fut pas donné suite à notre projet.

Sur les six concurrents primés, quatre se retrouvent comme lauréats du Concours général de Physique.

Il est rare dans les annales du Concours général, que la sélection des candidats récompensés soit aussi aisée, et, d'après ce qui précède, probante. Ainsi la rédaction peu explicite du texte, qui est à l'origine de l'insuccès de l'épreuve chez la masse des concurrents, aura finalement contribué au bon choix des meilleurs.

Tous les lauréats sont élèves de lycées ; mais il n'est pas douteux que certains, comme le premier prix du Concours de Première en 1952, et qui était élève d'un collège, ont été ainsi conduits à achever leur scolarité secondaire dans un lycée. Le

premier prix du concours de Mathématiques en 1953 avait obtenu en 1952 un deuxième accessit au concours de Première.

La concordance de tels résultats, dans des épreuves qui portent, en somme, sur la totalité des programmes des classes, à dominante scientifique, préparant au Baccalauréat, donne grande confiance, non seulement dans la vertu éducative des mathématiques, mais dans la valeur des maîtres qui ont formé tous ces jeunes gens à la réflexion, à l'observation, aux qualités de composition, d'ordre et de méthode.

L'émulation introduit une note humaine, dont on ne saurait exagérer le prix, dans le travail que nous exigeons des jeunes gens, qui, certes, ne sont pas placés tous dans des considérations comparables, à âge égal, dans une compétition de ce genre : certains ont pu ne « démarrer » que d'une manière relativement récente, tous n'ont pas bénéficié des éléments de culture réputés les plus formateurs, ou d'une ambiance permettant une activité intellectuelle désintéressée. Le but du Concours général n'est pas de distinguer les uns des autres, mais de mettre en évidence la synthèse des efforts du corps enseignant et des élèves. Il ne fait aucun doute que la véritable émulation consiste, pour chacun, et avant tout, à se dépasser soi-même.

P. ROBERT,

Inspecteur général de l'Instruction publique.

Certificat d'Aptitude au professorat de l'Enseignement du Second degré

(Ancien régime)

Mathématiques

(SESSION 1953)

Rapport de M. l'Inspecteur général ROBERT, Président du Jury

ÉPREUVES PRATIQUES

Les épreuves pratiques du C.A.P.E.S. ancien régime, pour les stagiaires achevant leur seconde année de stage pédagogique, ont été passées, au cours de 1953, dans des conditions semblables à celles des années précédentes. Un jury, présidé par un Inspecteur général de mathématiques, qui a désigné d'avance ses deux assesseurs, assiste, pendant une demi-journée, à deux classes d'une heure dirigées par le candidat et faisant partie de son service normal de professeur stagiaire. Ce jury délibère ensuite, prend connaissance des indications fournies par le chef d'établissement et les conseillers pédagogiques chargés, au cours de l'année terminale du stage, et de celle qui l'a précédée, de la tutelle pédagogique du candidat. À la suite de la visite du jury dans les classes du candidat, le jury s'entretient avec lui de sa manière d'enseigner. Après avoir pris connaissance de tous les documents capables de l'éclairer, le jury décide, soit d'autoriser le candidat à subir les épreuves théoriques en le proclamant admis aux épreuves pratiques, soit de lui refuser cette autorisation.

La mention très bien, bien, assez bien ou passable, attribuée aux candidats admis, n'est définitivement arrêtée qu'après l'assemblée de la Commission nationale statuant sur les propositions des jurys régionaux.

25 candidats ont subi les épreuves pratiques, dont 24 stagiaires d'enseignement et un adjoint d'enseignement titulaire autorisé à y prendre part. Tous ont été déclarés admis aux épreuves pratiques, 3 avec mention très bien, 7 avec mention bien, 12 avec mention assez bien et 3 avec mention passable.

15 candidates ont subi les épreuves pratiques (toutes stagiaires d'enseignement) ; toutes ont été admises, 3 avec mention très bien, 6 avec mention bien, 6 avec mention assez bien.

Ces résultats prouvent, au point de vue pédagogique, le bien-fondé de l'institu-

tion, et les jurys ont constaté qu'après la seconde année de stage, les inexpériences relevées à l'actif des concurrents par leur conseiller pédagogique de première année, se sont atténuées ou ont disparu. La bonne tenue, l'énergie, le zèle et la pratique d'un enseignement efficace sont signalés par les rapports des présidents de jurys régionaux, qui ne comportent que de rares réserves. Ce fait est à l'éloge des intéressés, mais atteste aussi le dévouement et la compétence des conseillers pédagogiques qui les ont formés. Avec les chefs d'établissement et les collègues directs des stagiaires, un travail hautement profitable a été par eux accompli et il n'est pas douteux que les professeurs issus de ce mode de recrutement atteindront, dès leurs débuts, à une maîtrise pédagogique qui n'est pas aussi commune chez les licenciés abordant l'enseignement sans autre guide que leur expérience lointaine d'élève.

Certes, il est encore, dans la conduite des classes, des tempéraments un peu timides ou qui ont pu être mis en défiance par les difficultés des premiers contacts avec les élèves. Souvent aussi, les stagiaires déterminent le choix, qu'ils effectuent librement, de telle classe où ils subissent une épreuve, pour des raisons affectives qui ne font pas intervenir le programme de la classe : on redoute d'affronter l'inspection dans une classe faible ou peu vivante.

Cette observation tend à confirmer ce que le rapport général de ce concours a signalé avec force l'an dernier : les épreuves pratiques renseignent mal sur les connaissances des candidats, si révélatrices qu'elles puissent être quant à leurs dons pédagogiques.

L'attribution de la mention par le jury n'est ni rapide, ni facile : car les deux leçons peuvent éclairer deux aspects différents de la personnalité du stagiaire en lui permettant de manifester des qualités de divers ordres.

Une de ces leçons a toujours été plus particulièrement employée à la correction d'un devoir, réellement rédigé par les élèves. Il a été relevé que bien des stagiaires, à ce propos, savent plutôt les critiquer que les encourager, ou, du moins, croient bien faire en multipliant des recommandations excellentes, mais banales, à propos de la présentation matérielle des copies par exemple. Si ces conseils sont neufs, ils sont tardifs en pleine année scolaire. S'ils sont répétés réellement chaque semaine, on a par contre le sentiment qu'ils n'ont pas porté. Trop d'insistance amène l'auditoire à se contracter et a souvent empêché le maître de terminer sa correction de devoir à la fin de la séance.

Les petites réserves qu'appelle le fond même de l'enseignement donné semblent provenir de préjugés que les jeunes professeurs ont conservé du temps où ils étaient élèves : ainsi les nuances du langage décèlent, dans leurs dires, une hiérarchie des tâches logiques du raisonnement : on « démontre » une proposition ; on « énonce la » réciproque, au mieux ; on « regarde » si elle est vraie. Dans un problème on « vérifierait » que la solution trouvée convient aux exigences du texte : là il est rare qu'on dépasse le conditionnel.

Quant au désir de rendre plus naturelle telle démonstration qui se trouve dans un manuel, il est beaucoup trop rare. A ne pas faire cette intéressante tentative devant une classe, on tombe dans un conformisme d'où ne sortira rien d'intéressant lors des épreuves orales du concours théorique.

EPREUVES THEORIQUES

Le jury national du C.A.P.E.S., ancien régime (section mathématiques, hommes et femmes), pour la session 1953, était composée de M. ROBERT, Inspecteur général de l'Instruction publique, président ; de Mlle BUDON, professeur au lycée Jules-Ferry ; de MM. MINOIS et THÉRON, professeurs aux lycées Lakanal et Chaptal. Ce jury avait la charge des épreuves théoriques, comprenant des épreuves écrites et des épreuves orales.

La session des épreuves théoriques a commencé le 9 juin, date du début des

épreuves écrites ; elle a été close le 21 juillet 1953, date de la proclamation des résultats.

ÉPREUVES ÉCRITES. — Elles ont eu lieu les 9, 10, 12, 13 juin. L'épreuve de calcul numérique (13 juin) n'intervient pas pour l'admissibilité.

Les textes des sujets proposés étaient les mêmes pour les candidats et les candidates ; les listes d'admissibilité, distinctes, ont été affichées le 29 juin.

33 candidats, sur 34 inscrits, ont composé ; 28 ont été déclarés admissibles. La moyenne (sur 20) obtenue par le premier est 14,3 ; la moyenne du dernier est 5,7. 5 candidats seulement ont une moyenne supérieure à 10.

Sur 25 candidates, 4 ont renoncé à composer ; 19 ont été déclarées admissibles. La moyenne (sur 20) obtenue par la première est 11,5 ; celle de la dernière est un peu supérieure à 5,5 ; 4 candidates ont une moyenne supérieure à 10.

On trouvera, en annexe à ce rapport, les textes des sujets de composition et les rapports des correcteurs.

Le nombre de concurrents à recevoir au C.A.P.E.S., mathématiques, ancien régime, a été fixé, par arrêté ministériel, à 41 candidats et 22 candidates ; deux candidats reçus aux épreuves pratiques étant dispensés des épreuves théoriques, le nombre de candidats à recevoir était réduit de 41 à 39 au minimum. Il était donc mis au concours 39 places pour 33 candidats, et 22 places pour 25 candidates !

Bien que de telles conditions soient exceptionnellement favorables, nous devons regretter qu'un concurrent et quatre concurrentes n'aient pas compris, en ne se présentant pas aux épreuves écrites, leur intérêt d'en profiter : sur ces cinq défaillants, quatre étaient en exercice au Maroc.

ÉPREUVES ORALES. — Elles ont eu lieu au lycée Louis-le-Grand du 4 au 21 juillet. Les admissibles ont été répartis en trois séries de 18 au maximum. L'un d'entre eux, inscrit pour la deuxième série, n'a pu, pour raison de santé, venir passer l'oral.

Avant chaque série, une séance d'appel des concurrents a comporté le tirage au sort, déterminant l'ordre de passage des deux leçons qui leur ont été proposées, et l'association des sujets de ces leçons, renfermée sous enveloppe : ces sujets n'ont été connus des candidats qu'au début de la période de trois heures précédant immédiatement chaque leçon, et accordée pour sa préparation.

L'exposition de ces leçons, prévue pour une durée d'une demi-heure, a été en général bien délimitée et faite posément, en tenant compte des conseils généraux donnés aux groupes de candidats lors de l'appel de chaque série. La qualité de ces leçons a été variable, mais l'ensemble a donné une impression satisfaisante dès le début de l'oral, par le souci de la composition et du soin des détails. De toute évidence, un travail sérieux de préparation a été accompli, pendant l'année, pour la préparation de ces épreuves orales : en particulier, maint stagiaire ayant échoué en 1952 a pu, dans de meilleures conditions, réparer honorablement son échec en 1953. Certaines des leçons faites auraient été favorablement appréciées s'il s'était agi du concours d'agrégation.

Mais la concordance des bonnes leçons d'oral et des bonnes mentions d'épreuves pratiques, à laquelle on aurait pu s'attendre, ne s'est pas réalisée le moins du monde ; à tel point qu'on peut se demander si ce ne sont pas les candidats, ayant eu des épreuves pratiques moyennes, qui ont fait pour l'oral le plus gros effort de préparation intelligente.

Sur les 92 leçons entendues, 24 ont des notes allant de 15 à 19, 30 des notes de 13 à 14, 25 des notes de 10 à 12, et 13 des notes de 0 à 9.

Une candidate et trois candidats ont obtenu pour leurs deux leçons des notes supérieures ou égales à 15 : l'un de ces candidats a été par ailleurs reçu à l'Agrégation de mathématiques de 1953.

La comparaison de ces notes avec leurs analogues de 1952 met en évidence un

nombre presque égal de bonnes leçons et moitié moins de mauvaises, avec une accumulation plus sensible que l'an dernier entre 13 et 14 (30 au lieu de 21 l'an dernier).

Il semble que les observations faites l'an dernier aient porté et en particulier qu'en plusieurs établissements les stagiaires ont pris un contact sérieux avec leurs collègues enseignant dans le second cycle. Il y a lieu de poursuivre cette pratique pour les concurrents de 1954, qui seront presque tous des adjoints d'enseignement non chargés de la responsabilité d'une classe ; nous espérons que cela leur confère une plus grande liberté de travail et d'entretien avec les professeurs de l'établissement.

RESULTATS GENERAUX

Candidats. — Pour l'ensemble des épreuves théoriques, la moyenne des notes obtenues (majorations non comprises) par chacun des 27 candidats ayant subi les épreuves orales s'échelonne de 15,1 à 7. Le jury a proposé, pour l'admission définitive, les 23 premiers candidats de cette liste. La moyenne du dernier reçu (majorations non comprises) est de 8,6 ; l'an dernier, cette moyenne avait été de 9,4. Sur ces 23 candidats, 17 sont des stagiaires, 6 sont des adjoints d'enseignement.

Comme deux candidats, déjà signalés comme dispensés des épreuves écrites, ont été reçus aux épreuves pratiques, 25 candidats au lieu de 41 prévus, ont été proposés au choix du Ministre.

Candidates. — La moyenne des notes pour les 19 candidates admissibles, qui ont toutes suivi les épreuves orales, varie entre 13,2 et 7,5. Les 18 premières candidates de cette liste ont été proposées pour l'admission définitive : elles se répartissent en 11 stagiaires d'enseignement et 7 anciennes admissibles, dont 6 adjointes d'enseignement et un professeur du cadre local d'A.E.F. La moyenne de cette dernière, qui est aussi la dernière reçue, et qui ne bénéficiait d'aucune majoration, est de 9.

Une seule candidate admissible a donc été éliminée à l'écrit, bien qu'elle ait fait preuve, malgré son état de santé, de courage à l'oral, mais ses épreuves écrites avaient été faibles (rang d'écrit 18^e).

Les textes des épreuves écrites, minutieusement rédigés, avaient été conçus pour n'exiger que de la méthode, mais aucune connaissance savante, et leur longueur raisonnable n'apparentait nullement l'écrit à celui du concours d'agrégation, peut-être même pas au Concours général des Lycées et Collèges.

La sélection finalement réalisée semble comparable à celle du nouveau certificat d'aptitude au professorat du Second Degré, fonctionnant pour la première fois en 1953, épreuves pratiques y comprises.

Le premier des candidats reçus a réussi d'autre part au concours d'agrégation de 1953 : en le comptant, 12 de ces candidats ont été nommés dans des lycées de la métropole, du Maroc ou d'Allemagne occupée. Les candidates ont trouvé une situation moins favorable, et 2 seulement ont été nommées dans des lycées. On peut espérer que les meilleurs, placés dans de bonnes conditions pour poursuivre leur effort, pourront, par la suite, accéder à l'agrégation.

En somme, le C.A.P.E.S. (ancienne formule) aura en 1953 contribué d'une manière substantielle à pallier la crise du recrutement, et ceci d'une manière immédiate, parce que l'âge des reçus ne comporte pas pour eux l'obligation de faire leur service militaire.

Les éliminés après les épreuves écrites sont déjà, ou vont être nommés adjoints et adjointes d'enseignement dans leurs établissements respectifs. Il est vraisemblable qu'ils pourront réparer leur échec à la dernière session du C.A.P.E.S., ancien régime, prévue pour 1954.

ANNEXE I

Rapport sur l'épreuve dite : problème

Correcteurs : M. THÉRON et Mlle BUDON

Rapporteur : M. THÉRON (1)

La composition comportait deux parties : dans la partie I, il s'agissait de faire retrouver aux candidats certaines propriétés des cercles de Chasles d'une ellipse. Ils étaient ainsi préparés à l'étude de la seconde partie ; son but était de déterminer un trièdre connaissant les angles respectifs de chaque arête avec le plan de la face opposée ; mais on demandait auparavant de déterminer un parallélépipède dont toutes les longueurs d'arête sont données et dont les six faces sont tangentes à une sphère donnée, problème équivalent.

Sur un total de 100 points, il en fut attribué 44 à la partie I et 46 à la partie II ; 10 points restant disponibles pour récompenser les qualités de présentation, bonne rédaction, soins apportés aux figures, clartés dans les explications.

54 copies furent corrigées. Les notes (sur 100) vont de 8 à 64, cette dernière attribuée deux fois. Près des deux tiers des notes sont comprises entre 14 et 30 inclus, avec prépondérance du côté des basses notes. 5 copies ont moins de 14. Au-dessus de 30 les notes se suivent assez régulièrement jusqu'à 42 ; puis 5 copies se détachent en s'espçant. La moyenne des notes est 26,5, et la note médiane, c'est-à-dire celle située au milieu de la liste des notes classées est 24.

Cette statistique appelle les observations suivantes :

a) Il y a trop de copies faibles ou franchement mauvaises. La note médiane est 24, or le total des points attribués à la partie I, amputée de la question la plus difficile [montrer que MF et MF' sont tangents à (ω)], ainsi que de l'étude de la réciproque dans la recherche du lieu de M , atteint 24. Un candidat ayant traité cet ensemble de questions, de longueur modeste, et dont le niveau ne dépasse pas celui d'un bon Baccalauréat, aurait donc obtenu une note voisine de 26, compte tenu des 10 points réservés. La moitié des concurrents n'a pu arriver là.

Les candidats qui, pour la plupart enseignent dans les classes inférieures, ne sont évidemment pas préparés à l'épreuve de géométrie par leur enseignement. Il faut qu'ils sachent que leurs souvenirs de candidats au Baccalauréat sont insuffisants et qu'ils doivent consacrer en cours d'année un certain temps à s'exercer à la recherche d'un problème de géométrie.

b) Par contre, les copies les mieux notées, sont satisfaisantes, les concurrents n'ont pu terminer le problème qui faisait un tout assez long, mais une seule difficulté sérieuse les séparait du but. Avec quelques heures de plus l'épreuve aurait été convenablement traitée.

Voici les principales remarques d'ordre général au sujet du concours :

1° Les candidats utilisent rarement les indications contenues explicitement ou implicitement dans l'énoncé. Par exemple, celui-ci parle dès le début d'une similitude (S), la plupart des questions étaient simplifiées par la considération de (S), à commencer par celle qui suivait immédiatement l'introduction de cette similitude (milieu M de EE'). Or très rares sont les copies où cette similitude est utilisée.

2° Les méthodes sont souvent maladroitement, et, chose plus grave, une méthode est rarement exploitée systématiquement. Il n'est pas rare de voir un candidat traiter une question ou deux en utilisant une méthode excellente, puis l'abandonner sans raison en poursuivant ses recherches, alors qu'il pouvait continuer à l'utiliser. Il semble que l'on n'ait pas conscience que l'unité d'un problème a presque toujours pour corollaire une certaine unité de la méthode de recherche.

3° Les rédactions manquent souvent de netteté, et ce défaut n'est sans doute pas

(1) Voir le texte *Bulletin* n° 157, pages 160 et 161.

toujours involontaire. Ainsi, parmi les nombreux candidats qui n'ont pu montrer que les droites MF et MF' sont tangentes à (ω) , mais qui ont utilisé ce résultat ultérieurement, un seul a marqué nettement qu'il était obligé d'admettre un point. Il est rare que l'on distingue nettement entre les éléments ou résultats connus, ceux recherchés et ceux admis.

4° Les candidats ont une tendance regrettable à faire appel à leur érudition au lieu de regarder directement les questions. Ainsi pour chercher le lieu de M, beaucoup d'entre eux, ayant reconnu une figure classique (cordes conjuguées d'un cercle), ont fait appel à leur mémoire et ont évalué $(MF + MF')^2$ et $(MF - MF')^2$, à grand renfort de calculs, alors qu'une propriété précédente, MF et MF' tangents à (ω) , qui avait dû être longuement étudiée, donnait immédiatement le résultat.

5° Une seule faute grave se retrouve dans beaucoup de copies, au sujet du lemme demandé en (II, 2°) : elle consiste, étant donné un cercle et sa projection sur un plan, à confondre l'angle du plan du cercle et du plan de projection avec l'angle des tangentes en deux points correspondants du cercle et de l'ellipse. Sur les 36 candidats ayant traité ou effleuré cette question, 17 ont commis cette faute.

ANNEXE II

Rapport sur l'épreuve dite : corrigé (I)

Correcteurs : Mlle BUDON et M. THÉRON

Rapporteur : Mlle BUDON

I. — Le problème proposé comporte deux parties qui ont été notées également. Dans la première, il s'agissait de calculer les angles B et C d'un triangle ABC connaissant a , A, la longueur α de la bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ ou le produit $\beta\gamma$ des bissectrices intérieures de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. $B + C$ étant égal à $\Pi - A$, l'inconnue classique est $B - C$. Un seul candidat s'est écarté, sans succès d'ailleurs, de ce procédé. Deux autres candidats ont utilisé des formules de transformation fausses. La plupart ont abouti à une équation correcte du second degré en $\cos \frac{B - C}{2}$. Les conditions à imposer à cette inconnue ont été très mal déterminées en général ; ce sont pourtant celles qui interviennent dans le deuxième cas de résolution des triangles. Beaucoup de candidats se contentent de conditions nécessaires

$$-1 < \cos \frac{B - C}{2} < 1, \text{ ou } 0 < \cos \frac{B - C}{2} < 1,$$

sans se demander si elles sont suffisantes. Très peu examinent complètement les limites de $\cos \frac{B - C}{2}$ avant d'étudier l'équation du second degré, d'où des longueurs. Pour l'une et l'autre des équations (2° et 3°) le calcul du discriminant est inutile, $f(\sin \frac{A}{2})$ indique l'existence des racines et montre que seule la plus grande peut convenir, $f(1)$ fournit alors la condition de possibilité.

A la suite de ces calculs, un candidat a remarqué que les données fixent d'une manière unique $\frac{B - C}{2}$, c'est-à-dire, à une symétrie près, la direction de la bissectrice de $\widehat{A}$; le lieu de A, tel que $\frac{B - C}{2}$ soit constant, est alors une hyperbole équilatère. Un autre candidat constate que, A étant dessiné, ainsi que sa bissectrice inté-

(1) Voir le texte *Bulletin* n° 157, pages 161 et 162.

rieure AA_1 , il suffit de mener par A_1 la tangente à l'enveloppe du segment $BC = a$, malheureusement cette enveloppe n'est pas la conique indiquée.

Une construction est suggérée par le texte dans le cas où la donnée est α , elle permet de vérifier les résultats trouvés par la trigonométrie. La similitude des calculs entre le cas où α est donné et celui où $\beta\gamma$ est donné, fait prévoir dans ce dernier cas une construction à la règle et au compas. La deuxième partie du problème permet de vérifier les calculs du 3° et conduit à une construction, avec la donnée $\beta\gamma$.

Les calculs font alors intervenir symétriquement b et c par leur somme et leur produit. A et a étant des données, on pose $a + b + c = 2p$ et $bc \sin A = ah$, les variables b et c sont remplacées par $2p$ et h , dont les significations géométriques sont immédiates. Le produit $\beta\gamma$ peut être, d'après la formule (2), ramené à la surface $2S$ du quadrilatère BB_1CC_1 .

La quatrième question permet d'étudier géométriquement la variation de S quand A décrit son lieu et de retrouver la condition de possibilité du 3°.

Le lieu de A est connu. Le lieu de E ($BE = b + c$) n'a pas été déterminé avec assez de précision : le centre et le rayon du cercle dont fait partie ce lieu auraient dû être indiqués ; l'arc de cercle a été rarement limité avec exactitude. Les variations de h et de p ont été admises trop intuitivement.

Le maximum de S est réalisé quand le triangle est isocèle ; sa valeur S_0 a été quelquefois calculée, mais la valeur trouvée n'a jamais été comparée au résultat du 3°.

La cinquième question indique que p est lié aux données par une équation du second degré ; peu de candidats l'ont étudiée et aucun n'a conclu.

Le commentaire est pauvre : lorsque la bissectrice intérieure est remplacée par la bissectrice extérieure $\sin \frac{B-C}{2}$ intervient dans le calcul, un candidat a remarqué

que la fonction devient impaire sans en tirer les conséquences ; lorsque les angles du triangle sont remplacés par des angles de droites orientées, le cercle lieu de A est complètement décrit, les bissectrices intérieures et extérieures ne se distinguent plus. Un seul candidat a abordé la question.

Chacune des remarques signalées a donné des points supplémentaires, ainsi le meilleur devoir a été noté 17,5 sur 20 ; la note la plus faible est 1,5 sur 20 ; 15 copies ont obtenu la moyenne sur 33 copies (pour les hommes) ; 13 copies ont obtenu la moyenne sur 21 copies (pour les femmes) ; 5 notes sont inférieures à 5 sur 20 (hommes) ; 3 notes sont inférieures à 5 sur 20 (femmes).

II. — La signification de cette épreuve est indiquée dans le programme du concours et a été rappelée en tête du texte du problème. Il ne s'agit pas d'un simple exercice de recherche, mais d'un corrigé ; elle s'adresse à des candidats qui ont enseigné, peuvent témoigner ici de leur expérience. Nous savons la difficulté du compte rendu des devoirs, et comment certains professeurs y échappent dans les classes nombreuses : pourtant, quand, faute de temps, les interrogations deviennent occasionnelles, le devoir hebdomadaire est le seul contact individuel entre le professeur et chacun de ses élèves, d'où sa valeur. A côté de la correction écrite sur chaque copie, le corrigé oral s'adresse à tous : principalement à l'élève moyen qui désire des méthodes générales qui réussissent, au mauvais élève qui souhaite pourtant comprendre la solution, à l'élève doué qui ne veut connaître les techniques que pour les oublier, et devant chaque problème souhaite s'adapter aux données particulières et faire des synthèses nouvelles.

Or, si la lecture des corrigés montre un entraînement à la recherche des problèmes de mathématiques (habileté dans les calculs, en géométrie), une certaine clarté dans l'expression, elle révèle un manque de sûreté dans les procédés employés (discussion d'une équation du second degré, variation d'une grandeur géométrique, limitation d'un lieu), souvent des connaissances insuffisantes (du triangle, par exem-

pie), sans doute une culture pauvre pour l'ensemble des mathématiques élémentaires : vagues souvenirs de l'époque où l'on était soi-même un candidat au Baccalauréat.

Ce manque de maturité, confirmé par les leçons d'oral, est, j'espère, un gage de jeunesse, c'est-à-dire d'aptitude à apprendre et à travailler.

ANNEXE III

Rapport sur le calcul numérique (1)

Correcteurs : Mlle BUDON et M. THERON

Rapport de M. MINOIS

La première partie de cette épreuve consistait en l'application de quatre formules données de trigonométrie sphérique. Elle ne comportait aucune autre difficulté que celle que l'on rencontre en classe de Mathématiques Élémentaires ou de Sciences Expérimentales, dans le maniement des Tables de logarithmes. Dans une seconde partie, on expliquait la signification géographique du calcul précédent et l'on demandait d'en déduire la longueur du chemin Paris-Montréal parcouru par un avion, ce qui n'exigeait qu'une règle de trois. Une troisième partie faisait utiliser les mêmes formules à un bateau situé sur un méridien donné. On demandait d'étudier l'ensemble des points de ce méridien en lesquels il était possible d'entendre un signal donné émis par une station de T.S.F. située à Brest.

En somme, il s'agissait dans tout ce problème, de calculs que tous les navigateurs sont amenés à faire journellement. Effectivement aucun candidat n'a été gêné par la difficulté du texte. Dans la première partie, le texte invitait les candidats à se contenter de la précision bien suffisante du dixième de minute. Il ne semble pas qu'ils aient apprécié à sa valeur l'allègement des calculs qui en résultait.

Trop de candidats disposent leurs calculs sans ordre. Ils ignorent visiblement ce qu'est un tableau de calculs. Ils manipulent leurs tables avec maladresse. Les petites erreurs dues à des interpolations fantaisistes sont fréquentes. Nombreux aussi sont les candidats qui calculent lentement.

La note 18 a été attribuée une fois, la note 15 deux fois, la plus faible note a été 2, attribuée une fois à une copie dont l'auteur, visiblement, ignore tout du calcul numérique. 30 notes ont été supérieures ou égales à la moyenne.

En résumé, c'est une épreuve tout à fait convenable, que l'on voudrait, pourtant, bien meilleure encore. Malgré son faible coefficient, elle est susceptible d'apporter aux candidats des points qu'ils auraient grand tort de mépriser. Les candidats aux concours futurs seraient sages en y pensant.

ANNEXE IV

Rapport sur l'exposé pédagogique

Correcteurs : MM. ROBERT et MINOIS

Texte de l'épreuve — « En toutes choses, disait Arago, qu'il s'agisse d'une fable de La Fontaine ou du traité de Géométrie descriptive de M. Monge, ce qui est réellement beau, paraît simple et semble avoir dû coûter peu d'efforts. »

Et Lagrange disait : « Avant d'avoir entendu Monge, je ne savais pas que je savais la Géométrie descriptive. »

Approuvez-vous Arago et Lagrange lorsqu'ils semblent identifier la beauté et la simplicité ? Votre expérience d'élève et de professeur vous permet-elle de dire que la géométrie descriptive soit belle et simple ? N'en peut-on dire autant d'autres parties du domaine mathématique ? Les sciences mathématiques vous semblent-elles seules à s'imposer à l'esprit humain par le double caractère de simplicité et de beauté ?

(1) Voir le texte *Bulletin* n° 157, pages 162 et 163.

Rapport des correcteurs. — Une phrase d'Arago servait de support au texte. Arago disait son émotion devant le traité de Géométrie descriptive de Monge qui venait de paraître. Il en admirait tout particulièrement la simplicité et la beauté de l'ordonnance. Ainsi se trouvait posé le problème du beau en mathématiques et l'on demandait aux candidats d'apporter leur contribution à ce problème en utilisant leurs souvenirs d'étudiants et leur expérience de jeunes professeurs.

On regrette que trop de candidats se contentent de phrases banales à aspect pédagogique. On regrette aussi que, beaucoup, se méprenant sur la phrase d'Arago, se croient obligés de vanter la beauté d'une épure. Par contre, on est heureux de lire des copies d'une belle qualité. Elles sont l'œuvre de candidats réfléchis et le jury a plusieurs fois constaté, à l'oral, une concordance entre les qualités mises en évidence par les leçons et les qualités mises en évidence par les exposés.

On déplore beaucoup de maladresses dans l'expression de la pensée. On déplore surtout l'existence de copies émaillées de multiples fautes d'orthographe. Elles ont été sévèrement pénalisées.

Loin d'être détestable, cette épreuve n'est cependant pas brillante. Les candidats seraient bien inspirés en utilisant une fraction de leurs loisirs à la lecture des grands classiques scientifiques, et à la réflexion personnelle. Avec un peu d'entraînement, l'exposé pédagogique cesserait de les dérouter. Qu'ils fassent un petit effort. Ce sera loin d'être du temps perdu.

ANNEXE V

Rapport sur les épreuves orales

Les conseils donnés dans le rapport de l'an dernier ont été suivis relativement aux plans des leçons, aux rappels de résultats antérieurs, à la durée des exposés. L'effort de préparation a semblé généralement très sérieux et beaucoup de leçons sont honorables : les candidats ont déployé du soin, répudié la vaine virtuosité de calcul et présentent de véritables leçons à l'usage des élèves. Sauf lorsque l'un d'eux est tombé sur un sujet qu'il se trouvait n'avoir jamais préparé auparavant, on ne peut incriminer que des détails, comme des oublis de présentation de résultats qui auraient dû être signalés dans la leçon ou qui se rattachaient à la méthode adoptée ; souvent le choix des exemples destinés à illustrer le sujet a été maladroit ou aurait pu être amélioré.

Cependant, certains sujets ne sont pas bien dominés par les candidats : ce n'ont pas été tant les leçons de géométrie descriptive, convenables sans être brillantes, que nous visons ici, mais surtout les leçons de géométrie de mathématiques élémentaires : transformations ponctuelles et coniques. Les candidats y apportent bien des matériaux, mais ne les ordonnent pas harmonieusement, et la cause en est qu'une conception de l'unité de ces sujets ne leur apparaît pas encore clairement. Comme il a été observé déjà dans le rapport de l'an dernier, ces leçons ont chevauché entre plusieurs exposés possibles, et cette constatation rejoint les observations du correcteur du problème décrit (annexe I) ; on abandonné une méthode qui a de l'efficacité pour faire la part égale aux conceptions variées des différents auteurs de livres classiques. Ce qui pêche de ce côté n'est donc pas l'insuffisance du volume des connaissances du candidat, mais une certaine absence d'idées générales et d'esprit critique.

Elle se manifeste encore à propos des problèmes d'existence, où on ne distingue pas assez ce qui est spéculatif (*analyse*) et ce qui est constructif, et on néglige la mise au point nécessaire pour s'assurer de la convenance des résultats (*synthèse*).

Si cette méthode d'investigation, uniforme dans ses caractères généraux, était plus familière aux concurrents, qui ne voit qu'ils y trouveraient un solide appui pour donner de la vie aux exposés des leçons de concours en choisissant, puis traitant complètement les problèmes essentiels auxquels on peut presque toujours les réduire.

Les auteurs de leçons n'ont pas rappelé volontiers les définitions, ni les propo-

sitions dont on a besoin, *au moment même où on les utilise* (ou très peu avant), ce qui améliore la précision des démonstrations.

A côté de ces défauts généraux, relevons quelques défauts particuliers assez répandus. Certains candidats sont timorés, trop impressionnés, par exemple, par la lettre du texte de leur leçon : une question d'algèbre comme inéquations (du premier ou du second degré) n'est pas au fond différente de l'étude du signe d'une fonction (linéaire ou de la forme $ax^2 + bx + c$), tout au moins sur le principe, les applications étant mises à part : un candidat qui traite d'abord $ax^2 + bx + c > 0$ en refaisant une théorie où le signe > 0 n'a somme toute rien à voir, interprète trop étroitement son texte. Un autre candidat avait à parler des sections planes du cylindre de révolution : il n'a pas compris, que cylindre voulait dire ici surface cylindrique, et il a parlé du solide engendré par un rectangle tournant autour d'un de ses côtés, ce qui n'a aucun rapport avec la leçon.

Mais, à côté des timides, il y a ceux qui montrent une désinvolture exagérée vis-à-vis de la correction du langage et de la rigueur formelle. Ceci sévit surtout dans les leçons d'algèbre : confusions fréquentes, qu'un professeur devrait s'attacher à éviter, entre une fonction et sa limite, entre l'accroissement moyen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et une dérivée, notamment, et négligences de langage pour désigner pêle-mêle une courbe, une fonction, une équation. Exemples : « la fonction $ax + by + c = 0$ est la fonction linéaire », « l'expression $y = \frac{\varepsilon^2 - 3\varepsilon + 4}{\varepsilon}$, quand ε tend vers zéro, tend vers $\frac{4}{\varepsilon}$ ».

Cette tendance au charabia s'accroît avec l'habitude de faire de la lettre ε quelque chose qui n'est ni fixe, ni mobile, alors que dans les démonstrations d'analyse, son emploi est habituellement de désigner un nombre positif *arbitraire*, très petit si l'on veut. Que dire de cette affirmation : « Quand x tend vers $-\frac{b'}{a}$, l'expression $a'x + b'$ tend vers un nombre très petit que nous désignons par $-\varepsilon$ » ?

Une équation peut être *indéterminée*, mais ce qualificatif ne devrait pas être employé pour une *inéquation*. Un professeur qui trouve pratique de s'exprimer comme suit : « l'équation représente une droite » ou « l'égalité $a = bq + r$ représente une division » devrait faire, au moins une fois, l'effort de traduction de cette phrase convenue en un langage tout à fait précis.

On excuse le lapsus, mais quand il se répète, il inquiète. Il y a même des cas où il ferait rire les élèves : « La prochaine fois, nous étudierons le cas particulier où la droite Δ est un cercle. »

Passons maintenant en revue quelques leçons suggérant des observations qui peuvent être utiles aux futurs candidats.

GÉOMÉTRIE

Classe de Troisième. — *Etude d'un lieu géométrique : points d'où l'on voit un segment donné sous un angle donné.*

Il n'est pas déraisonnable d'exposer d'abord une construction qui permettrait d'obtenir tout point du lieu ; mais sa discussion (qui fut escamotée) est un peu difficile. Cependant, on peut construire deux points particuliers M_1 , M_2 du lieu situés sur la médiatrice du segment donné AB (et ce sont les seuls), sans difficulté.

On dispose, pour la recherche, de deux théorèmes : 1° tous les points d'un arc de cercle d'extrémités A et B voient AB sous le même angle ; 2° par trois points non alignés passe un cercle unique. Ceci posé, soit M un point quelconque du lieu autre que A et B (on suppose l'angle donné α non nul, et différent d'un angle plat) : l'arc de cercle AMB rencontre la médiatrice de AB en un point unique, qui est nécessairement un point du lieu, ce ne peut être que M_1 ou M_2 . Les points du lieu sont nécessairement sur deux arcs fixes AM_1B , AM_2B , symétrique par rapport à AB .

Réciproquement, soit N un point de l'arc $\widehat{AM_1B}$, les angles $\widehat{ANB}$, $\widehat{AM_1B}$ sont égaux, donc $\widehat{ANB} = \alpha$ et N est un point du lieu. Il n'y a plus qu'à conclure. La méthode suivie est celle qui est préconisée pour les lieux géométriques en général.

Classe de Seconde. — *Figures homothétiques d'une droite, d'un cercle.*

Pour montrer que deux cercles du plan sont homothétiques, le candidat a utilisé un lemme : deux vecteurs parallèles sont (en général) homothétiques, en l'appliquant à deux rayons parallèles $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{C'M'}$. Il aurait dû souligner nettement que cela ne donne pas une infinité d'homothéties, bien qu'il y ait une infinité de couples de points (MM'). Là encore joue un théorème d'unicité à bien rappeler, et dont il y a lieu de discuter l'application (point partageant un segment CC' dans un rapport algébrique donné).

Il ne faut pas présenter le tracé des tangentes communes comme un moyen de trouver les centres d'homothétie : c'est une application de la théorie nouvelle, au contraire.

Classe de Seconde. — *Division harmonique de points alignés. Faisceau harmonique de droites.*

Il est illogique d'employer prématurément l'expression de faisceau harmonique pour quatre droites qui déterminent sur une cinquième une division harmonique. L'appellation ne se trouve justifiée qu'après la preuve du fait que la propriété est indépendante du choix de la cinquième droite.

Il serait tout aussi cocasse d'appeler puissance d'un point P, par rapport à un cercle, le produit $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ (A et B étant, sur le cercle, alignés avec P), puisque la définition fait intervenir, en plus du point et de la droite, une sécante passant par le point. On attend, avant de le faire, d'avoir démontré que ce produit est indépendant de la sécante.

Classe de Seconde. — *Relations $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ dans le triangle.*

Ne pas dire qu'on oriente un vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vouloir dire qu'on oriente sa droite de support.

Le seul moyen d'éviter, dans la leçon, un dogmatisme déroutant pour l'esprit est de se proposer deux problèmes : le calcul de a connaissant b , c , A (ou même b , c , $\cos A$), ce qui détermine le triangle ; le calcul de $2R$, après avoir montré, d'après les éléments, qu'il ne dépend, par exemple, que de a et $\sin A$.

Classe de Première. — *Parallélisme des droites et des plans.*

Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, il n'est pas vrai qu'une autre droite parallèle à la première soit aussi parallèle au plan : elle peut être contenue dans le plan.

De telles restrictions jouent sans cesse dans cette théorie ; on s'est étonné de les voir complètement méconnues. Elles disparaissent, soit en modifiant le sens originel du mot parallèle, soit, ce qui est préférable, dans l'enseignement, en parlant de direction de droites ; une telle direction peut appartenir à un plan. Mais ce nouveau langage n'est à signaler qu'en fin de théorie.

Classe de Première. — *Angles dièdres. Plans perpendiculaires.*

Un angle dièdre a une infinité de rectilignes ; deux angles dièdres coïncident complètement si un rectiligne de l'un est superposé à un rectiligne de l'autre : tous les rectilignes d'un angle dièdre et de ceux qui lui sont égaux sont égaux. Tels sont les faits de base.

Il n'a pas été insisté sur la différence entre les angles de la géométrie plane et les angles dièdres ; deux angles dièdres égaux peuvent être *superposés d'une infinité de manières*.

Un gros lapsus a été commis par une candidate : « si deux plans sont perpendi-

culaires, toute droite de l'un est perpendiculaire à leur intersection », la démonstration qui suivait aussitôt, bien entendu, visait un énoncé correct, mais non apparent. Ceci ne prouve-t-il pas qu'on a tort d'énoncer des propositions avant de les démontrer ? L'élève peut penser que l'énoncé est important et la démonstration accessoire, même quand le premier est vicieux et quand la seconde est juste.

Classe de Première. — *Volume de la pyramide et du tronc de pyramide à bases parallèles.*

Le candidat a omis de rappeler des préliminaires essentiels, le volume d'un prisme triangulaire et la similitude, à la base d'une pyramide, de toute section par un plan parallèle au plan de base, avec la conséquence relative au rapport des aires de la section et de la base.

Il y a lieu de mettre en évidence, par des figures partielles, la juxtaposition des trois pyramides en lesquelles on peut partager, dans la démonstration classique, un prisme triangulaire.

Classe de Mathématiques. — *Rotation dans le plan définie comme transformation ponctuelle.*

Cette transformation n'est pas une construction arbitraire de l'esprit : elle se dégage, comme technique de dessin, de l'étude préalable d'une figure plane invariable dont on a fixé un des points. Il est bien difficile, sans ce préliminaire, de faire saisir pourquoi deux figures déduites l'une de l'autre par rotation sont superposables.

Classe de Mathématiques. — *Similitude dans le plan, définie comme transformation ponctuelle.*

Dans certaine réciproque où interviennent deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, bien préciser si les hypothèses faites ont lieu quels que soient B et B' (et alors il vaudrait mieux les appeler M et M' — M pouvant être pris confondu avec tout point du plan).

Les candidats ont tendance à réduire deux figures semblables F et F' à de tels vecteurs, sans insister sur l'indépendance que les éléments de la transformation manifestent vis-à-vis du choix de A et B.

Les élèves ont rencontré l'appellation de triangles semblables dès la classe de Troisième. Il y a sur ce point un raccord à présenter entre les deux sens de la notion de similitude.

Classe de Mathématiques. — *Recherche des cercles passant par deux points et tangents à un cercle donné.*

L'étude préalable des faisceaux de cercles n'est pas essentielle pour traiter cette leçon. Seule, la théorie des axes radicaux est indispensable. L'esprit de la méthode est, dès lors, de substituer au problème le problème équivalent : faire passer par les deux points un cercle dont l'axe radical avec le cercle donné soit tangent à celui-ci. Ceci conduit à rechercher l'enveloppe des axes radicaux, avec ce cercle, des cercles passant par les deux points donnés (un point I en général) ; cette étude met en jeu plusieurs cas de figure et il est bon de la faire avant d'aborder le problème posé.

Le candidat a introduit dans la discussion du problème, comme condition nécessaire, que I doit d'abord exister, ce qui était illogique.

Classe de Mathématiques. — *Définition et étude de la parabole.*

L'étude complète des propriétés de la parabole dépasse la durée d'une seule leçon orale, mais celle qui a été faite sur le sujet, ne comportant que des constructions par points et la distinction des deux régions déterminées par la courbe, a semblé vraiment trop pauvre.

Le candidat a démontré, avec lenteur, que toute courbe semblable à une parabole est une parabole : il se devait d'aller plus loin et de montrer que deux paraboles quelconques sont semblables, de donner le cas d'égalité et le cas d'homothétie, s'il entrait dans cette considération.

Classe de Mathématiques. — *Théorème de Poncelet pour l'ellipse.*

Le théorème qui fait intervenir les deux foyers a été reconstitué, un peu péniblement, en partant de ce qu'il fallait démontrer. C'est là un échec relatif, car le fait essentiel de la démonstration (la symétrie d'un système de deux cercles, par rapport à leur ligne des centres), apparaît mal, masqué par des détails.

Un procédé pour retrouver avec méthode la démonstration, consiste à supposer les foyers de l'ellipse fixes, et son grand axe variable. La correspondance entre les tangentes menées d'un point à une telle ellipse se dégage sans peine.

Classe de Mathématiques. — *Tangente en un point d'une hyperbole. Asymptote.*

Le candidat n'a pas pu rapprocher simplement les deux parties de la leçon et a fait un long détour, avec plus d'érudition que de méthode, par la théorie des directrices, des cercles (μ), de l'intersection de l'hyperbole avec une droite.

Or le raisonnement qui établit l'existence d'une asymptote est exactement apparenté à celui qui établit l'existence d'une tangente. Dans les deux cas, on est conduit à appliquer le même fait : l'inverse d'un point fixe par rapport à un cercle variable qui tend vers un cercle point, tend vers ce point.

II. — ALGÈBRE, TRIGONOMÉTRIE, ARITHMÉTIQUE

Classe de Seconde. — *Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.*

A ce niveau, on doit recommander la méthode bien naturelle qui consiste à substituer à l'une des inconnues, son expression en fonction de l'autre, tirée de l'une des équations, et c'est aussi la moins dangereuse pour le candidat. S'aventurer d'emblée, sans exemples numériques préliminaires, dans la résolution par des combinaisons linéaires des équations données, n'est pas très raisonnable.

Par un souci de conformisme mal compris, le candidat a parlé de systèmes d'égalités numériques au lieu de systèmes d'équations, mais les accolades qui semblent préciser des systèmes équivalents, quel est alors leur sens ?

La faute coutumière a été commise. Dans un cas particulier le candidat a rencontré une équation de la forme $0.y = 0$. Il a conclu à une indétermination du système. Cependant, si le système proposé eût été formé de cette équation et d'une autre comme $0.x = 1$, il n'est pas nécessaire d'être grand clerc pour conclure à l'impossibilité du système.

Classe de Seconde. — *Etude des fonctions $\frac{1}{x}$ et $\frac{a}{x}$ et de leurs représentations graphiques.*

Nul lien n'a été établi entre les études de ces deux fonctions, qui ont été juxtaposées comme s'il s'était agi de $y = \frac{1}{x}$ et $y = x^2$, par exemple !

Le candidat ne s'est pas risqué à justifier que les courbes représentatives étudiées sont homothétiques.

Classe de Mathématiques. — *Exemples numériques simples d'équations qui se ramènent à des équations du premier ou du second degré.*

Le stagiaire qui est tombé sur cette leçon n'a pas su discuter l'équation irrationnelle $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = 2x + 1$, ne tenant nul compte de la signification arithmétique du radical : il a trouvé deux solutions, alors qu'une seule convient à l'équation primitive.

Classe de Mathématiques. — *Exemples numériques de variations de fonctions de la forme $y = \frac{ax' + bx + c}{a'x' + b'x + c'}$ ($a' \neq 0$).*

Le candidat n'a pas su construire des exemples simples, ce qui lui a fait commettre des erreurs de calcul. Voulant mettre en évidence l'involution des racines de l'équation $y = \lambda$ quand λ varie, il a perdu un temps précieux à faire le changement d'axes $x = X + \frac{21}{5}$ $y = Y + 3$ ($\frac{21}{5}$ et 3 étant les coordonnées du point de ren-

contre de la courbe représentative avec son asymptote parallèle à l'axe des x). Ceci eût été une très bonne chose s'il eût prévu d'avance la forme de la nouvelle équation par laquelle Y s'exprime en fonction de X : le calcul de ses coefficients importait peu.

Classe de Mathématiques. — *Notion de fonction primitive. Utilisation pour le calcul de certaines aires.*

Un raisonnement célèbre, attribué à Newton, consiste à montrer qu'une certaine aire, fonction de x , fournit une primitive de la fonction $f(x)$. Il suffit de lire le texte de la leçon pour comprendre que cette initiation ne nécessite aucune complication : on considère un intervalle où $f(x)$ est positive, et l'aire est engendrée par le déplacement de l'ordonnée $mM = f(x)$ quand l'abscisse $Om = x$ croît, de la borne inférieure a , de l'intervalle, à X . Cette aire $S(X)$ est *a priori* positive et fonction croissante de X .

Le candidat a montré que $\frac{\Delta X}{\Delta S}$ tend vers $f(x)$, quand ΔX , accroissement de X à partir de la valeur x , tend vers zéro par valeurs positives. Il a conclu, trop tôt, à l'existence d'une dérivée pour $S(X)$, pour la valeur x . Or, ce n'est pas plus difficile de conclure quand ΔX est négatif.

Les élèves n'auraient rien compris au rafistolage de cette lacune fait ensuite : il y était question de conventions algébriques pour l'aire comprise entre mM et m_1M_1 , ordonnée de la courbe d'abscisse $x + \Delta X$, quand ΔX est négatif.

La formule de Green et les questions d'intégrales curvilignes, qui introduisent en Analyse un sens positif d'un contour, etc..., ne sont pas du niveau de la classe ; ce ne peut être qu'à la fin de la leçon, quand la confusion entre $S(X)$ et ΔS , que les élèves ont tant tendance à faire, n'est plus à redouter, qu'il y aurait lieu de signaler (à des fins gratuites), qu'on peut, abstraction faite des restrictions $f(x) > 0$, $x > a$, généraliser les résultats obtenus, et Newton lui-même en aurait été le premier surpris.

Classe de Mathématiques. — *Equation $a \cos x + b \sin x = c$.*

L'emploi exclusif de l'inconnue auxiliaire $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ a masqué complètement le rapport étroit de l'équation avec celles, si simples, de la forme

$$\cos x = A \quad \text{ou} \quad \sin x = B.$$

Cependant les considérations justifiant en Physique, dans cette classe, la construction de Fresnel, y sont d'une certaine importance.

La candidate n'a pas montré la réciproque qui s'imposait pour établir l'équivalence du problème avec la recherche des abscisses curvilignes des points de rencontre du cercle trigonométrique avec une certaine droite.

Classe de Mathématiques. — *Multiples communs à deux ou plusieurs entiers. P.P.C.M.*

En confondant avec des nombres premiers entre eux deux à deux des nombres premiers entre eux dans leur ensemble ($a'b'c' \dots$ quotients des entiers donnés par leur P.G.C.D. Δ) la candidate intéressée a donné une formule fautive pour le P.P.C.M. de $a, b, c \dots$: $\mu = \Delta a'b'c' \dots$. Mais celle-ci était correcte pour le cas de deux nombres seulement.

Classe de Philosophie. — *Étude de la fonction $y = ax + b + \frac{c}{x}$, au moyen des dérivées.*

L'auteur a été bien mal inspiré d'effectuer la somme indiquée sous la forme $\frac{ax^2 + bx + c}{x}$ et surtout d'appliquer, dans cette classe, et à cet exemple, une théorie des branches infinies du ressort des Spéciales. Il a successivement cherché, quand x augmente indéfiniment en valeur absolue $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$ (soit γ) $\lim_{x \rightarrow \infty} y - \gamma x$ (soit δ) et le signe de l'infiniment petit $y - \gamma x - \delta$ comme s'il s'était agi d'une fonction y quelconque.

DEUXIÈME PARTIE

Sur les bases axiomatiques de l'addition des segments orientés de même origine et sur la multiplication scolaire

(Conférence faite par M. L. CHATTELUN, au Lycée Henri-IV en mars 1953)

I

Nous nous proposons de fonder axiomatiquement la règle du parallélogramme en géométrie euclidienne. Nous serons conduit dans cette étude à montrer qu'en réalité l'addition des segments orientés concourants est indépendante du *postulatum* d'Euclide, celui-ci n'intervenant seulement que lorsqu'il s'agit de passer des segments concourants aux vecteurs (libres).

Dans tout ce qui suivra, nous sous-entendrons le qualificatif « orienté », et, pour éviter toute ambiguïté avec les vecteurs, nous représenterons par (OA) ou (a) le segment orienté d'origine O , d'extrémité A et de longueur a .

Étant donnés des segments de même origine O , cherchons s'il est possible de définir une opération, appelée *addition*, qui jouisse des propriétés axiomatiques suivantes :

I_1) elle est bien déterminée, c'est-à-dire qu'elle conduit à un segment unique d'origine O , appelé somme ;

I_2) elle est commutative ;

I_3) elle est associative ;

I_4) le segment nul (c'est-à-dire de longueur nulle) est par rapport à l'opération d'effet nul : $(a) + (O) = (O) + (a) = (a)$.

II) Dans le cas où les segments sont portés par une même droite, leur addition découle de l'addition algébrique des scalaires (axiome de permanence).

Explicitons cette condition. En vertu du postulat de Cantor-Dedekind, il existe une correspondance univoque et réciproque entre les points d'un axe et les scalaires, par suite, entre les segments portés par un même axe et les scalaires. On admet que la somme de deux segments colinéaires est un segment colinéaire à ces segments et que le scalaire qui mesure la somme se déduit par les règles ordinaires de l'addition algébrique des mesures des deux segments.

Remarquons que la condition II, jointe aux quatre conditions I, entraîne que l'ensemble des segments de même origine constitue un espace vectoriel, sous réserve d'établir, en outre, ce que nous ferons plus loin, que, k , désignant un scalaire réel, on a $k(a) + k(b) = k(a + b)$, lorsque (a) et (b) ne sont pas colinéaires.

III) La figure formée par deux segments d'origine O et leur somme reste égale à elle-même dans une rotation autour d'un axe quelconque passant par O (axiome de la congruence).

IV) L'opération est continue, c'est-à-dire que si (OA) est un segment fixe et (Ox) un segment qui tend vers zéro, le segment $(OA) + (Ox)$ tend vers un segment limite qui est (OA) (axiome de continuité).

Il en résulte de là que si $(b) \rightarrow (c)$, $(a) + (b) \rightarrow (a) + (c)$. Car, posant $(b) = (c) + (x)$, (x) tendant vers zéro, on a, en vertu de I_3

$$(a) + (b) = (a) + [(c) + (x)] = [(a) + (c)] + (x) \text{ qui } \rightarrow (a) + (c).$$

Etablissons deux propriétés préliminaires.

1° En vertu de II, la somme de deux segments opposés est un segment nul. Réciproquement, si la somme de deux segments est nulle, ces deux segments sont opposés.

Soient en effet (a_1) et (a_2) deux segments tels que $(a_1) + (a_2) = 0$. Considérons le segment (a'_1) opposé à (a_1) : on a $(a_1) + (a'_1) = 0$.

D'après l'hypothèse (condition I_4) $[(a_1) + (a_2)] + (a'_1) = (a'_1)$, d'où (condi-

tions I_2 et I_3) $(a_2) + [(a_1) + (a'_1)] = (a'_1)$ et (condition I_4) $(a_2) = (a'_1)$, ce qui établit la propriété.

2° La somme de deux segments concourants est coplanaire à ces segments.

Soit $(s) = (a_1) + (a_2)$.

Considérons les segments (a'_1) et (a'_2) respectivement opposés à (a_1) et (a_2) . On a $[(a_1) + (a'_1)] + [(a_2) + (a'_2)] = 0$, d'où (conditions I_2 et I_3)

$$[(a_1) + (a_2)] + [(a'_1) + (a'_2)] = 0,$$

et, en posant $(s') = (a'_1) + (a'_2)$, $(s) + (s') = 0$.

Il en résulte, d'après la propriété précédente, que les segments (s) et (s') sont opposés.

Faisons tourner la figure formée par (a_1) , (a_2) et (s) de deux droits autour de l'axe Δ passant par O et perpendiculaire au plan P déterminé par (a_1) et (a_2) .

D'après l'axiome de la congruence, (a_1) , (a_2) et (s) viennent en coïncidence avec (a'_1) , (a'_2) et (s') . Or la coïncidence de (s) et (s') serait impossible si ces segments n'étaient pas dans le plan P , car (s) et (s') étant opposés, resteraient, après la rotation autour de Δ , de part et d'autre du plan P , cette rotation laissant le segment (s) d'un même côté de P ; d'où contradiction.

A. SOMME DE DEUX SEGMENTS CONCOURANTS DE MÊME LONGUEUR

Soient (OA_1) et (OA_2) deux segments de même longueur a ; nous désignerons par $2x$ la mesure de l'angle $\widehat{A_1OA_2}$, moindre que π ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$), par s la longueur de la somme (OS) des deux segments.

a) *Direction de (OS) .* — Soient Oz la bissectrice de l'angle $\widehat{A_1OA_2}$ moindre que π et Oz' la demi-droite opposée. Une rotation de deux droits autour de la droite zOz' amène la figure A_1OA_2 en $A'_1OA'_2$, (OA'_1) et (OA'_2) coïncidant respectivement avec (OA_2) et (OA_1) . D'après l'axiome de la congruence, (OS) vient coïncider avec la somme (OS') de (OA'_1) et (OA'_2) , c'est-à-dire de (OA_2) et (OA_1) . D'autre part, en vertu de I_2 , (OS') n'est autre que (OS) ; par suite, l'égalité $S'OA'_1 = SOA_1$ donne $SOA_2 = SOA_1$, ce qui montre, OS étant dans le plan A_1OA_2 , que la demi-droite OS est portée par la droite zOz' .

b) *Sens de (OS) .* — Supposons (OA_1) fixe et faisons tendre (OA_2) vers (OA_1) en lui faisant balayer l'angle $\widehat{A_2OA_1}$ moindre que π ; d'après l'axiome de continuité (OS) tend vers $(OA_1) + (OA_1)$, c'est-à-dire, en vertu de l'axiome de permanence, vers $2(OA_1)$. Or dans cette rotation Oz vient coïncider avec la demi-droite OA_1 (Oz' coïncidant avec la demi-droite opposée à OA_1); il en résulte que le sens de (OS) ne peut être que celui de Oz .

c) *Longueur de (OS) .* — La longueur s est fonction de a et de x ($s, a, x \geq 0$). Donnons d'abord à x une valeur déterminée et cherchons la forme de la fonction $s = f(a)$. Soient (OA'_1) et (OA'_2) deux segments respectivement colinéaires à (OA_1) et (OA_2) , de même sens qu'eux et de longueur commune a' . Posons

$$(s') = (OA'_1) + (OA'_2).$$

Evaluons de deux façons la somme $(s) + (s')$. On a (conditions I_2 et I_3):

$$[(OA_1) + (OA_2)] + [(OA'_1) + (OA'_2)] = [(OA_1) + (OA'_1)] + [(OA_2) + (OA'_2)].$$

La longueur de la somme $(OA_1) + (OA_2)$ est $f(a)$; celle de $(OA'_1) + (OA'_2)$ est $f(a')$. D'autre part (condition II), les deux segments $[(OA_1) + (OA'_1)]$ et $[(OA_2) + (OA'_2)]$ ont même longueur $a + a'$, de sorte que leur somme a pour longueur $f(a + a')$.

La fonction $f(a)$ satisfait donc à l'équation fonctionnelle $f(a + a') = f(a) + f(a')$. En vertu de l'axiome de continuité, la fonction $f(a)$ est elle-même continue et l'on sait que, dans ces conditions, $f(a)$ est de la forme $H.a$, H étant une constante par

rapport à a (mais une fonction de x). Nous posons $H = 2\varphi(x)$ et nous aurons donc
 $s = 2a\varphi(x)$.

Recherche de la fonction $\varphi(x)$.

Cette fonction doit satisfaire à priori à certaines conditions : elle doit être continue (condition IV), positive ou nulle ($s \geq 0$). De plus $\varphi(0) = 1$ (cas où (OA_1) et (OA_2) sont confondus), et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$ (cas où (OA_1) et (OA_2) sont opposés).

Ainsi la fonction continue $\varphi(x)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) doit satisfaire aux conditions :

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) \geq 0, \\ \varphi(0) = 1, \\ \varphi(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{array} \right.$$

Considérons deux segments (OA'_1) et (OA'_2) de même longueur a , que (OA_1) et (OA_2) , admettant comme bissectrice de l'angle $\widehat{A_1OA'_2}$, moindre que π la bissectrice Oz , de l'angle $\widehat{A_1OA_2}$, moindre que π . Posons $\widehat{A_1OA'_2} = 2y$ et supposons, pour fixer les idées, $y < x$ (I).

Evaluons de deux façons la somme

$$(\Sigma) = [(OA_1) + (OA_2)] + [(OA'_1) + (OA'_2)]$$

qu'on peut écrire aussi

$$(\Sigma') = [(OA_1) + (OA'_1)] + [(OA_2) + (OA'_2)] ;$$

c'est un segment porté par Oz .

La longueur de (Σ) est $2a\varphi(x) + 2a\varphi(y)$. D'autre part, $(OA_1) + (OA'_1)$ est un segment de longueur $2a\varphi(\frac{x-y}{2})$ porté par la bissectrice Oz_1 de $\widehat{A_1OA'_1}$; de même $(OA_2) + (OA'_2)$, porté par la bissectrice de Oz_2 de $\widehat{A_2OA'_2}$ a pour longueur $2a\varphi(\frac{x+y}{2})$. D'ailleurs $\widehat{zOz_1} = \widehat{zOz_2} = \frac{x+y}{2}$, par suite la longueur de (Σ')

$$\text{est} \quad 2 \cdot 2a\varphi(\frac{x-y}{2}) \cdot \varphi(\frac{x+y}{2}).$$

D'où l'équation fonctionnelle, trouvée par Poisson, à laquelle satisfait $\varphi(x)$:

$$(E) \quad \varphi(x) + \varphi(y) = 2\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (2)$$

Remarquons que la deuxième condition (C) est satisfaite d'elle-même, car si

l'on remplace dans (E) y par x ($\neq \frac{\pi}{2}$), on obtient $2\varphi(x) = 2\varphi(0) \cdot \varphi(x)$ d'où, $\varphi(x)$ étant $\neq 0$, $\varphi(0) = 1$.

Etude analytique de l'équation (E).

Nous supposons uniquement que la fonction $\varphi(x)$ est continue, sans admettre l'existence de la dérivée.

Propriétés immédiates de la fonction $\varphi(x)$.

1° *La fonction est paire.* — Permutons x et y dans (E) : $\varphi(\frac{y-x}{2}) = \varphi(\frac{x-y}{2})$ d'où, x et y étant quelconques, $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

2° $\varphi(\pi - x) = -\varphi(x)$. — Remplaçons dans (E) y par $\pi - x$:

$$\varphi(x) + \varphi(\pi - x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

d'où, en supposant $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\varphi(x) + \varphi(\pi - x) = 0$,

(1) Le lecteur est prié de faire la figure. On suppose (OA_1) et (OA'_1) d'un même côté de Oz .

3° Fonction $\psi(x)$. — Posons $\psi(x) = \varphi(\frac{\pi}{2} - x)$.

$\psi(x)$ est continue en vertu de la continuité de $\varphi(x)$.

$\psi(x)$ est impaire, car

$$\psi(-x) = \varphi(\frac{\pi}{2} + x) = \varphi[\pi - (\frac{\pi}{2} - x)] = -\varphi(\frac{\pi}{2} - x) = \psi(x).$$

$\psi(x) \geq 0$ pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Les conditions (C) donnent $\psi(0) = 0$ et $\psi(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Remplaçons dans (E) x et y par $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} - y$, il vient

$$(1) \quad \psi(x) + \psi(y) = 2\psi\left(\frac{x+y}{2}\right) \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

4° La fonction $\varphi(x)$ est décroissante entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; $\psi(x)$ est croissante. — Remplaçons dans (E) y par $\pi - y$, il vient

$$(2) \quad \varphi(x) - \varphi(y) = -2\psi\left(\frac{x+y}{2}\right) \psi\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

d'où, en supposant $x > y$, $\varphi(x) - \varphi(y) < 0$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Il résulte immédiatement de là que $\psi(x)$ est croissante entre les mêmes limites. On voit aussi qu'entre ces limites $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont < 1 .

5° Remplaçons dans (1) y par $-y$:

$$(3) \quad \psi(x) - \psi(y) = 2\psi\left(\frac{x-y}{2}\right) \psi\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

6° Ajoutons membre à membre (E) et (2):

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) \psi\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Ajoutons membre à membre (1) et (3):

$$\psi(x) = \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) \psi\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Posons $\frac{x-y}{2} = a$, $\frac{x+y}{2} = b$; les deux relations précédentes deviennent:

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi(a+b) = \varphi(a)\varphi(b) - \psi(a)\psi(b), \\ \psi(a+b) = \psi(a)\varphi(b) + \psi(b)\varphi(a). \end{cases}$$

Ceci établi nous pouvons trouver les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.

Tannery a démontré dans son « Introduction à la Théorie des Fonctions d'une variable » que, moyennant la condition supplémentaire $\frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$, variable » que, moyennant la condition supplémentaire $\psi(x)/x \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$, les seules fonctions continues satisfaisant aux relations (5) sont $\varphi(x) = \cos x$ et $\psi(x) = \sin x$, $\cos x$ et $\sin x$ étant définis par leurs développements en série. Son raisonnement montre que si $\frac{\psi(x)}{x} \rightarrow l$, les fonctions sont alors $\cos lx$ et $\sin lx$.

Or cette condition supplémentaire est satisfaite pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

La relation (1), dans laquelle $\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) \leq 1$, donne $\frac{1}{2}[\psi(x) + \psi(y)] \leq \psi\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

(2) L'équation (E) joue aussi un rôle fondamental dans l'édification de la Trigonométrie en Géométrie non euclidienne.

c'est-à-dire que la fonction $\psi(x)$ est *convexe* (vers le haut). Mais on sait qu'une fonction continue convexe admet en chaque point une dérivée à droite et une dérivée à gauche, sauf au plus en un ensemble dénombrable de points. Soit alors x_0 un point non exceptionnel du segment $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Dans la relation (3) faisons $x = x_0 + h$ et

$$y = x_0, \text{ on obtient } \frac{\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)}{h} = \frac{\psi(\frac{h_0}{2})}{(\frac{h}{2})} \varphi\left(x_0 + \frac{h}{2}\right).$$

Faisons tendre h vers 0 par valeurs positives : le premier membre a une limite $\psi^+(x_0)$; $\varphi(x_0 + \frac{h}{2}) \rightarrow \varphi(x_0)$ en vertu de la continuité ; de sorte que $\frac{\psi(\frac{h_0}{2})}{(\frac{h}{2})}$ a une limite $\frac{\psi^+(x_0)}{\varphi(x_0)}$; c'est dire que $\frac{\psi(x)}{x}$ a une limite l quand $x \rightarrow 0$ par valeurs positives. D'ailleurs $\psi(x)$ étant une fonction impaire, $\frac{\psi(x)}{x}$ a encore pour limite l quand $x \rightarrow 0$ par valeurs négatives.

On a donc $\varphi(x) = \cos lx$.

D'autre part, on voit tout de suite que la condition $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$, jointe à $\varphi(x) > 0$ pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ entraîne $l = 1$. Il en résulte qu'en définitive on a $\varphi(x) = \cos x$, et, par suite $s = 2a \cos x$.

Ainsi se trouve déterminée la somme de deux segments concourants de même longueur.

Il importe de remarquer que dans cette étude nous n'avons pas eu à faire intervenir le *postulatum* d'Euclide, ni pour la détermination de la direction et du sens de (OS), ni pour la recherche de la fonction $\varphi(x)$. On sait, en effet, que les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ étant introduites par leurs développements en série, ou ce qui revient au même par leurs propriétés caractéristiques (5) déduites de l'équation (E) à laquelle sont jointes les conditions (C), la théorie analytique des fonctions circulaires (de même que la trigonométrie sphérique) s'édifie indépendamment du *postulatum* d'Euclide.

En géométrie euclidienne, $a \cos x$ n'est autre que la projection orthogonale (OI) de (OA₁) ou (OA₂) sur Os ; on a donc OS = 2.OI, ce qui, dans ce cas, conduit à la règle du parallélogramme.

En géométrie non euclidienne (riemanienne ici, à cause de l'inégalité $\varphi(x) < 1$), on a OI > $a \cos x$, d'où OS < 2 OI.

Pour passer du cas particulier étudié de la somme de deux segments concourants de même longueur au cas général de deux segments concourants quelconques, on peut conduire les raisonnements de manière à ne pas introduire le *postulatum* d'Euclide. C'est ce que nous allons montrer maintenant.

B. SOMME DE DEUX SEGMENTS CONCOURANTS RECTANGULAIRES

Soient (OA) et (OB) deux segments rectangulaires, a et b leurs longueurs. Traçons dans l'angle droit AOB la demi-droite Oz définie par l'angle aigu $\widehat{AOz} = \alpha$ que nous déterminerons plus loin. Les demi-droites OD et OE symétriques de Oz par rapport à OA et OB respectivement sont en prolongement l'une de l'autre.

Marquons sur OD le point D, sur OE le point E et sur Oz le point K à égales distances ρ de O (OD = OE = OK = ρ) et tels que

$$(OA) = (OD) + (OK), (OB) = (OE) + (OK).$$

Les segments (OD) et (OE) étant opposés, on a (OA) + (OB) = 2 (OK).

Tout revient à déterminer α et φ pour que les conditions indiquées soient satisfaites. Or, d'après le cas A, on a

$$(1) \quad \begin{cases} a = 2\rho \cos \alpha, \\ b = 2\rho \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2\rho \sin \alpha, \end{cases}$$

d'où $\rho = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\cos \alpha = \frac{a}{2\rho}$.

Remarquons que si l'on considère les segments $k(OA)$ et $k(OB)$, ρ se trouve multiplié par le scalaire k et α reste le même ; c'est dire que $k(a) + k(b) = k(a+b)$. Ainsi se trouve établie une propriété annoncée au début de cette étude.

En géométrie euclidienne, les relations (1), qui s'écrivent

$$\begin{cases} OK \cos \alpha = \frac{1}{2} OA, \\ OK \sin \alpha = \frac{1}{2} OB, \end{cases}$$

montrent que le point K se projette orthogonalement sur OA en son milieu et de même sur OB en son milieu. Le point K est donc le milieu de l'hypoténuse AB du triangle rectangle AOB. ($AB = \sqrt{a^2 + b^2}$; $OK = \frac{1}{2} AB$). On retrouve ainsi la règle du parallélogramme.

C. SOMME DE DEUX SEGMENTS CONCOURANTS QUELCONQUES

Traçons dans l'angle $\widehat{AOB}$ (moindre que π) des deux segments donnés la demi-droite Oz , que nous déterminerons plus loin, et menons la perpendiculaire DOE à Oz ; la demi-droite OA est dans l'angle droit $\widehat{DOz}$ et la demi-droite OB dans l'angle droit $\widehat{EOz}$.

On pose $\widehat{AOD} = \alpha (< \frac{\pi}{2})$, $\widehat{BOE} = \beta (< \frac{\pi}{2})$, $\widehat{AOB} = \varphi (< \pi)$. On a

$$\alpha + \beta = \pi - \varphi.$$

Marquons respectivement sur les demi-droites OD et OE les points D et E situés à égale distance ρ de O ($OD = OE = \rho$), sur Oz les points F et H ($OF = \rho'$, $OH = \rho''$) et tels que

$$(OA) = (OD) + (OF), \quad (OB) = (OE) + (OH).$$

Les segments (OD) et (OE) étant opposés, on aura :

$$(OA) + (OB) = (OF) + (OH)$$

$$\text{ou } (OA) + (OB) = 2(OK), \text{ K étant le milieu de FH.}$$

Tout revient à déterminer α , β , ρ , ρ' , ρ'' pour que les conditions indiquées soient satisfaites.

D'après le cas B, on a :

$$(2) \quad \begin{cases} \rho = a \cos \alpha, \\ \rho' = a \sin \alpha, \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} \rho = b \cos \beta, \\ \rho'' = b \sin \beta. \end{cases} \quad (OA = a ; OB = b).$$

On en tire immédiatement $a \cos \alpha = b \cos \beta = b \cos (\varphi' - \alpha)$,

d'où $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a - b \cos \varphi'}{b \sin \varphi'}$.

α ainsi déterminé donne la demi-droite OD, par suite Oz ; on obtient ensuite β , ρ , ρ' , ρ'' , d'où les points F et H, par suite K et la somme $(OS) = 2(OK)$ des deux segments (OA) et (OB).

Remarquons encore que si l'on considère les segments $k(OA)$ et $k(OB)$, α et β ne changent pas tandis que ρ , ρ' , ρ'' sont multipliés par le scalaire k . Par suite

$$k(a) + k(b) = k(a + b).$$

En géométrie euclidienne, les relations (2) montrent que A se projette orthogonalement en D sur DOE et en F sur Oz ; de même les relations (3) indiquent que B se projette orthogonalement en E sur DOE et en H sur Oz. Les quadrilatères ODAF et OEBH sont donc des rectangles et l'on a alors $AF = BH (= \rho)$. Il en résulte que le point K milieu de FH est situé sur AB en son milieu. On retrouve ainsi, dans le cas général, la règle du parallélogramme.

II

Etant donnés deux segments concourants $(OA) = (a)$ et $(OB) = (b)$, cherchons s'il est possible de définir une opération, appelée multiplication scalaire, qui jouisse des propriétés axiomatiques suivantes :

I) elle ne fait intervenir que les longueurs a, b des segments et leur angle θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) et elle conduit à un scalaire unique, $f(a, b, \theta)$, appelé produit scalaire ;

II) elle est distributive par rapport à l'addition des segments ;

III) lorsque les segments sont colinéaires et de même sens, leur produit scalaire $f(a, b, 0)$ est égal au produit arithmétique ab de leurs longueurs : $f(a, b, 0) = ab$;

IV) le produit scalaire est positif lorsque θ est aigu ;

V) l'opération est continue, c'est-à-dire que si $(b) \rightarrow (c)$ le produit scalaire de (a) par (b) a une limite qui est le produit scalaire de (a) par (c) .

A. — Soit (c) un segment colinéaire à (b) et de même sens que (b) . La longueur de $(b) + (c)$ est $b + c$ et d'après la condition II), on doit avoir

$$f(a, b, \theta) + f(a, c, \theta) = f(a, b + c, \theta).$$

Fixons a et θ ; en vertu de la condition V), la fonction $f(a, b, \theta)$ considérée comme fonction de b , est continue et l'équation fonctionnelle précédente entraîne

$$f(a, b, \theta) = H(a, \theta) \cdot b,$$

H étant une constante par rapport à b .

Considérons maintenant un segment (c) colinéaire à (a) et de même sens que (a) , on devra avoir comme précédemment

$$H(a, \theta) \cdot b + H(c, \theta) \cdot b = H(a + c, \theta) \cdot b,$$

d'où l'équation fonctionnelle

$$H(a, \theta) + H(c, \theta) = H(a + c, \theta),$$

qui entraîne

$$H(a, \theta) = K \cdot a,$$

K étant une constante par rapport à a , mais une fonction de θ .

On peut donc poser

$$(1) \quad f(a, b, \theta) = ab\varphi(\theta),$$

$\varphi(\theta)$ étant une fonction continue à déterminer.

B. — Il est possible, dès maintenant, d'établir certaines propriétés de la multiplication scalaire, à partir de l'égalité (1) :

a) si (a) ou (b) est nul, le produit scalaire est nul ;

b) si l'on permute a et b , le produit scalaire ne change pas : la multiplication scalaire est commutative ;

c) soit (a') l'opposé de (a) , $(a + a' = 0)$; en vertu de la condition II),

$$f(a, b, \theta) + f(a', b, \theta) = f(a + a', b, \theta) = f(0, b, \theta) = 0,$$

d'où

$$f(a', b, \theta) = -f(a, b, \theta) ;$$

si (a) ou (b) change de sens, le produit scalaire change de signe ;

d) changer le sens de (a) revient à remplacer θ par $\pi - \theta$; il en résulte que

$$f(a, b, \pi - \theta) = -f(a, b, \theta),$$

ou, d'après (1),

$$(2) \quad \varphi(\pi - \theta) = -\varphi(\theta).$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, (2) donne $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$, c'est dire que le produit scalaire de deux segments perpendiculaires est nul.

Remarquons encore que si θ est obtus $\pi - \theta$ est aigu, donc $\varphi(\pi - \theta)$ est positif, par suite $\varphi(\theta)$ est négatif : lorsque θ est obtus, le produit scalaire est négatif.

Enfin, pour $\theta = 0$, la formule (2) donne $\varphi(\pi) = -\varphi(0)$, d'où résulte, en vertu de la condition III), $\varphi(0) = 1$ et $f(a, b, \pi) = -ab$, ce qui permet de donner la généralisation algébrique de la condition III) : si deux segments sont portés par un même axe, leur produit scalaire est égal au produit de leurs mesures algébriques (rapportées à cet axe).

C. — RECHERCHE DE LA FONCTION $\varphi(\theta)$.

Considérons un segment (OC) = (c) de même longueur que (OB) et tel que (OB) et (OC) soient d'un même côté du plan par rapport au support de (OA). Nous supposons, pour fixer les idées, que (OC) est situé dans l'angle $\widehat{AOB}$ moindre que π .

Nous poserons $\widehat{AOB} = x$, $\widehat{AOC} = y$, ($x > y$).

La somme (OB) + (OC) a pour longueur $2b \cos \frac{x-y}{2}$ et elle fait l'angle $\frac{x+y}{2}$ avec (OA). ($0 \leq \frac{x-y}{2} \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq \frac{x+y}{2} \leq \pi$).

La condition II) donne, en tenant compte de la formule (1),

$$ab\varphi(x) + ac\varphi(y) = a \cdot 2b \cos \frac{x-y}{2} \cdot \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

c'est-à-dire, en remarquant que $c = b$,

$$(E') \quad \varphi(x) + \varphi(y) = 2 \cos \frac{x-y}{2} \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Telle est l'équation fonctionnelle à laquelle doit satisfaire la fonction continue $\varphi(x)$.

$\varphi(x)$ doit, d'autre part, satisfaire aux conditions précédemment trouvées $\varphi(0) = 1$,

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

On voit tout de suite que la fonction $\varphi(x) = \cos x$ répond à ces conditions. Établissons que c'est la seule fonction possible.

Montrons d'abord que toute solution de (E') est décroissante dans l'intervalle (0, π).

Remplaçons y par $\pi - y$ dans (E') ; on obtient, en tenant compte de (2),

$$\varphi(x) - \varphi(y) = 2 \sin \frac{x+y}{2} \varphi\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x-y}{2}\right).$$

Les inégalités $0 < \frac{x+y}{2} < \pi$ et $0 < \frac{x-y}{2} < \frac{\pi}{2}$ entraînent que le facteur $\sin \frac{x+y}{2}$ est positif, tandis que $\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x-y}{2}\right)$ est négatif (car $\frac{\pi}{2} + \frac{x-y}{2} > \frac{\pi}{2}$) ; il en résulte que $\varphi(x) - \varphi(y) < 0$, et, comme $x > y$, que $\varphi(x)$ est décroissante.

Ceci établi, nous utiliserons le principe d'une méthode indiquée par J. ANDRADE (« Leçons de Mécanique Physique »).

Faisons $y = 0$ dans (E'), il vient,

$$(3) \quad \varphi(x) + 1 = 2 \cos \frac{x}{2} \varphi\left(\frac{x}{2}\right).$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $1 = \sqrt{2} \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$ d'où $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Connaissant $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, la relation (3) donne $\varphi\left(\frac{\pi}{8}\right)$, et ainsi, de proche en proche $\varphi\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

Faisons dans (E') $x = k \frac{\pi}{2^n}$ $y = (k-2) \frac{\pi}{2^n}$ (k entier), on obtient :

$$\varphi\left(k \frac{\pi}{2^n}\right) + \varphi\left[(k-2) \frac{\pi}{2^n}\right] = 2 \cos \frac{\pi}{2^n} \varphi\left[(k-1) \frac{\pi}{2^n}\right].$$

formule qui donne $\varphi\left(k \frac{\pi}{2^n}\right)$ connaissant φ pour les valeurs précédentes de k .

La fonction $\cos x$ satisfaisant à (E'), et par suite à (3), on a, quels que soient les entier n et k ,

$$\varphi\left(k \frac{\pi}{2^n}\right) = \cos\left(k \frac{\pi}{2^n}\right).$$

Soit x un angle quelconque ($0 \leq x \leq \pi$). Fixons provisoirement n , il existe un entier k tel que

$$k \frac{\pi}{2^n} \leq x < (k+1) \frac{\pi}{2^n}.$$

La différence entre les deux membres extrêmes, $\frac{\pi}{2^n}$, tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$;

il en résulte que $k \frac{\pi}{2^n} \rightarrow x$ quand $n \rightarrow \infty$.

La fonction $\varphi(x)$ étant décroissante, on a

$$\varphi\left[(k+1) \frac{\pi}{2^n}\right] < \varphi(x) \leq \varphi\left(k \frac{\pi}{2^n}\right),$$

ou

$$\cos\left((k+1) \frac{\pi}{2^n}\right) < \varphi(x) \leq \cos k \frac{\pi}{2^n}.$$

Les deux membres extrêmes tendant vers $\cos x$ quand $n \rightarrow \infty$, on a $\varphi(x) = \cos x$.

L'opération envisagée est donc possible et elle conduit à la définition habituelle du produit scalaire : $ab \cos \theta$.

On remarquera encore que les raisonnements précédents n'ont pas fait intervenir le postulatum d'Euclide ; la multiplication scalaire est donc en réalité indépendante de ce postulatum. Mais il convient de noter qu'en Géométrie non euclidienne (ici riemannienne), le produit scalaire ne s'exprime pas en fonction de la projection orthogonale de l'un des segments sur le support de l'autre.

L. CHATTELUN.

Symétries à plan invariant et orientation des trièdres Déplacements et Antidéplacements

(Note de M. H. MIRABEL, Professeur au Lycée Saint-Louis)

I. — Transformations (π)

1. DÉFINITION. — *Etant donné un plan (π), nous dirons que deux point A_1 et A_2 sont homologues dans la transformation (π) si le plan π est médiateur du segment A_1A_2 .*

2. CONSÉQUENCES. — a) Le plan π est invariant dans cette transformation, car il est constitué de points eux-mêmes invariants.

b) Le plan π détermine dans l'espace deux demi-espaces ε_1 et ε_2 dont il est la commune frontière et tout point de ε_2 est homologue d'un point de ε_1 dans la transformation (π) et inversement.

c) Deux points A_1 et B_1 appartiennent au même demi-espace, par exemple ε_1 , si leur segment A_1B_1 ne contient aucun point du plan π . Leurs homologues A_2 et B_2 appartiennent dans ces conditions au même demi-espace ε_2 .

3. THÉORÈME. — *Toute transformation (π) est une ISOMÉTRIE, c'est-à-dire qu'à tout couple de points A_1B_1 , elle associe un couple de points A_2B_2 , tels que : $A_1B_1 = A_2B_2$.*

4. THÉORÈME. — *Trois points alignés ont pour homologues dans une transformation (π) trois points alignés.*

En effet, si trois points sont alignés, on peut les noter A_1, B_1, C_1 , de façon que l'on ait la relation : $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$.

Il en résulte que leurs homologues A_2, B_2, C_2 sont tels que :

$$A_2B_2 + B_2C_2 = A_2C_2 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

5. CONSÉQUENCES. — *La figure homologue d'un segment dans une transformation (π) est un segment.*

La figure homologue d'une droite est une droite.

Une droite orthogonale au plan π est globalement invariante dans la transformation (π) correspondante.

6. THÉORÈME. — *Dans une transformation (π) la figure homologue d'un plan $\mathcal{P}_1$ est un plan ($\mathcal{P}_2$).*

En effet, soit un plan ($\mathcal{P}_1$) contenant les 3 points A_1, B_1, C_1 . Si un point M_1 est dans ($\mathcal{P}_1$), il existe une droite rencontrant deux des côtés du triangle $A_1B_1C_1$ en E_1 et F_1 et qui contient M_1 . Par suite M_2 est sur l'alignement E_2F_2 dans le plan déterminé par les points A_2, B_2, C_2 respectivement homologues de A_1, B_1, C_1 dans la transformation considérée. Ce plan contient donc tous les homologues des différents points de $\mathcal{P}_1$.

Et inversement, tout point de $\mathcal{P}_2$ est l'homologue d'un point de $\mathcal{P}_1$.

Donc : le plan $\mathcal{P}_2$ est la figure transformée du plan $\mathcal{P}_1$.

7. CONSÉQUENCE. — Le demi-plan (p_1) défini par le plan ($\mathcal{P}_1$) par une droite D_1 , qui y est contenue, a pour transformé l'un des demi-plans (p_2) définis dans ($\mathcal{P}_2$) par la droite D_2 .

Si A_1 et B_1 appartiennent à (p_1), le segment A_1B_1 ne contient aucun point de D_1 . Donc le segment A_2B_2 ne contient aucun point de D_2 et A_2B_2 sont dans (p_2) dans un même demi-plan dont D_2 est frontière.

8. CONSÉQUENCE. — Tout plan ($\mathcal{P}$) orthogonal au plan π est transformé globalement en lui-même par la transformation (π) correspondante.

Un tel plan partage l'espace en deux demi-espaces ϵ' et ϵ'' . Chacun d'eux est globalement invariant dans la transformation (π) considérée.

9. THÉORÈME. — *Deux triangles $A_1B_1C_1$ et $A'B'C'$ dont les côtés sont deux à deux respectivement égaux :*

$$A_1B_1 = A'B' \quad A_1C_1 = A'C' \quad B_1C_1 = B'C'$$

sont homologués dans un produit de transformations (π) dont le nombre est inférieur ou égal à TROIS.

Le plan π_1 médiateur de A_1A' définit une transformation (π_1) qui associe : $A_1 \longrightarrow A', B_1 \longrightarrow B_2, C_1 \longrightarrow C_2$.

Par suite : $A'B_2 = A_1B_1 = A'B'$ et $B_1C_1 = B_2C_2 = B'C'$.

Le plan π_2 , médiateur de B_2B' contient donc A' et définit une transformation (π_2) qui associe :

$$A' \longrightarrow A' \quad B_2 \longrightarrow B' \quad C_2 \longrightarrow C_3$$

Par suite : $A'C_3 = A'C_2 = A'C'$ et $B_2C_2 = B'C_3 = B'C'$.

Le plan π_3 , médiateur de C_3C' , contient donc A' et B' et définit une transformation (π_3) qui associe :

$$A' \longrightarrow A' \quad B' \longrightarrow B' \quad C_3 \longrightarrow C'$$

Donc le produit des transformations : (π_1)(π_2)(π_3) associe aux points A_1, B_1, C_1 , respectivement les points A', B', C' . C.Q.F.D.

Il peut se faire qu'une des transformations soit inutile par exemple si B_2 était confondu avec B' . Donc le nombre des transformations (π) nécessaires est : ≤ 3 .

II. — Orientation des trièdres

Tout trièdre est formé par trois vecteurs de même origine et unitaires. Un trièdre est *orienté*, si l'on distingue un ordre entre les vecteurs qui le définissent.

10. DÉFINITIONS. — Etant donné un trièdre orienté : $\vec{OA}_1, \vec{OA}_2, \vec{OA}_3$. Les vecteurs $\vec{OA}_1$ et $\vec{OA}_2$ définissent un plan $\mathcal{P}$ qui partage l'espace en deux demi-espaces et nous noterons (ε_1) celui qui contient OA_3 . Dans le plan $(\mathcal{P})$ le support du vecteur $\vec{OA}_1$ définit deux demi-plans et nous noterons $(\mathcal{P}_1)$ celui qui contient $\vec{OA}_2$.

Dans ces conditions :

Tout trièdre, d'origine O ($\vec{OA}'_1, \vec{OA}'_2, \vec{OA}'_3$) tel que :

- 1) $\vec{OA}'_1$ est confondu avec $\vec{OA}_1$;
- 2) $\vec{OA}'_2$ et $\vec{OA}_2$ sont dans le même demi-plan $(\mathcal{P}_1)$;
- 3) $\vec{OA}'_3$ et $\vec{OA}_3$ sont dans le même demi-espace (ε_1) ,

sera dit avoir la même disposition ou le même sens que le trièdre $(\vec{OA}_1, \vec{OB}_1, \vec{OC}_1)$.

11. CONSÉQUENCE. — Cette relation est une relation d'équivalence. Elle permet donc d'associer à tout trièdre $(\vec{OA}_1, \vec{OB}_1, \vec{OC}_1)$ un trièdre trirectangle ayant la même disposition et aussi un trièdre dont les trois faces ont 60° .

12. THÉORÈME. — Deux trièdres orientés étant définis par des vecteurs unitaires : $\mathcal{C}_1 : (\vec{O}_1A_1, \vec{O}_1B_1, \vec{O}_1C_1)$ et $\mathcal{C}_2 : (\vec{O}_2A_2, \vec{O}_2B_2, \vec{O}_2C_2)$, il existe un produit de transformations (π) dont le nombre est inférieur à « QUATRE » qui transforme le trièdre $(\vec{O}_2A_2, \vec{O}_2B_2, \vec{O}_2C_2)$ en un trièdre $(\vec{O}_1A_3, \vec{O}_1B_3, \vec{O}_1C_3)$ qui a même disposition que le trièdre $(\vec{O}_1A_1, \vec{O}_1B_1, \vec{O}_1C_1)$.

Le plan $\mathcal{P}$ qui contient les vecteurs $\vec{O}_1A_1$ et $\vec{O}_1B_1$ est partagé par le support $\vec{O}_1A_1$ en deux demi-plans dont l'un $\mathcal{P}_1$ contient $\vec{O}_1B_1$. Dans ce demi-plan il existe un vecteur $\vec{O}_1B_3$ et un seul tel que :

$$\text{angle}(\vec{O}_1A_1 \text{ avec } \vec{O}_1B_3) = \text{angle}(\vec{O}_2A_2 \text{ avec } \vec{O}_2B_2).$$

Les vecteurs utilisés étant unitaires les deux triangles $O_1A_1B_3$ et $O_2A_2B_2$ ont donc leurs côtés respectivement égaux deux à deux :

$$O_1A_1 = O_2A_2, \quad O_1B_1 = O_2B_2, \quad A_2B_2 = A_1B_3.$$

Il existe donc un produit de transformations (π) de nombre inférieur ou égal à 3 qui associe les points O_2, A_2, B_2 respectivement aux points O_1, A_1, B_3 .

Dans ce produit de transformations, C_2 se transforme en un point C_3 .

Si les deux vecteurs $\vec{O}_1C_1$ et $\vec{O}_1C_3$ sont dans le même des deux demi-espaces définis par le plan $\mathcal{P}$, le théorème est démontré, car les deux trièdres $(\vec{OA}_1, \vec{OB}_3, \vec{OC}_3)$ et $(\vec{OA}_1, \vec{OB}_1, \vec{OC}_1)$ ont la même disposition.

Si $\vec{O}_1C_1$ et $\vec{O}_1C_3$ sont dans deux demi-espaces différents, la transformation $(\mathcal{P})$ définie par le plan $\mathcal{P}$ qui laisse $\vec{O}_1A_1$ et $\vec{O}_1B_3$ invariants, associera à $\vec{O}_1C_2, \vec{O}_1C_4$ et les deux trièdres $(\vec{O}_1A_1, \vec{O}_1B_3, \vec{O}_1C_4)$ et $(\vec{O}_1A_1, \vec{O}_1B_1, \vec{O}_1C_1)$ auront la même disposition. La proposition est donc démontrée.

13. DÉFINITION. — Un trièdre $(\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$ étant choisi comme « REPÈRE », un trièdre $(\vec{O'U'}, \vec{O'V'}, \vec{O'W'})$ sera dit « POSITIF » si le nombre de transformations (π) qui permettent de transformer ce dernier en un trièdre $(\vec{OU''}, \vec{OV''}, \vec{OW''})$, de même disposition que le repère est un nombre pair. Il sera dit négatif si ce nombre est impair.

14. NOTATION. — On désignera par Ω_2 tout produit d'un nombre *pair* de transformations (π) et par (Ω_1) tout produit d'un nombre *impair* de transformations (π) .

On notera que : la transformation inverse notée $(\pi)^{-1}$, d'une transformation (π) est une transformation (π) et aussi que : le produit d'une transformation (π) par elle-même : $(\pi)(\pi) = 1$ est une coïncidence ou identité.

15. THÉORÈME. — *Si deux trièdres sont « positifs » (resp. négatifs), il existe un produit Ω_2 d'un nombre pair de transformations (π) , qui transforme l'un d'eux en un trièdre de même disposition que l'autre.*

Remarquons d'abord que si un produit Ω_2 transforme un trièdre $(\vec{O_2U_2}, \vec{O_2V_2}, \vec{O_2W_2})$ en un trièdre de même disposition qu'un trièdre $(\vec{O_1U_1}, \vec{O_1V_1}, \vec{O_1W_1})$, la transformation inverse Ω_2^{-1} transforme $(\vec{O_1U_1}, \vec{O_1V_1}, \vec{O_1W_1})$ en un trièdre de même disposition que le trièdre $(\vec{O_2U_2}, \vec{O_2V_2}, \vec{O_2W_2})$.

Dès lors, soit $(\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$ le trièdre repère.

Si $(\vec{O_1U_1}, \vec{O_1V_1}, \vec{O_1W_1})$ est un trièdre positif, il existe un produit Ω_2 qui le transforme en un trièdre de même disposition que le repère.

Si $(\vec{O_2U_2}, \vec{O_2V_2}, \vec{O_2W_2})$ est un trièdre positif, il existe un produit Ω'_2 qui le transforme en un trièdre de même disposition que le repère.

Par suite, le produit $(\Omega_2)(\Omega'_2)^{-1}$ transformera le premier trièdre en un trièdre de même disposition que le second. Or, ce produit comporte un nombre pair de transformations π . Il est donc un produit (Ω''_2) . C.Q.F.D. (1).

16. THÉORÈME. — *Si deux trièdres sont l'un positif, l'autre négatif, il existe un produit Ω_1 d'un nombre impair de transformations (π) qui transforme l'un d'eux en un trièdre de même disposition que l'autre.*

Il résulte de ces deux théorèmes, dont les conclusions s'excluent l'une l'autre, que leurs réciproques sont valables.

17. THÉORÈME. — *Les trièdres $\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW}$ et $\vec{OV}, \vec{OU}, \vec{OW}$ sont de dispositions contraires.*

Soit (π) le plan orthogonal au plan $\mathcal{P}$ qui contient $\vec{OU}$ et $\vec{OV}$ et qui contient le vecteur $\vec{B}$ bissecteur de l'angle des deux vecteurs $\vec{OU}$ et $\vec{OV}$.

La transformation (π) définie par le plan π associe : $\vec{OU}$ à $\vec{OV}$ et $\vec{OV}$ à $\vec{OU}$ et laisse globalement invariant chacun des demi-espaces déterminés par le plan $\mathcal{P}$ orthogonal à π . Donc $\vec{OW}$ et $\vec{OW'}$ sont dans le même demi-espace dont $\mathcal{P}$ est frontière.

Donc : $\vec{OU}.\vec{OV}.\vec{OW}$ et $\vec{OV}.\vec{OU}.\vec{OW'}$ sont de disposition contraire puisqu'homologués dans une transformation (π) . Or : $\vec{OV}.\vec{OU}.\vec{OW}$ et $\vec{OV}.\vec{OU}.\vec{OW'}$ sont de même disposition par définition. Donc : $(\vec{OU}.\vec{OV}.\vec{OW})$ et $(\vec{OV}.\vec{OU}.\vec{OW})$ sont de disposition contraire.

18. THÉORÈME. — *Les trièdres $(\vec{OU}.\vec{OV}.\vec{OW})$ et $(\vec{OU}.\vec{OV}.\vec{OW})$ sont de disposition contraire.*

Soit $\mathcal{P}_1$ le plan $(\vec{OU}, \vec{OV})$ et $\mathcal{P}_2$ le plan $(\vec{OU}, \vec{OW})$. Une transformation (π) définie par l'un des bissecteurs du dièdre formé par les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, transforme le demi-plan défini dans $\mathcal{P}_1$ par le support de OU qui contient $\vec{OV_1}$ en le demi-plan défini dans $\mathcal{P}_2$ par ce même support et qui contient $\vec{OW}$.

(1) D'une manière générale deux trièdres positifs (resp. négatifs) seront dits de même sens ; un trièdre négatif et un trièdre positif seront dits de sens contraires.

Dans cette transformation $(\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$ devient $(\vec{OU}, \vec{OW'}, \vec{OV'})$ et les deux trièdres $(\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$ et $(\vec{OU}, \vec{OW'}, \vec{OV'})$ ont la même disposition par définition.

Donc : $(\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$ et $(\vec{OU}, \vec{OW'}, \vec{OV'})$ sont de disposition contraire.

19. CONSÉQUENCE. — a) les trièdres $(\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$ et $(\vec{OW}, \vec{OU}, \vec{OV})$ sont de même sens ;

b) les trièdres $(\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$ et $(\vec{OU}, \vec{OV}, -\vec{OW})$ sont de sens contraires ;

c) les trièdres $(\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$ et $(-\vec{OU}, -\vec{OV}, -\vec{OW})$ sont de sens contraires.

20. APPLICATION. — Dans un tétraèdre régulier ABCD, deux trièdres définis en échangeant deux sommets quelconques sont de sens contraires.

Ex. : AB, AC, AD et CB, CA, CD,

ou : AB, AC, AD et AB, AD, AC.

Même proposition si le tétraèdre est quelconque.

21. CONCLUSION. — Si deux figures sont homologues dans un produit Ω_2 d'un nombre pair de transformation (π) , deux trièdres homologues : (OA, OB, OC) et $(O'A', O'B', O'C')$ sont de même sens.

Si deux figures sont homologues dans un produit Ω_1 d'un nombre impair de transformations (π) , deux trièdres homologues sont de sens contraires.

III. — Déplacements et antidéplacements

22. DÉFINITIONS. — On appelle « déplacement » tout produit Ω_2 d'un nombre pair de transformations (π) .

On appelle « antidéplacement » tout produit Ω_1 d'un nombre impair de transformations (π) .

On appelle « figures égales » deux figures homologues l'une de l'autre dans un déplacement.

On appelle « figures antiégales » deux figures homologues dans un antidéplacement.

23. THÉORÈME. — Toute isométrie est un déplacement ou un antidéplacement. C'est le théorème n° 12.

24. CONCLUSION. — Le déplacement est une transformation ponctuelle qui conserve les distances mutuelles de deux points arbitraires et la disposition des trièdres. L'antidéplacement est une transformation ponctuelle qui conserve les distances mutuelles de deux points arbitraires et modifie la disposition des trièdres.

25. CONSÉQUENCES. — La transformation inverse d'un déplacement est un déplacement.

L'identité est un déplacement.

Le produit de deux déplacements est un déplacement.

Les déplacements forment un « groupe de transformations ».

26. CONSÉQUENCES. — Le produit de deux transformations (π_1) et (π_2) définis par deux plans π_1 et π_2 :

1° si π_1 est parallèle à π_2 , s'appelle une translation ;

2° si π_1 est sécant à π_2 suivant une droite D, s'appelle une rotation d'axe D ;

3° si π_1 est orthogonal à π_2 , s'appelle une transposition ;

4° si π_1 est confondu avec π_2 , est l'identité.

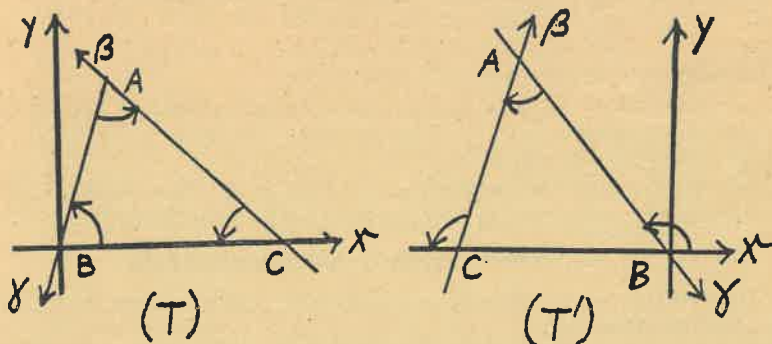
NOTE. — Les lignes qui précèdent sont un « essai » d'exposition à l'usage des élèves de *Math. Élémentaires*, suggéré par la brillante conférence faite en mai 1953 par M. G. CHOQUET, Professeur à la Sorbonne, devant les Professeurs de Mathématiques qui y avaient été conviés par la Commission d'Axiomatique de l'A.P.M.E.P. Il conviendrait de trouver une dénomination brève et évocatrice pour dénommer

les transformations (π) . Le mot de symétrie étant susceptible de créer des confusions. Elles peuvent avantageusement remplacer les transpositions employées traditionnellement jusqu'ici dans l'étude des déplacements.

H. MIRABEL,
Professeur de Mathématiques Supérieures
au Lycée Saint-Louis.

Théorèmes et formules parallèles du triangle

(par E. ELERHART, professeur agrégé au Lycée Kléber, Strasbourg)



1. *Les paramètres.* — Soient donnés un nombre algébrique a , deux nombres positifs B, C , inférieurs à Π et deux axes $\overrightarrow{BX}, \overrightarrow{BY}$, tels que, dans le plan orienté, $(\overrightarrow{BX}, \overrightarrow{BY}) = +\frac{\pi}{2}$. Prenons sur $\overrightarrow{BX}$ le point C tel que $\overline{BC} = a$ et faisons passer par B et C respectivement deux axes $\overrightarrow{\gamma}$ et $\overrightarrow{\beta}$ tels que

$$(\overrightarrow{BX}, \overrightarrow{\gamma}) = B - \Pi, (\overrightarrow{CX}, \overrightarrow{\beta}) = \Pi - C.$$

Si $a > 0$, $B + C < \Pi$, on obtient la figure (T), si $a < 0$, $B + C > \Pi$, on obtient la figure (T'). (Dans les deux cas $\overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ se coupent en un point A situé dans le demi-plan des Y positifs). Dans (T) et (T') nous appellerons a, B, C les *paramètres* du triangle orienté.

I. Théorèmes parallèles

2. *Éléments homologues invariants.* — D'après la construction identique des deux figures, il est évident que les coordonnées des sommets A, B, C y ont même expression en fonction des paramètres. On en déduit facilement qu'il en est de même pour les coordonnées des milieux des côtés, du centre de gravité G , de l'orthocentre H , des centres O et O_9 du cercle circonscrit et du cercle des neuf points.

Par suite, en fonction de a, B, C , les équations des médianes, des hauteurs, des cercles O et O_9 sont les mêmes dans les deux figures.

3. *Éléments homologues différenciés.* — Mais l'équation $Y = X \operatorname{tg} \frac{B}{2}$ représente dans (T) la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{B}$ du triangle ABC et dans (T') sa bissectrice extérieure. De même $Y = -(X - a) \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ représente la bissectrice intérieure de $\hat{C}$ dans (T), mais sa bissectrice extérieure dans (T'). Il en résulte que réciproquement les équations qui représentent les bissectrices extérieures de B et $\hat{C}$ dans (T), représentent leurs bissectrices intérieures dans (T'). Par contre, on vérifie

que les bissectrices intérieure et extérieure de $\hat{A}$ ont même équation dans les deux cas de figure.

On en déduit que les coordonnées du centre I du cercle inscrit de (T) (intersection des bissectrices intérieures de $\hat{A}$ et $\hat{B}$) et celles du centre I_a du cercle exinscrit dans $\hat{A}$ de (T') (intersection de la bissectrice intérieure de $\hat{A}$ et de la bissectrice extérieure de $\hat{B}$) ont la même expression en fonction des paramètres.

4. *Tableau des points homologues.* — Groupons dans un tableau (I) quelques points homologues importants des deux figures, c'est-à-dire des points dont les coordonnées y ont même expression en fonction des paramètres a, B, C .

(I)	INVARIANTS							DIFFÉRENCIÉS								
	(T)	A	B	C	G	H	O	O ₉	I	I _a	I _b	I _c	i	i _a	i _b	i _c
	(T')	A	B	C	G	H	O	O ₉	I _a	I	I _c	I _b	i _a	i	i _c	i _b

i, i_a, i_b, i_c désignent les points qui correspondent à I, I_a, I_b, I_c dans l'homothétie $(G, -\frac{1}{2})$.

5. *Théorèmes parallèles.* — Considérons un théorème sur le triangle faisant intervenir au moins un élément différencié dans les deux figures. Par exemple : « Dans un triangle les droites I_aM_a, I_bM_b, I_cM_c reliant les centres des cercles exinscrits aux milieux des côtés sont concourantes. »

Cela signifie que les équations de ces droites (que nous pouvons écrire uniquement avec a, B, C) ont une solution commune $X=f(a, B, C), Y=g(a, B, C)$. Mais ces trois mêmes équations représentent dans (T') les droites IM_a, I_cM_b, I_bM_c , qui y ont donc le point $X=f(a, B, C), Y=g(a, B, C)$ en commun. D'où le théorème *parallèle* : « Dans un triangle les droites IM_a, I_cM_b, I_bM_c sont concourantes. » Considérons encore le théorème de Feuerbach : « Le cercle des neuf points d'un triangle est tangent à son cercle inscrit. »

Analytiquement cela signifie que le système des équations des cercles O_9 et I (écrites en a, B, C) a une solution double $X=f(a, B, C), Y=g(a, B, C)$. Mais ces mêmes équations représentent dans (T') les cercles O_9 et I_a . D'où le théorème *parallèle* : « Le cercle des neuf points est tangent aux cercles exinscrits. »

La proposition « i est le centre radical des cercles I_a, I_b, I_c » donne immédiatement la forme parallèle « i_a est le centre radical des cercles I, I_c, I_b ».

Il importe naturellement dans cette *traduction* de théorèmes de bien déterminer les éléments homologues dans (T'). Considérons par exemple l'énoncé : « Si sur les côtés BA, CA d'un triangle ABC on porte des segments BB', CC' égaux à BC, OI est perpendiculaire à B'C' et égal au rayon du cercle circonscrit à AB'C'. » Quels sont dans (T') les homologues de B', C' ?

Dans (T) ils sont définis algébriquement par $\overline{BB'} = -a$ sur $\overrightarrow{\gamma}$, $\overline{CC'} = +a$ sur $\overrightarrow{\beta}$. En leur donnant la même définition dans (T') on trouve le théorème *parallèle* : « Si sur les prolongements des côtés BA, CA d'un triangle ABC on porte des segments BB', CC' égaux à BC, OI_a est perpendiculaire à B'C' et égal au rayon du cercle circonscrit à AB'C'. » Le lecteur pourra chercher ce que devient le même théorème, si dans (T) on porte AC sur les côtés AB et CB.

II. Formules parallèles

6. *Grandeurs algébriques.* — Exprimons dans (T) des grandeurs remarquables du triangle ABC au moyen des paramètres, explicitement comme les côtés

$$b = \frac{a \sin B}{\sin(B+C)}, \quad c = \frac{a \sin B}{\sin(C+B)},$$

ou implicitement au moyen des grandeurs déjà exprimées précédemment par a, B, C comme le périmètre $2p = a + b + c$. Ainsi l'angle $A = \Pi - B - C$, la surface

$$S = \frac{bc \sin A}{2}, \text{ les rayons des cercles circonscrit, inscrit, exinscrit } R = \frac{a}{2 \sin(B+C)},$$

$$r = \frac{S}{p}, r_a = \frac{S}{p-a}, \text{ les hauteurs } h_a = b \sin C, h_b = a \sin C, h_c = a \sin B, \text{ la bissectrice intérieure de } \hat{A} \quad d_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}.$$

Désignons par $b', c', p', A', S' \dots$ les mêmes expressions (implicites ou explicites) en a, B, C , ces paramètres étant pris cette fois dans (T') . Pour éviter la confusion avec les grandeurs remarquables du triangle ABC de (T') (lettres non accentuées) nous désignerons ici les paramètres par $a' B', C'$. Donc $a' = -a, B' = \Pi - B, C' = \Pi - C$. Nous appellerons les expressions $A', B', C', a', b', c', 2p', S' \dots$ angles, côtés, périmètre, surface... algébriques du triangle orienté (T') .

$$b' = \frac{a' \sin B'}{\sin(B' + C')} = \frac{-a \sin(\pi - B)}{\sin(\pi - B + \pi - C)} = \frac{a \sin B}{\sin(B + C)} = b,$$

$$\text{de même } c' = c, A' = \Pi - B' - C' = \Pi - (\Pi - B) - (\Pi - C) = -A, \\ 2p' = a' + b' + c' = -a + b + c = 2(p - a).$$

On trouve de même $S' = -S, R' = R, r' = -r_a$, etc...

7. *Tableau et interprétation des grandeurs algébriques.* — Groupons dans le tableau (II) les valeurs de quelques grandeurs algébriques importantes.

(II)

(T')	ABC	
A'	$-A$	
B'	$\pi - B$	
C'	$\pi - C$	
a'	$-a$	Dans (T') a', b', c' sont les valeurs de $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ sur les axes-côtés ; S' est l'aire algébrique classique du triangle ABC (négative, car le parcours ABC est de sens contraire à celui du plan) ; h'_a, h'_b, h'_c sont les mesures algébriques $\overline{A'A}, \overline{B'B}, \overline{C'C}$ des hauteurs sur des axes déduits des précédents par rotation de $+\frac{\pi}{2}$; r', r'_a, r'_b, r'_c sont les rayons des cycles tangents respectivement aux axes $(\vec{X}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}), (\vec{X}_1, \vec{\beta}, \vec{\gamma}), (\vec{X}, \vec{\beta}_1, \vec{\gamma}), (\vec{X}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}_1)$ (où $\vec{X}_1, \vec{\beta}_1, \vec{\gamma}_1$ désignent les axes opposés à $\vec{X}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$), le rayon d'un cycle étant négatif quand son sens est contraire à celui du plan (I).
b'	b	
c'	c	
S'	$-S$	
R'	R	
p'	$p - a$	
$p' - a'$	p	
$p' - b'$	$-(p - c)$	
$p' - c'$	$-(p - b)$	
r'	$-r_a$	
r'_a	$-r$	Si on applique ces mêmes définitions algébriques dans (T) , on retombe sur les mesures positives habituelles $a, b, c, S, h_a, h_b, h_c, r, r_a, r_b, r_c$.
r'_b	r_c	
r'_c	r_b	
h'_a	h_a	
h'_b	$-h_b$	
h'_c	$-h_c$	
$M'N'^2$	MN^2	Remarquons encore que les relations (II) entre lettres accentuées et celles qui ne le sont pas sont toutes réciproques (ainsi $p' = p - a$ et $p = p' - a'$).

8. *Grandeurs homologues et formules parallèles.* — Prenons une relation quelconque entre des grandeurs remarquables du triangle, par exemple

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad (\text{Grelle}).$$

(1) Voir notre article *Sur la géométrie du cycle*, « Bulletin de l'A.P.M. » de novembre 1951.

Cette formule peut être considérée comme une identité entre les paramètres indépendants a, B, C , soit :

$$\frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}} = 4 \frac{a}{2 \sin(B+C)} \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

dans laquelle nous pouvons aussi accentuer les lettres. Mais alors (puisque par définition r', R', A' s'expriment par a', B', C' comme r, R, A par a, B, C), elle s'écrit :

$$r' = 4R' \sin \frac{A'}{2} \sin \frac{B'}{2} \sin \frac{C'}{2}, \text{ ou, en remplaçant les grandeurs algébriques par leurs}$$

valeurs tirées du tableau II : $-ra = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$, ou encore

$$ra = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \quad (\text{Jacobi}).$$

Appelons *grandeur homologue* d'une grandeur du triangle ABC, la grandeur algébrique qui lui correspond quand on passe de (T) à (T'), c'est-à-dire celle qui lui fait face dans le tableau (II), quand on accentue la lettre qui la représente. On obtient alors la règle :

Toute relation dans le triangle donne une *formule parallèle* en remplaçant par leurs homologues les grandeurs qui y figurent.

Nous laissons au lecteur le soin de traduire quelques relations comme :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$S = pr = r^2 \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = r r_a \cot \frac{B}{2} = \frac{r_a r_b r_c}{p}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}, \quad p^2 = r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a.$$

9. *Grandeur homologue d'un segment.* — Considérons la formule d'Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Les coordonnées de O, I dans (T) et leurs homologues O, I_a dans (T') ont même expression en fonction des paramètres a, B, C de leurs figures respectives (§ 2 et § 3). Donc si $OI^2 = f(a, B, C)$ dans (T), $OI_a^2 = f(a', B', C')$ dans (T'). Mais nous avons vu (§ 8) que si

$$R^2 - 2Rr = f(a, B, C), \quad R^2 + 2Rr_a = R' - 2R'r' = f(a', B', C').$$

D'où $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$.

Donc, si deux points M, N quelconques d'un triangle ont pour homologues M', N', la grandeur homologue de $\overline{MN}^2$ est $\overline{M'N'}^2$. Ceci permet de traduire des formules

telles que $\frac{AI^2}{bc} + \frac{BI^2}{ca} + \frac{CI^2}{ab} = 1$ ou $I_b I_c \cdot I_c I_a \cdot I_a I_b = 16R^2 p$.

On voit maintenant aussi pourquoi, au signe près éventuellement, $h'_a, h'_b, h'_c, R', r', r'_a, r'_b, r'_c$ sont égaux à $h_a, h_b, h_c, R, r_a, r, r_c, r_b$: c'est que HA et $I_a T_a$, par exemple, sont homologues de HA et IT (en désignant par T, T_a les pieds des perpendiculaires abaissées de I et I_a sur BX).

10. *Résumé.* — Tout ce qui précède se résume dans l'énoncé :

Tout théorème et toute formule sur le triangle donne une *forme parallèle*, en y substituant aux éléments géométriques et aux grandeurs leurs homologues (tableaux de substitutions I et II) (1).

(1) La méthode que nous venons d'exposer s'étend facilement à d'autres figures comme le triangle sphérique ou le tétraèdre.

Le présent article résume un passage de : *Le Triangle Orienté* (en vente chez l'auteur,

Écriture des égalités numériques dans les Problèmes

Depuis le mois d'août 1952, la Direction de l'Enseignement Primaire a imposé par des instructions parues au *B.O.* l'usage des conventions de l'Association Française de Normalisation (A.F.N.O.R.) pour les abréviations et l'écriture des symboles d'unités après les nombres, sans *s* au pluriel et sans point, soit : 7,45 m ; 3,125 kg.

Par contre, rien n'est fixé pour l'écriture des égalités numériques figurant dans les problèmes. Les Professeurs de Physique et ceux de l'Enseignement Technique, qui en font usage constant, suppriment les symboles au calcul du premier membre pour ne les faire qu'au résultat du second.

Exemples :

a) Longueur totale en mètres : $8 + 5 + 7 = 20 \text{ m.}$

b) Prix de 56 m² de peinture à 500 F. le m² : $500 \times 56 = 28\,000 \text{ F.}$

c) Aire d'un rectangle en m² : $3 \times 4 = 12 \text{ m}^2.$

Or, rares sont les auteurs de livres de Sixième qui ont adopté ce système. Il semble qu'ils n'acceptent pas une égalité ne contenant l'unité qu'au second membre et écrivent :

a) $8 \text{ m} + 5 \text{ m} + 7 \text{ m} = 20 \text{ m.}$

Remarquons en passant que s'il s'agit d'objets quelconques (arbres, bornes, etc...) au lieu d'unités, on ne peut pas utiliser d'abréviations.

b) $500 \text{ F} \times 56 = 28\,000 \text{ F.}$

Pour éviter les confusions, l'élève devra bien distinguer les deux termes du produit, le premier concret, de même nature que le résultat, le second abstrait n'étant qu'un opérateur, alors que dans l'énoncé il représente des m².

c) Enfin, ici, on obtient au second membre une unité nouvelle déduite de celles du premier par une équation aux dimensions : $S = L^2$. Il faudrait écrire, comme le font encore certains instituteurs : $S = 1 \text{ m}^2 \times 3 \times 4 = 12 \text{ m}^2$. Cependant, les auteurs de Sixième ne vont pas jusque-là et adoptent l'écriture des Physiciens.

Pourquoi donc ne pas l'adopter dans tous les cas ? On aurait ainsi un système unique définitif et pratique.

C'est la question que je pose à l'A.P.M. en lui demandant de faire une enquête parmi ses membres, en particulier parmi ceux qui enseignent en Sixième.

F. HÉRAUT (Collège Jean-Jaurès, Castres, Tarn).

Sur un problème national de Baccalauréat

Depuis plusieurs sessions, dans l'Académie d'Aix-Marseille tout au moins, le problème de mathématiques de la seconde partie (Série M.E.) n'apporte guère que des déceptions aux candidats, à leurs professeurs et aux examinateurs ; je n'ai pas l'impression, bien au contraire, que celui de juin 1953, commun à toutes les Universités, ait été plus favorisé.

Il est, à présent, traditionnel de désigner la classe de M.E. par la « classe de la géométrie » ; et, personnellement, je crois trop à l'efficacité culturelle des méthodes géométriques pour regretter cette dénomination, mais — à moins d'être très fortement jalonnés — certains problèmes de géométrie pure me paraissent beaucoup plus contestables comme moyens de juger des candidats, et, c'est un fait, que les problèmes de « type non jalonné » conduisent souvent à des classements inexacts ou, encore, ne permettent aucun classement. Dans le problème précité (juin 1953, série M.E.) de nombreux candidats, pour démontrer qu'une droite en bissectait deux autres, ont cherché à l'inclure dans un faisceau harmonique (?) qui aurait possédé deux rayons homologues perpendiculaires ; l'inefficacité de cette idée ne la condamne pas *a priori*

prix : 150 fr.). Nous y étudions plus généralement comment, par des conventions convenables d'orientation et de signes, on peut donner aux théorèmes et aux formules une forme telle, qu'ils s'appliquent à tous les cas d'une figure variable.

mais... fait perdre des minutes précieuses. Une autre partie (lieu de P) de ce même problème conduisait à une « figure » qui rappelait celle que l'on peut étudier pour montrer que toute conique peut être considérée comme la section par son plan d'une infinité de cônes de révolution : bien des candidats, guidés (mal) par cette analogie visuelle, ont repensé toutes leurs connaissances (pas nécessairement réduites à zéro) sur les coniques et n'ont pas avancé davantage que ceux qui n'ont pensé à rien.

Dans les autres épreuves du Baccalauréat les candidats ont à parcourir une distance donnée sur une route à peu près indiquée ; dans trop d'exercices de géométrie ils ont d'abord à choisir, sans guide, les outils efficaces dans toute l'étendue d'un cours déjà vaste (réparti sur plusieurs années) et parfois délicat : ensuite ils ont à s'en servir.

J'étais de service lors du déroulement de l'épreuve écrite de Sciences physiques (juin 1953, série M.E.) ; sans doute n'avais-je plus présentes à l'esprit deux ou trois formules visant la « conductance » (ou « l'impédance »), mais les paragraphes du cours, auxquels il fallait penser pour résoudre ce problème de physique, sautaient aux yeux à première lecture, et je dois avouer que j'ai moins hésité sur le problème de physique que sur celui de géométrie.

Je suis partisan de la suppression des épreuves orales — beaucoup trop hâtives et fiévreuses et encombrées par trop d'acteurs et de spectateurs — du Baccalauréat, mais il me semble qu'à la seconde partie M.E. l'étendue, la difficulté et la valeur formatrice du programme de mathématiques exigeraient alors deux épreuves écrites de mathématiques ; l'une, de 3 heures, serait un problème (épreuve de « composition ») où la géométrie jouerait un rôle essentiel, mais où il ne faudrait pas craindre de suggérer fortement — aux points critiques — l'emploi des théorèmes qui paient : l'autre de 3 heures également comprendrait une question de cours et trois ou quatre exercices très courts qui seraient des applications immédiates du cours.

Je crois qu'il faudrait tenter de faire quelque chose pour qu'à l'issue de l'épreuve de mathématiques (je vise la seconde partie) les candidats à leur commune et mutuelle question : « Et toi ? qu'est-ce que tu as fait ? », ne répondent pas presque tous : « A peu près rien : le début du n° paragraphe et le milieu du p° . » A la fin d'une année scolaire particulièrement chargée et fatigante c'est bien décevant... pour les « bons » d'abord et pour... nous aussi.

Fernand MOUTON, *Professeur de Mathématiques Élémentaires
au Lycée Thiers, à Marseille*

Théorème de Salmon

Soient A et B deux points, (a) et (b) leurs polaires par rapport au cercle directeur (C). Le rapport des distances OA et OB est égal au rapport des distances de chaque point à la polaire de l'autre.

I. Supposons A et B extérieurs à (C), et considérons les cercles (A) et (B) de centres A et B, orthogonaux à (C). Chaque *polaire* est l'*axe radical* de (C) avec le cercle (A) ou (B) correspondant (*). On a :

$$(\rho) A(O) - (\rho) A(B) = 2 \overline{OB} \cdot \overline{A'A},$$

$$(\rho) B(O) - (\rho) B(A) = 2 \overline{OA} \cdot \overline{B'B},$$

d'où, si les deux premiers membres sont égaux :

$$2 \overline{OB} \cdot \overline{A'A} = 2 \overline{OA} \cdot \overline{B'B},$$

ou :

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'A}}{\overline{B'B}}.$$

Or, en désignant par R_1 et R_2 les rayons de (A) et (B), les premiers membres valent :

$$R_1^2 - (AB^2 - R_2^2) = R_1^2 + R_2^2 - AB^2.$$

Cette élégante démonstration nécessite que les deux cercles (A) et (B) existent

(puisque'il est interdit de parler d'éléments imaginaires en Mathématiques Élémentaires). L'élève auquel j'ai fait cette objection a repris l'étude de sa démonstration et, de lui-même, trouvé qu'elle serait valable pour A et B intérieurs à (C) (tous deux ou séparément) si on admettait que le *carré des rayons* de (A) et (B) puisse être *négatif*.

En effet, pour que (a) soit axe radical de (C) avec un cercle (A) de rayon R_1 , on trouve facilement que :

$$R_1^2 = \overline{OA}^2 - R^2 < 0,$$

ou

$$R_1^2 = \overline{AO} \cdot \overline{AH} < 0.$$

Ceci admis, le premier calcul reste valable et le théorème est démontré dans tous les cas.

L'utilité d'éléments géométriques imaginaires s'est donc présentée tout naturellement à l'esprit d'un bon élève de Mathématiques Élémentaires âgé de seize ans.

II. En s'inspirant de sa première idée, on peut d'ailleurs donner une démonstration sans rayons « fictifs ». Il suffit de considérer (a), polaire de A, comme axe radical du cercle (C) avec le cercle (OA) de diamètre OA, ce qui est classique. Soient alors, α et β les milieux de OA et OB (1) :

$$(1) \quad (p) A(O) - (p) A(\beta) = 2 \overline{O\beta} \cdot \overline{A'A},$$

$$(2) \quad (p) B(O) - (p) B(\alpha) = 2 \overline{O\alpha} \cdot \overline{B'B},$$

d'où, si les premiers membres sont égaux, $\overline{O\beta} \cdot \overline{A'A} = \overline{O\alpha} \cdot \overline{B'B}$ et par suite :

$$\frac{\overline{A'A}}{\overline{B'B}} = \frac{\overline{O\alpha}}{\overline{O\beta}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}.$$

Or le premier membre (1) vaut : $\overline{AO}^2 - R^2 = (\overline{A\beta}^2 - \overline{O\beta}^2)$. On calcule facilement $\overline{A\beta}^2$ dans le triangle AOB en posant $\overline{O\alpha} = \overline{O\beta} = \varphi$,

$$\overline{A\beta}^2 = 4\overline{O\alpha}^2 + \overline{O\beta}^2 - 4\overline{O\alpha} \cdot \overline{O\beta} \cdot \cos \varphi$$

et le premier membre (1) devient : $-R^2 + 4\overline{O\alpha} \cdot \overline{O\beta} \cdot \cos \varphi$.

Sa symétrie prouve que le premier membre (2) de la seconde égalité lui est égal.

Démonstration de P. GAL, élève de Mathématiques 1 du Lycée Janson-de-Sailly, communiquée par M. L. RENARD.

(*) Le lecteur est prié de faire les figures.

Invitation de l'Union des Physiciens

Une Conférence sera faite au Musée Pédagogique le Jeudi 4 Février 1954 à 17 h. 30 par MM TOUSSAINT et GUINIER, professeurs au Lycée Janson-de-Sailly, sur le « Stage aux Etats-Unis des Professeurs de Physique »

Le Conseil de l'Union des Physiciens invite très cordialement les membres de l'A. P. M. E. P. à assister à cette Conférence.

Le Président de l'Union des Physiciens,
J. LE RÉVÉREND.

Le Gérant : L. PARAZINES.

TEXTES D'EXAMENS 1953

I. Baccalauréat

Première Partie

SESSION DE JUIN

France Métropolitaine. A). I. *Cours.* — 1. Etablir les formules donnant la somme et le produit des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Condition pour qu'il existe deux nombres dont la somme ait une valeur donnée s et le produit une valeur donnée p . — 2. Démontrer qu'un trinôme du second degré qui ne s'annule pour aucune valeur de x a toujours le même signe, quel que soit x . — 3. Définir et calculer, sans appliquer de formule, la dérivée de la fonction $y = -x^2 + x + 6$ pour $x = -2$. Signification géométrique.

II. *Problème.* — On donne dans un plan (P) un triangle isocèle ACB ($AB = AC = a$) dont l'angle au sommet A vaut 120° . Soit H le milieu de BC.

1° Le cercle de centre H et de rayon HA coupe la droite AB en un point B' distinct de A. Calculer, en fonction de a , la longueur du segment AB'.

2° Soient Bx, Cy, Hs trois demi-droites de même sens perpendiculaires au plan (P) et M un point arbitrairement choisi sur Bx ; on écrira $BM = x$. Démontrer géométriquement qu'il existe sur la demi-droite Cy un point N et un seul tel que l'angle NAM soit droit.

Calculer CN = y en fonction de x et de a.

Application numérique. — M étant défini par $x = \frac{a}{2}(\sqrt{11} + 3)$ calculer la valeur de y qui définira le point N, le rayon R de la sphère de diamètre MN, l'angle du plan tangent en M à cette sphère et de la droite Bx.

3° Soit O un point arbitrairement choisi sur Hs ; on posera $HO = z$. Calculer, en fonction de z et de a, le rayon de la sphère (O) de centre O passant par A. Comment faut-il choisir z pour que cette sphère coupe la demi-droite Bx ou lui soit tangente ?

Lorsqu'il en est ainsi, soit M un point commun à la sphère (O) et à la droite Bx et N le symétrique de M par rapport à O. Démontrer que l'angle MAN est droit.

En déduire le lieu des centres des sphères de diamètre MN, M et N étant choisis comme dans le 2°.

B). I. *Cours.* — 1. Soit (D) une droite qui coupe un plan (P) en un point A. Qu'appelle-t-on angle de la droite (D) et du plan (P) ? Que peut-on dire de l'angle de la droite (D) avec une droite du plan (P) passant par le point A ?

2. Définition d'une pyramide régulière et calcul de l'aire latérale de cette pyramide.

3. Condition pour qu'une sphère et un plan aient des points communs. Nature de l'intersection, lorsqu'elle existe.

II. *Problème.* — 1° Développer et ordonner suivant les puissances décroissantes de x les polynômes $(x-1)^2$, $x(x-1)^2$. Déterminer a et b de manière que le polynôme $(x-1)^2(ax+b)$, développé et ordonné suivant les puissances décroissantes, s'écrive x^3-3x+2 .

2° Etudier les variations des deux fonctions de la variable x :

$$y_1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$$

$$y_2 = \frac{1}{x}$$

et construire les courbes représentatives (C_1) et (C_2) de ces fonctions. Vérifier que le point A d'abscisse 1 et d'ordonnée 1 est commun à ces deux courbes. Calculer le coefficient angulaire de la tangente en A à la courbe (C_1) et le coefficient angulaire de la tangente en A à la courbe (C_2) . Dessiner les deux courbes rapportées aux mêmes axes de coordonnées.

3° Démontrer que les courbes (C_1) et (C_2) ont un point commun B et un seul distinct de A, en calculant les coordonnées du point B.

A', C, C', M, M', TA). I. *Cours.* — 1. Etude du signe du trinôme du 2° degré sur les exemples suivants :

$$-2x^2 + 3x - 1, \quad -x^2 + 2x + 15 ;$$

Application. — Résoudre les inéquations simultanées :

$$-2x^2 + 3x - 1 < 0, \quad -x^2 + 2x + 15 > 0.$$

2. Définir et calculer sans appliquer de formule la dérivée de la fonction $y = -x^2 + 3x - 2$ pour la valeur $x = 1$. Signification géométrique.

3. Angle d'une droite et d'un plan : définition et propriété caractéristique.

II. *Problème.* — Un trièdre $Sxyz$ a ses deux faces sSx et sSy égales à un droit. La troisième face sSz est un angle aigu α . On considère sur les arêtes Sx , Sy , des points A, B tels que la droite AB soit perpendiculaire à SA, et sur Sz un point C.

On pose $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$.

1° Montrer qu'il existe une sphère circonscrite au tétraèdre SABC, dont le centre O est dans le plan sSy . Réciproquement, étant donné arbitrairement un point O dans l'angle sSy , existe-t-il des points A, B, C situés respectivement sur les arêtes Sx , Sy , Sz tels que O soit le centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre SABC ?

2° Montrer qu'il existe des points A, B, C tels que le dièdre d'arête AB du tétraèdre SABC ait pour mesure α (> 0). Quel est dans ce cas la valeur du rapport $\frac{c}{b}$?

3° Montrer que dans le cas précédent, le tétraèdre SABC est tel que l'on ait :
 $AB = SC$ et $AC = SB$.

Montrer qu'il est impossible de choisir les points A, B, C de façon qu'on ait en outre $BC = SA$.

Se plaçant toujours dans le cas des paragraphes 2 et 3, calculer en fonction de b , c , et α l'angle dièdre φ d'arête BC du tétraèdre SABC (on considérera l'aire de la projection du triangle ABC sur le plan sSy).

Montrer en déterminant l'une de ses fonctions trigonométriques qu'il existe un angle aigu α tel que l'on ait $\varphi = \alpha$.

T.B). I. *Cours.* — 1. Plan tangent à la sphère en un de ses points : définition, existence, propriété.

2. Plan perpendiculaire à une droite en un point de cette droite : définition, propriété.

3. Définir et calculer (sans utiliser de formule) la dérivée de la fonction $y = \frac{x}{x-3}$ pour la valeur $x=2$. Signification géométrique.

II. *Problème.* — On désigne par (C) la base inférieure et par (C') la base supérieure d'un cylindre de révolution de hauteur x et de diamètre $2x$. Ce cylindre est surmonté d'un cône de révolution de base (C'). La distance SH du sommet S du cône au plan du cercle (C) est donnée et égale à h .

1° Calculer les volumes respectifs V_1 et V_2 du cylindre et du cône en fonction de h et de x .

2° On désigne par Y le rapport $\frac{V_1}{V_2}$. Etudier et représenter graphiquement la variation de Y en fonction de x dans le cas particulier où h a la valeur numérique $h=2$.

3° On coupe l'ensemble par un plan passant par son axe.

Évaluer l'aire y de la section en fonction de h et de x .

Etudier et représenter graphiquement la variation de y en fonction de x en supposant encore $h=2$.

4° Quelles sont les valeurs de la dérivée de y aux extrémités de la courbe précédente ? En déduire la construction des tangentes à cette courbe en ces points.

5° Faire apparaître clairement sur la figure l'angle α des plans tangents au cylindre et au cône en un point de leur directrice commune (C').

Valeur de $\tan \alpha$?

T.B. 2° *épreuve* : Dans une usine, les salaires journaliers sont répartis en pourcentage et sous une forme simplifiée de la façon suivante :

SALAIRE	HOMMES	FEMMES
De 600 à 700 francs	30	45
De 700 à 800 francs ..	32	30
De 800 à 900 francs	24	19
De 900 à 1.000 francs	14	6
	100	100

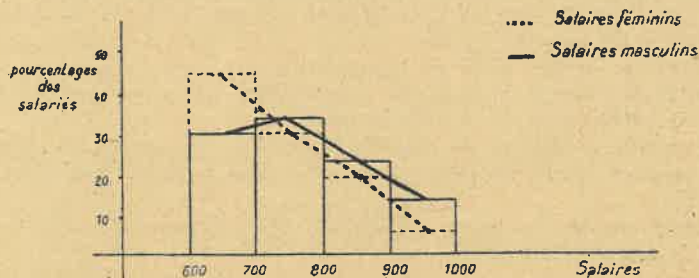
On demande :

1° La moyenne des salaires masculins : m ;

2° La moyenne des salaires féminins : m' ;

3° La moyenne des salaires d'un ménage : M .

Pour résoudre cette dernière question, on démontrera d'abord que $M = m + m'$ de la façon suivante : étant données une variable x pouvant prendre les valeurs x_1, x_2, x_3, x_4 de moyenne m , et une variable y pouvant prendre les valeurs $y_1, y_2,$



y_2, y_4 de moyenne m' , montrer que la variable $z = x + y$ (x et y se combinant de toutes les façons possibles) a pour valeur moyenne $M = m + m'$.

Peut-on généraliser dans le cas où les variables x et y prendraient n valeurs ?

Problème d'ordre économique : La représentation qui vous est fournie conforme aux données ci-dessus, vous paraît-elle générale, c'est-à-dire valable pour toutes les formes de l'activité économique ?

Pourriez-vous citer des exemples dans le commerce ou l'industrie confirmant ou au contraire infirmant cette répartition ?

Les syndicats féminins ont depuis longtemps revendiqué l'application de la formule : à travail égal, salaire égal.

Ces graphiques sont-ils en contradiction avec cette formule ? Sinon, quels sont les commentaires qu'ils vous inspirent ?

Martinique. A.B.) I. Cours. — 1. Définir et calculer la dérivée de la fonction $y = 3x^2 - 4x + 1$ pour $x = 1$.

Construire la tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 1. — 2. Lieu géométrique des perpendiculaires à une droite de l'espace, en un point de cette droite. — 3. Plan tangent à la sphère en l'un de ses points.

II. **Problème.** — On donne dans un plan (P) un losange ABCD, dont l'angle en A (angle BAD) est égal à 60° . On pose $BD = a$.

Par la grande diagonale AC du losange, on mène le plan (Q) perpendiculaire au plan (P). Dans ce plan (Q) on trace un segment AS de longueur a .

1° Montrer que si le triangle SBD est équilatéral la projection H du point S sur le plan (P) est le centre de gravité du triangle ABD. Dans la suite du problème on suppose cette condition remplie.

2° Calculer SH et SC en fonction de a . Vérifier que le triangle SBC est rectangle en B. Démontrer géométriquement cette propriété en utilisant les théorèmes sur la projection orthogonale d'un angle droit.

3° I étant le milieu de SC, montrer que le plan IBD est un plan de symétrie pour le tétraèdre SCBD et que le trièdre IBCD est trirectangle.

4° Calculer l'aire totale et le volume de la pyramide IBDS en fonction de a .

C.M.) I. Cours. — 1. Résolution de l'équation $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$. — Application. — Résoudre $\operatorname{tg} x \times \operatorname{tg} 3x = 1$. — 2. Etude et représentation graphique de la fonction $y = (x + 1)(3 - x)$.

Calculer la pente de la tangente au point d'abscisse $x = 3$. — 3. Plan tangent au cylindre à directrice circulaire.

II. **Problème.** — On donne un tétraèdre ABCD, de base BDC et tel que l'arête AD soit perpendiculaire au plan BCD. Soit DE la hauteur du triangle de base DBC relative à BC.

1° Démontrer que le plan ADE est perpendiculaire au plan ABC.

2° On trace dans la face ABC la hauteur BF relative à AC et dans la face DBC la hauteur BK relative à DC :

a. Montrer que le plan BFK est perpendiculaire au plan ABC ;

b. Montrer que l'orthocentre H du triangle ABC est la projection orthogonale sur ce plan de l'orthocentre N du triangle BCD.

3° On suppose le triangle de base BCD fixe ; le sommet A du tétraèdre se déplace sur une demi-droite Dx perpendiculaire au plan de base. Déterminer les lieux de H et de F.

4° Montrer que les six points CEHFKN sont sur une même sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

Réunion. A.B). I. *Cours.* — 1. Démontrer qu'il existe une sphère passant par quatre points non situés dans un même plan. Cas où les quatre points sont dans un même plan.

2. Plan tangent à la sphère.

3. Définition de deux plans perpendiculaires. Condition nécessaire et suffisante pour que deux plans soient perpendiculaires.

II. *Problème.* — 1° Etudier les variations de la fonction $y = (x - 1)(2 - x)$ et tracer la courbe représentative (C).

2° Soit A le point de l'axe $y'y$ qui a pour ordonnée $\frac{1}{2}$. Trouver l'équation d'une droite (D) de pente m qui passe par A. Discuter, suivant les valeurs de m , le nombre de points communs à la courbe (C) et à la droite (D). Coordonnées de ces points communs.

3° Vérifier que, dans les deux cas où la droite (D) et la courbe (C) n'ont qu'un point commun, la droite est tangente à la courbe: Quel est l'angle des deux tangentes issues de A ?

C.M). I. *Cours.* — 1. Aire de la zone. Aire de la sphère.

2. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette orthogonalement sur un plan suivant un angle droit.

3. Résoudre l'équation $\cos x = \cos a$.

Application. — x et y représentant les mesures algébriques, supposées comprises entre -2π et $+2\pi$, de deux arcs exprimés en radians, déterminer x et y sachant que : $\cos x = \cos y$. $2x + y = 2\pi$.

II. *Problème.* — On donne dans un plan (P) un cercle de centre O et de rayon R. Un hexagone régulier ABCDEF est inscrit dans ce cercle. On considère la pyramide de base ABCDEF et de sommet S sur la perpendiculaire en O au plan (P).

1° H désignant le milieu du segment AB, démontrer que les plans SOH et SAD sont deux plans de symétrie de la pyramide.

2° Sachant que $OS = \frac{3R}{2}$, calculer la surface totale et le volume de cette pyramide en fonction de R.

3° Dans la même hypothèse ($OS = \frac{3R}{2}$) montrer qu'il existe une sphère de centre I passant par les 7 points ABCDEFS et calculer SI.

4° Déterminer $OS = h$ pour que le centre de la sphère passant par ABCDEFS soit aussi le centre d'une sphère tangente au plan (P) et aux arêtes latérales de la pyramide.

SESSION DE SEPTEMBRE

France Métropolitaine. A). I. *Cours.* — 1. Calculer pour $x = 3$ la dérivée de $y = -x^2 + 3x + 2$.

Construire la tangente à la courbe représentative de la fonction y de la variable x , au point A d'abscisse 3 (on ne demande pas de construire cette courbe). — 2. Montrer que par un point O situé hors d'un plan (P), on peut mener un plan parallèle au plan (P) et un seul. — 3. Etudier le signe du trinôme $-x^2 + x + 6$ suivant la valeur donnée à x .

II. *Problème.* — 1° Calculer les côtés d'un triangle isocèle AOB connaissant l'angle au sommet AOB qui mesure 120° et la hauteur relative à la base OH, qui a pour mesure $OH = a\sqrt{2}$, a étant une longueur donnée.

2° On mène par O la droite X'OX perpendiculaire au plan (P) du triangle AOB. On désigne par I le point de la demi-droite OX tel que le triangle IAB soit équilatéral et par J le point de la demi-droite OX' tel que le triangle JAB soit rectangle. Calculer OI, OJ et déterminer la nature des triangles IAJ, IBJ.

3° Déterminer le centre Ω et le rayon R de la sphère (Σ) circonscrite au tétraèdre ABIJ. Soit M un point du segment OI ; on écrit $OM = x$. Calculer, en fonction de x , l'aire S de la section de (Σ) par le plan (P') mené par M parallèlement à (P).

Etudier les variations de la fonction $y = \frac{S}{\pi}$ lorsque x prend toutes les valeurs que lui permet sa définition. Représenter graphiquement ces variations en supposant $a = 1$ cm.

4° Déterminer le centre du cercle circonscrit au triangle ABM et calculer son rayon en fonction de x .

B). I. Cours. — 1. Définition d'une droite perpendiculaire à un plan. Démontrer que, par un point d'un plan, il passe une droite perpendiculaire à ce plan et une seule.

2. Soient (P) un plan et O un point situé hors du plan. Définir la longueur de la perpendiculaire OA et de l'oblique OB à ce plan. Condition pour que deux obliques soient égales. Lieu géométrique des pieds des obliques OM ayant une longueur donnée, supérieure à OA.

3. Définition des plans parallèles. Démontrer qu'il existe un plan et un seul passant par un point O situé hors d'un plan (P), parallèle à ce plan.

II. Problème. — On considère la fonction $y = -(x-1)(x-5)$.

1° Etudier ses variations et construire la courbe représentative (C).

2° On appelle A le point commun à (C) et à l'axe Oy, B et C les points communs à (C) et à l'axe Ox. Calculer les coefficients angulaires des tangentes à (C) en A, B, C, puis construire ces tangentes.

3° Par chaque point M d'abscisse négative ou nulle de (C), on mène la parallèle à la bissectrice de l'angle xOy. Cette parallèle coupe (C) en M et en un second point M'. On demande le lieu géométrique du milieu de MM' lorsque M occupe toutes les positions permises par sa définition.

A', C, C', M, M', T.A). I. Cours. — 1. Expressions de $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$ en fonction de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$. Application. — Sachant que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, calculer $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$.

2. Plus courte distance de deux droites : définition, existence.

3. Aire de la zone.

II. Problème. — On considère une pyramide SABC dont la base est un triangle équilatéral ABC de hauteur h . Sur la hauteur AH de ce triangle, on prend le point O tel que $AO = \frac{AH}{3}$. On élève en O la perpendiculaire au plan et sur cette perpendiculaire on prend le point S tel que $OS = BC$.

1° Montrer que les droites AS et BC sont orthogonales.

2° Calculer les longueurs des segments SH, SA, SB, SC.

3° Par un point J situé entre O et H, on mène le plan (P) parallèle aux droites SO et BC. Ce plan (P) coupe AB en M, SB en N, SC en Q et AC en R. Quelle est la nature du quadrilatère MNQR ? Calculer son aire y en fonction de h et de la mesure x du segment AJ.

4° Représenter graphiquement les variations de la fonction y de la variable x quand J décrit OH.

5° Utiliser le graphique précédent pour déterminer l'existence et le nombre des solutions de l'équation $y = l^2$, l étant une longueur donnée. En déduire les conditions d'existence de points J tels que l'aire du quadrilatère MNQR soit égale à l'aire d'un carré de côté l . Préciser, suivant la valeur de l , la position de ce point J quand il existe et est unique, les positions des deux points J trouvés lorsque le problème admet deux solutions.

T.B). I. *Cours.* — 1. Définition d'une progression arithmétique. Propriété des termes équidistants des extrêmes ; somme des termes d'une progression arithmétique.

Application. — Calculer la somme des nombres impairs de 101 inclusivement à 1.001 inclusivement.

2. Lignes de plus grande pente d'un plan : définition, existence.

3. Propriétés des obliques et de la perpendiculaire menées à un plan par un point extérieur à ce plan. Réciproques.

II. *Problème.* — 1° Etudier suivant les valeurs de x le signe de l'expression :

$$(2x - 1)(x + 1) - (x + 1)(x + 2).$$

2° Etudier les variations des fonctions :

$$y_1 = (2x - 1)(x + 1)$$

et

$$y_2 = (x + 1)(x + 2).$$

Construire avec le même système d'axes de coordonnées rectangulaires les courbes (C_1) et (C_2) représentant ces variations. (On prendra le centimètre comme unité de longueur).

3° Calculer les coordonnées des points d'intersection A et B de ces deux courbes. A désignant celui des deux points dont l'abscisse est la plus petite.

Retrouver à l'aide de ces graphiques les résultats de la première question.

4° m désignant un nombre donné, démontrer que la droite représentative de la fonction :

$$y = m(x + 1)$$

passé par A. Cette droite rencontre en outre (C_1) en M_1 et (C_2) en M_2 . Calculer les coordonnées de ces deux points et celles du milieu P de $M_1 M_2$. Déterminer m de façon que le milieu P de $M_1 M_2$ appartienne à la fois aux deux courbes (C_1) , (C_2) .

T.B). 2° *Epreuve.* — Une région agricole est divisée en lots cultivables à peu près carrés, dont les côtés forment la progression arithmétique suivante : a , $a + r$, $a + 2r$, $a + 3r$, ... $a + (n - 1)r$.

On veut caractériser l'ensemble de ces lots par une valeur typique : moyenne ou médiane

On évalue le lot type en prenant : 1° La moyenne des côtés ; 2° La moyenne des surfaces ; 3° La médiane des côtés ; 4° La médiane des surfaces.

Calculer chacune de ces valeurs types.

Montrer que les deux premières moyennes ne sont pas équivalentes. Quelle est la plus grande ? (On comparera la surface du carré moyen dans le premier cas et celle du carré moyen dans le second cas).

Montrer que les valeurs médianes sont équivalentes dans le troisième et le quatrième cas.

Quelle valeur typique choisira-t-on ?

On répondra à toutes les questions en prenant d'abord $n = 3$, puis n quelconque.

PROBLEME D'ORDRE ECONOMIQUE

Le bureau des statistiques du Ministère de l'Agriculture fournit sur l'évolution du territoire cultivé de 1910 à 1951 le tableau suivant :

ANNÉES	TERRES labourables	HERBAGES pâturages	VIGNES	CULTURES maraîchères	CULTURES diverses	Territoire cultivé	SURFACE totale du territoire	OBSERVATIONS
1910.....	23.679	10.063	1.684	248	1.124	36.798	52.956	Sans l'Alsace et la Lorraine.
1914. ...	22.185	9 861	1.597	258	913	34.818	52.956	Guerre 1914-1918.
1918.....	20.881	10.235	1.567	275	801	33.759	52.956	
1928.....	22.168	11.414	1.584	312	765	36.243	55.104	Av. Mosel., B.-Rh., H.-Rh.
1938.....	20.196	11.776	1.605	437	502	34.516	55.104	Guerre 1939-1945.
1945.....	17.324	12.024	1.525	624	501	31.998	55.104	
1951.....	18.578	12.277	1.572	534	497	33.458	55.160	Av. Brigue et Tende.

NOTA. — Les surfaces sont exprimées en milliers d'hectares.

Quelles indications d'ordre économique, tirez-vous de l'examen de ce tableau ?

Martinique. A, B). I. *Cours.* — 1. Sphère. Intersection avec une droite ; tangentes à la sphère.

2. Démontrer que si une droite est orthogonale à deux droites concourantes d'un plan elle est orthogonale à toutes les droites du plan.

3. Variation de la fonction $y = x^2 - 4x - 5$. Construire la courbe représentative et la tangente à cette courbe au point d'abscisse $x = 0$.

II. *Problème.* — Soit dans un plan fixe (P) un angle droit $\widehat{xOy}$; soit D la perpendiculaire au plan (P) menée par O. Sur D on prend un point fixe A tel que $OA = 2a$. Soit I le milieu de OA. On mène par A la demi-droite Az parallèle à Oy et de même sens. On considère un point B de Ox et un point C de Az tels que $IB = IC$. On mène par B la droite Δ parallèle à Oy. Soit H le pied de la perpendiculaire menée de C à Δ .

1° Montrer que le quadrilatère ACHB est un rectangle et que le milieu M de BC est équidistant des cinq points O, A, B, C, H.

2° Montrer que si B et C varient sur Ox et Az de sorte que l'on ait toujours $IB = IC$, le point M se déplace sur une droite fixe.

3° Lieu d'un point P appartenant au segment BC et partageant ce segment dans un rapport fixe :

$$\frac{PB}{PC} = k.$$

4° On pose $OB = x$ et on prend sur Ox un point E tel que $OE = a$. En supposant $x > a$, calculer le volume V du tétraèdre MAEB. Déterminer x pour que V soit égal au tiers du volume du cube d'arête OI.

x ayant la valeur trouvée ci-dessus, calculer MB, ME et la hauteur issue de A du tétraèdre MAEB.

C.M). I. *Cours.* — 1. Volume du tronc de pyramide à bases parallèles.

2. Etablir la formule donnant le cosinus de la somme de deux arcs. En déduire les formules donnant le sinus de la somme de deux arcs, le cosinus et le sinus de la différence de deux arcs.

3. Aire d'une zone sphérique. Aire de la sphère.

II. *Problème.* — On considère les fonctions $y(x) = mx^2 - 2(m+1)x + m$ et leurs courbes représentatives C_m , chacune d'elles correspondant à une valeur de m .

1° Montrer que toutes les courbes passent par un même point A d'abscisse + 1. Étudier le sens de la concavité de ces courbes suivant les valeurs de m . Construire sur un même graphique les courbes C_1 et C_2 correspondant aux valeurs $m = 1$, $m = -2$.

2° Montrer que ces deux courbes et toutes les courbes C_m ont la même tangente au point commun A.

3° Déterminer les points d'intersection des courbes C_m avec la droite d'équation $y = -x - 1$. Calculer les pentes des tangentes aux courbes C_m en ces points.

Utiliser ces résultats pour déterminer la courbe C_m tangente à la droite Ox . (On déterminera C_m par son équation).

4° Discuter le nombre des points d'intersection d'une courbe C_m avec une droite de coefficient angulaire p , issue de O origine des coordonnées. Déterminer pour une courbe C_m donnée les droites correspondant aux deux valeurs extrêmes trouvées pour p . Montrer que l'une de ces droites Δ ne dépend pas de C_m ; l'autre dépend de m et sera notée Δ_m .

Quelles sont les coordonnées des points d'intersection d'une courbe C_m avec les droites Δ et Δ_m (l'indice m étant le même pour C_m et Δ_m) ? Montrer que Δ et Δ_m sont tangentes à la courbe C_m . Déterminer le lieu du point de contact de C_m et Δ_m quand m varie.

Réunion. A.B). I. *Cours.* — 1. Exposer sur l'exemple $2x^2 - 7x + 4 = 0$ la méthode générale de résolution de l'équation du second degré. — 2. Variation de la

fonction $y = -x^2 + 2x + 2$. — 3. Soit la fonction $y = \frac{1}{2x}$. Démontrer que cette fonction est décroissante. Démontrer que la courbe représentative des variations de cette fonction admet un centre de symétrie et deux axes de symétrie.

Application. — Utiliser la courbe précédente pour résoudre et discuter graphiquement le système d'équations :

$$2xy = 1 ; x + y - m = 0.$$

II. *Problème.* — Soient A et B deux points fixes diamétralement opposés d'une circonférence de rayon R. M un point de la circonférence tel que $\widehat{BAM} = 30^\circ$.

Sur la perpendiculaire en A au plan de la circonférence on porte une longueur $AS = x$.

1° Montrer que le triangle SMB est rectangle ; calculer ses côtés en fonction de R et de x .

2° Montrer que le dièdre d'arête SM (formé par les plans ASM et MSB) est droit.

3° Calculer en fonction de R et de x le volume de la pyramide SAMB ; déterminer x pour que ce volume soit égal à $\frac{R^3 \sqrt{3}}{3}$.

4° x ayant la valeur précédemment trouvée, déterminer le centre et calculer le rayon de la sphère circonscrite à la pyramide SAMB.

C, M). I. *Cours.* — 1. Plans tangents à une sphère passant par une droite donnée. — 2. Définir et calculer pour $x=3$ la dérivée de $y = \frac{x-1}{2x-4}$. Interprétation graphique. — 3. Volume du tronc de pyramide à bases parallèles.

II. *Problème.* — On donne l'équation du second degré en x :

$$(1) \quad mx^2 - mpx + p = 0.$$

1° Former la relation à laquelle doivent satisfaire les paramètres m et p pour que les racines a et b de l'équation (1) soient l'une le sinus, l'autre la tangente d'un même angle a :

$$(a = \sin a, b = \operatorname{tg} a).$$

2° De la relation trouvée au 1° on tire p en fonction de m et l'on substitue dans l'équation (1). Cette équation ne dépend plus alors que d'un paramètre m . Exprimer en fonction de m :

$$a = \sin a \text{ et } b = \operatorname{tg} a, \text{ ainsi que } \frac{1 - \cos a}{\sin a} \text{ et } \frac{\sin a}{1 + \cos a}.$$

En déduire la valeur de m en fonction de a .

3° m et p satisfaisant toujours à la condition du 1°, calculer m pour que l'on ait $mp = -\frac{1}{2}$. En déduire les valeurs de $\operatorname{tg} a$ et de a .

4° Toujours dans les conditions du 1°, calculer m en fonction de a . Discuter.

Appliquer au cas $a = \frac{1}{2}$; en déduire $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$ et $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$.

Seconde Partie

SESSION DE JUIN

France Métropolitaine. M, MT). I. *Cours.* — 1. x étant exprimé en radians, limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers zéro. Dérivée de $y = \sin x$. Que deviennent les résultats précédents quand x est exprimé en degrés ? — 2. Résolution et discussion de l'équation :

$$a \cos x + b \sin x = c.$$

Une seule méthode est demandée. — 3. Résoudre un triangle connaissant les trois côtés. Retrouver par voie trigonométrique les inégalités fondamentales entre les côtés du triangle.

II. *Problème.* — Soient D et D' deux droites parallèles et deux points fixes O et A sur la première.

On considère un couple de points M et M' variables sur D et restant symétriques par rapport à A.

1° Construire les cercles (C) et (C') tangents à D', passant par O et respectivement par M et M'.

En désignant par N et N' les points de contact des cercles (C) et (C') avec D', montrer que les droites MN et M'N' se rencontrent en un point fixe I. Prouver que le second point de rencontre B des cercles (C) et (C') se déplace sur une droite fixe ; préciser le lieu de B.

2° La tangente en M à (C) et la tangente en M' à (C') se rencontrent en un point P. Montrer que les droites PM et PM' admettent PI pour l'une de leurs bissectrices et qu'elles enveloppent un cercle fixe (T).

Montrer que le point P se déplace sur la droite I'A', I' désignant le symétrique de O par rapport à I et A' le symétrique de O par rapport à A ; préciser le lieu de P.

Montrer qu'on retrouve au point P l'angle des tangentes en O aux deux cercles (C) et (C'). Construire un couple de points M et M' symétriques par rapport à A et tel que les cercles (C) et (C') soient orthogonaux ; quel est le nombre des solutions ?

3° On soumet les cercles (C) et (C') à l'inversion de centre O et de module OI^2 ; comparer la figure ainsi obtenue à la figure formée par les tangentes MP et MP' ; quel est l'inverse Q de B ?

L'emploi de cette inversion permet-il une nouvelle construction des couples de points M et M' donnant deux cercles (C) et (C') orthogonaux ?

Martinique. M). I. *Cours.* — 1. Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris entre ces côtés. — 2. Dérivée de $y = \sin x$. On déterminera la limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers zéro. — 3. Transformer en un produit les expressions $\sin a + \sin b$, $\sin a - \sin b$, $\cos a + \cos b$, $\cos a - \cos b$.

II. *Problème.* — Soient deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, sur Ox un point A d'abscisse positive a , sur Oy un point B d'ordonnée positive b . C est le 4° sommet du rectangle de côtés OA et OB, I le point de rencontre de ses diagonales

1° M étant un point de la droite AC et N un point de la droite BC, on pose $AM = y$ et $BN = x$.

Etablir la relation qui lie x et y lorsque le cercle (M) de centre M passant par A, et le cercle (N) de centre N passant par B, sont orthogonaux. En déduire que, dans ces conditions, le lieu du 4° sommet D du rectangle de côtés CM et CN est la médiatrice de OC. Quel est le lieu du milieu de MN ?

Dans tout ce qui suit, on supposera que les cercles (M) et (N) sont orthogonaux.

2° Une inversion de pôle A de puissance $2AM \cdot AC$ transforme le cercle (M) en la droite BC. Montrer que cette inversion conserve le cercle (N).

En déduire que l'un des points d'intersection Q des cercles (M) et (N) est sur AB. Montrer que leur 2° point d'intersection P décrit le cercle circonscrit au rectangle OACB. Montrer que PQ coupe ce dernier cercle en un point fixe S.

3° Montrer que la somme des puissances de I par rapport à (M) et (N) est nulle. En déduire que le triangle MIN est rectangle.

Retrouver géométriquement que le lieu de D est la médiatrice de OC.

4° Quel est le lieu du symétrique de I par rapport à MN ? Quelle est l'enveloppe de MN ?

Réunion. M). I. *Cours.* — 1. Résolution de l'équation $\sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{2}$. — 2. Résolution d'un triangle connaissant deux côtés b et c et l'angle A compris entre ces deux côtés. — 3. Résolution d'un triangle connaissant les trois côtés (on rendra les formules calculables par logarithmes).

II. *Problème.* — Soit un cercle fixe (O) et une droite fixe (D) extérieure à ce cercle. On considère les cercles (C) tangents à la fois au cercle (O) et à la droite (D).

1° Montrer que la droite joignant les points de contact d'un cercle (C), tangent extérieurement au cercle (O), avec ce cercle et avec la droite (D) passe par un point fixe. Montrer qu'il en est de même pour un cercle (C) tangent intérieurement au cercle (O). Dans le cas des cercles tangents extérieurement, trouver le lieu des points de contact des tangentes aux cercles (C) issus du point fixe précédemment trouvé.

2° Trouver le lieu des centres des cercles (C) tangents extérieurement à (O) et celui des centres des cercles (C) tangents intérieurement à (O). Construire les cercles (C) ayant leurs centres sur une droite donnée (Δ). Construire les cercles (C) tangents à une droite donnée (Δ). (La discussion de ces deux dernières constructions n'est pas demandée).

3° Soient deux cercles fixes (O) et (O') extérieurs. On considère les cercles (C) tangents à la fois à (O) et (O'). Montrer que les cercles passant par un point fixe A de (O) et par les deux points de contact de (C) avec (O) et (O') passent par l'un ou l'autre de deux autres points fixes I et J que l'on déterminera. Préciser dans les divers cas celui des deux points fixes par lequel passent ces cercles.

4° On considère les cercles (C') passant par A, par l'un des points I et J et tangents à un cercle (C). Trouver le lieu des points de contact lorsque le cercle (C) varie.

SESSION DE SEPTEMBRE

France Métropolitaine. M). 1. *Cours.* — 1. Intersection d'une hyperbole et d'une droite (le candidat est laissé libre du choix de la définition de l'hyperbole). — 2. Inverse d'un cercle par rapport à un point de son plan. — 3. Inégalité entre les faces d'un trièdre.

II. *Problème.* — On considère un triangle ABC, de côtés a, b, c , d'angles A, B, C (on suppose $B > C$). Soit (O) son cercle circonscrit, de rayon R. Le côté BC et le cercle (O) sont coupés en D et E par la bissectrice intérieure, en D' et E' par la bissectrice extérieure de l'angle A. On désigne par I le centre du cercle inscrit, par I_a, I_b, I_c les centres des cercles exinscrits respectivement dans les angles A, B, C.

1° Montrer que la polaire de I par rapport au cercle de diamètre DD' passe par I_a . Que dire des points I_b et I_c par rapport à ce cercle ?

Montrer que la projection $i_b i_c$ de $I_b I_c$ sur BC est égale à $b + c$.

Calculer en fonction des angles B et C l'angle que fait la bissectrice extérieure AD' avec le côté BC.

2° Appliquer ces résultats à la construction d'un triangle ABC, connaissant $B - C = 2\alpha$, $AH = h_a$, et $b + c = 2l$, où H désigne le pied de la hauteur issue de A. Discuter.

3° Calculer $b + c$ et h_a en fonction de R et des angles A, B, C. Avec les mêmes données que dans le 2°, calculer les angles du triangle ABC. On pourra prendre comme inconnue $\cos \frac{A}{2}$. Retrouver les résultats de la discussion géométrique.

N. B. — Cette troisième question peut être traitée indépendamment des deux autres.

Martinique. 1. *Cours.* — 1. U étant une fonction dérivable donnée de x , calculer la dérivée par rapport à x de la fonction : $y = \sin U$.

Application. — Dérivée de $y = \sin(3x^2 + 1)$.

N. B. — Tout ce qui vise la limite de : $\frac{\sin x}{x}$ lorsque $|x|$ tend vers 0 sera rappelé mais non démontré. — 2. Résolution de l'équation : $a \cos x + b \sin x = c$. (On insistera surtout sur la méthode dite de l'angle auxiliaire). *Application.* — Résoudre : $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1$. — 3. Résoudre un triangle connaissant deux côtés a et b et l'angle $\hat{A}$ opposé à a . Discuter.

II. *Problème.* — Etant donnés un cercle (O) [centre O, rayon R] et un point A, on appelle *angle sous lequel de A on voit (O)* l'angle des demi-tangentes issues de A à (O). Le problème qui suit a pour but de résoudre quelques questions visant les cercles variables (O) [O, R] vus du point fixe A sous l'angle de 90° ; on désignera par T le point de contact de l'une des deux tangentes menées de A à l'un des cercles (O) et par H le pied de la polaire de A par rapport à ce cercle (O).

1° Lieux des points O et T si (O) passe par un point donné B ?

2° Lieu de O si (O) est tangent à une droite donnée Δ ? A quel problème classique est ramenée la construction des cercles (O) tangents à deux droites données Δ et Δ' ? (On ne rappellera pas la solution de ce problème classique).

3° Calculer : $\frac{\overline{AO}}{\overline{AH}}$; H étant donné, construire (O).

4° (O₁) et (O₂) sont deux des cercles (O), H₁ et H₂ les pieds des polaires de A par rapport à ces deux cercles ; démontrer que l'axe radical de (O₁) et de (O₂) est la médiatrice du segment H₁H₂.

(On considérera le cercle qui passe par A, H₁, H₂ et on utilisera le résultat du 3°).

5° On envisage parmi les cercles (O) ceux qui sont orthogonaux à un cercle (ω) [ω , ρ] donné. Dédurre du 4° que le point H reste alors sur un cercle fixe qu'on précisera. Réciproque ? Lieu de O ?

Réunion. I. Cours. — 1 Réduction d'une fraction ordinaire en fraction décimale. Conditions de possibilité. — 2. Recherche du P.G.C.D. de deux nombres par la méthode des divisions successives. Propriétés du P.G.C.D. de deux nombres. — 3 Expression générale des multiples communs à deux nombres. P.P.C.M. de deux nombres.

II. Problème. — On considère la fonction $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + a}$ où a est une constante. On demande :

1° Les valeurs de a pour lesquelles la fonction se réduit à une fonction homographique.

Les valeurs de a pour lesquelles la fonction admet deux asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées.

Les valeurs de a pour lesquelles la fonction passe par un minimum puis un maximum.

Les valeurs de a pour lesquelles la fonction varie toujours dans le même sens.

2° Construire la courbe représentative dans les cas particuliers suivants :

$$a = 0 ; a = \frac{7}{2} ; a = 5.$$

3° On revient au cas où $a = 0$. On coupe la courbe représentative C_0 par une parallèle D à l'axe des abscisses d'ordonnée m . Pour quelles valeurs de m la droite D coupe-t-elle la courbe C_0 en deux points M et M' ? Quel est le lieu géométrique du milieu P de MM' ? Par quels points remarquables de la courbe passe-t-il ? On construira ce lieu H sur le même graphique que la courbe C_0 .

II. Brevet élémentaire

Aix (juin). — I. Algèbre. — 1° Simplifier l'expression $y = \frac{2}{3 - \frac{1}{1 - \frac{2x - 7}{3x - 10}}}$

2° Construire la droite D représentant la fonction $y = 2x - 6$. Donner les coordonnées des points où cette droite rencontre les axes Ox et Oy.

3° On mène la perpendiculaire D' de O sur la droite D. Trouver la fonction qui serait représentée graphiquement par cette perpendiculaire.

4° Soit H le point d'intersection de D et D'. Calculer les coordonnées du point H.

5° Calculer la distance du point O à la droite D

11. *Géométrie*. — 1° Soient deux cercles O et O' tangents intérieurement en A . Une sécante, issue de A , coupe le cercle O en B et le cercle O' en C :
 a) démontrer que OB et $O'C$ sont parallèles ;
 b) démontrer que la tangente en B au cercle O est parallèle à la tangente en C au cercle O' .

2° On suppose maintenant que $R' = \frac{R}{2}$:

- a) montrer que C est le milieu de AB ;
- b) déterminer AB pour que la tangente en C au cercle O' passe par D diamétralement opposé à A dans le cercle O ;
- c) dans ces conditions, la tangente en B au cercle O coupe AD en E . Calculer DE ;
- d) calculer DC .

Aix (septembre). — I. *Géométrie*. — On donne un triangle ABC dans lequel $\hat{B} = 45^\circ$. Les hauteurs AA' et BB' se coupent en H .

- 1° Démontrer que $AA' = BA'$ et que $A'H = A'C$.
- 2° Démontrer que $A'HB'C$ est inscriptible et que $B'A'$ est bissectrice de $\widehat{BB'C}$.
- 3° Soit $A'K$ perpendiculaire sur AC . Démontrer que $A'K = B'K$.
- 4° Où se trouve le centre I du cercle circonscrit au quadrilatère $A'HB'C$? Quelle ligne décrit-il quand C se déplace sur le prolongement de BA' , le triangle ABA' restant fixe.

II. *Algèbre*. — Soit le système des deux équations
$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 & (1) \\ y = \frac{3}{2}x & (2) \end{cases}$$

1° Représenter pour chaque équation les variations de y en fonction de x (unité : 1 cm. sur chaque axe). On obtient deux droites D et D' qui se coupent en P . Déterminer graphiquement les coordonnées de P . Vérifier par le calcul.

2° La droite D rencontre XX' en A et YY' en B . Vérifier que $\overline{OA}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PA}^2$. Que peut-on en conclure ? Pouvait-on prévoir ce résultat en examinant simplement le système donné ?

Nancy (juin). — I. *Algèbre*. — On considère 2 axes de coordonnées rectangulaires et l'on adopte le cm. comme unité sur chaque axe.

1° Tracer les droites ayant pour équations :

$$1) -2x + 3y = 8$$

$$2) x + 3y = 5.$$

2° Trouver graphiquement, puis par le calcul, les coordonnées de leur point commun A .

3° Soient B et C les points d'intersection des deux droites avec l'axe des abscisses. Calculer les côtés du triangle ABC .

II. *Géométrie*. — On donne un cercle de centre O , de rayon R , on trace deux diamètres perpendiculaires AB et CD . De A on mène une corde AIM qui coupe le rayon CO en I et le cercle en M .

1° Montrer que $OA \cdot OB = AI \cdot AM$.

2° Dans le cas où $OI = \frac{R}{3}$, calculer AI , AM , MB et la distance de M au diamètre AB .

3° On suppose que le triangle MCI est isocèle. Calculer dans ces conditions l'angle $\widehat{MAB}$.

Nancy (septembre). — I. *Algèbre*. — On considère le système :

$$x - y = -3 \quad (1),$$

$$2x + my = 15 \quad (2), \text{ où } m \text{ est un nombre connu variable.}$$

1° Exprimer x et y en fonction de m .

2° Comment choisir m pour que x et y soient proportionnels à 4 et 7 ?

3° Soient (D_1) et (D_2) les droites d'équations (1) et (2) dans le cas où $m = 1$. Construire ces droites.

4° Ces droites se coupent en P. Déterminer les coordonnées de P. Les nombres trouvés ne pouvaient-ils pas être prévus en partie d'après le résultat trouvé en 2° ?

II. *Géométrie*. — Soit un triangle isocèle ABC, rectangle en A et d'hypoténuse $BC = 2a$. Sur la hauteur AH de ce triangle, on choisit un point D tel que $DH = \frac{AD}{2}$. On mène en C la perpendiculaire CX à BD. BD coupe AC en F et CX en E.

1° Calculer les côtés du triangle AEC, son aire, ainsi que l'aire du quadrilatère ABCE.

2° Le cercle circonscrit au triangle ABC coupe AE en M et BE en N. Calculer EM et EN, ainsi que les rapports $\frac{EM}{EN}$ et $\frac{EA}{EF}$.

3° Comparer les cordes MN et AC en grandeur et en direction.

III. Ecoles normales d'Instituteurs

Sujet unique (juin). — I. *Algèbre*. — Le long d'une voie ferrée, dont chacun des rails a une longueur de 15 mètres, les intervalles entre deux rails consécutifs provoquent des chocs que l'on perçoit lorsqu'on se trouve dans un train en mouvement sur la dite voie.

1° Un voyageur compte 6 chocs pendant 10 secondes, le premier choc et le dernier coïncidant respectivement avec le début et la fin de l'intervalle de temps considéré. (*De telles coïncidences seront toujours supposées réalisées dans les questions suivantes*). Quelle est la vitesse du train en km./h. ?

2° Un voyageur compte n chocs pendant 20 secondes. Quelle est, en fonction de n , la vitesse du train en km./h. ?

3° Pendant combien de secondes faudrait-il compter les chocs pour que leur nombre, diminué d'une unité, indique la vitesse du train en km./h., *quelle que soit cette vitesse* ?

II. *Géométrie*. — Soit un trapèze rectangle convexe ABCD de bases AB et CD et de hauteur AD. On suppose $AB = a$ et $CD = AD = 2a$, a étant une longueur donnée.

1° Soit I le milieu de AD. Démontrer que le triangle BIC est isocèle. Calculer ses côtés en fonction de a .

2° Soit O le point d'intersection des diagonales AC et BD. Démontrer que les triangles AOD et BOC sont équivalents. Calculer les aires des triangles AOB, BOC, COD et DOA.

3° Même question qu'au 2°, en supposant que ABCD est un trapèze convexe quelconque, de bases b et B et de hauteur h .

Paris (septembre). — I. *Algèbre*. — 1° Simplifier les expressions :

$$A = \frac{x^2}{x^3 + 3x^2} \quad B = \frac{6 - 2x}{x^2 - 6x + 9} \quad C = \frac{60x}{5x^3 - 45x}$$

Calculer en fonction de x l'expression : $A - B - C$ et simplifier le résultat obtenu.

2° Calculer x pour que B soit égal à $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3° Vérifier que les expressions $y = \frac{1}{A}$ et $z = \frac{1}{B}$ sont des fonctions du premier degré en x . Construire dans le même système d'axes de coordonnées rectangulaires les droites représentant la variation de ces fonctions.

Calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

II. *Géométrie*. — Dans un quadrilatère convexe $ABCD$, les sommets A et B sont fixes, les sommets C et D sont mobiles, mais on a toujours :

$$AB = AD = 3a, \quad CB = CD = 4a.$$

1° Montrer que les diagonales AC et BD sont rectangulaires.

2° Soit M l'intersection de ces diagonales. Sur quelles lignes peuvent se déplacer les points C , D et M ?

3° Montrer qu'il existe toujours un cercle tangent aux quatre côtés du quadrilatère. Soit I son centre, r son rayon et S l'aire du quadrilatère $ABCD$. En utilisant les aires des triangles IAB , IBC , ICD et IDA montrer que le rapport $\frac{S}{r}$ reste constant quand C et D se déplacent.

4° Calculer en fonction de a les longueurs des diagonales, la surface S et le rayon r , lorsque le quadrilatère $ABCD$ peut être inscrit dans un cercle.

Nancy (septembre). — I. *Algèbre*. — On donne un segment de droite $AB = 10$ cm. et, sur ce segment, un point variable M défini par $AM = x$. On construit d'un même côté de AB , les carrés $ACDM$ et $MEFB$ de côtés AM et MB . On désigne par y la longueur de la ligne polygonale fermée $ACDEFBA$.

1° Calculer y en fonction de x . On considérera deux cas de figure selon que M est à gauche ou à droite du milieu O de AB .

2° Etudier les variations de y lorsque M se déplace de A à B . Représentation graphique.

3° a) Déterminer x de façon que y soit le double du périmètre du carré $ACDM$. Solutions algébrique et graphique.

b) Déterminer x de façon que le rapport de y et du périmètre du carré $ACDM$ soit égal à k . Quelles sont les valeurs possibles de k ? Discussion graphique.

II. *Géométrie*. — On donne une circonférence O de rayon R et un diamètre fixe AA' sur lequel on prend deux points fixes B et B' , symétriques par rapport à O . Par B et B' on mène deux cordes parallèles PBQ et $P'B'Q'$.

1° Montrer que le quadrilatère $PP'Q'Q$ est un rectangle et que $PB = B'Q'$. $BQ = B'P'$. En déduire que le produit $BP \times B'P'$ est constant quand B et B' restent fixes, la direction commune des deux cordes PQ et $P'Q'$ varie.

2° Soient M et M' les points de rencontre de PP' avec les tangentes en A et en A' au cercle. Montrer que les quadrilatères $ABPM$ et $A'BPM'$ sont inscriptibles. En déduire que l'angle MBM' garde une valeur constante qu'on donnera.

Sur quelle droite fixe reste le milieu I de MM' quand la direction de PQ et $P'Q'$ varie ?

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

V. LESPINARD et R. PERNET

A PARAÎTRE MAI 1954 :

MATHÉMATIQUES : classe de **SECONDE A, C, M** (Géométrie 1 vol., Algèbre 1 vol.).
classe de **SECONDE A, B** (1 volume).

L'introduction des éléments orientés (vecteurs, angles) a été faite avec tout le soin nécessaire. Un plan nouveau du cours permet de rénover de nombreux exercices classiques.

SPECIMEN GRATUIT SUR DEMANDE

Tous les ouvrages de la collection, rédigés avec clarté et précision, facilitent la tâche des Professeurs par le grand nombre d'exercices classés par ordre de difficulté et rattachés aux différents paragraphes du cours.

L'ouvrage de Troisième, surtout celui destiné au Cours Complémentaire permet une excellente préparation aux examens : B.E.P.C., E.N., etc...

PREMIER CYCLE

Lycées et Collèges

Classe de 6 ^e ,	1 vol. Br. : 235 f., cart. : 330 f.
— 5 ^e ,	1 vol. Br. : 300 f., cart. : 380 f.
— 4 ^e ,	1 vol. Br. : 420 f., cart. : 520 f.
— 3 ^e ,	1 vol. Br. : 450 f., cart. : 550 f.

Cours Complémentaires (cours complet)

Classe de 6 ^e ,	1 vol. Br. : 255 f., cart. : 350 f.
— 5 ^e ,	1 vol. Br. : 315 f., cart. : 410 f.
— 4 ^e ,	1 vol. Br. : 450 f., cart. : 550 f.
— 3 ^e ,	1 vol. Br. : 470 f., cart. : 570 f.

Classe de SCIENCES EXPERIMENTALES :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — MATHÉMATIQUES. (Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie, Mécanique, Cosmographie).

Tout le programme se trouve réuni en un volume qui donne aux élèves des méthodes pratiques ; les questions sont traitées avec le maximum de simplicité, sans toutefois sacrifier l'essentiel de l'esprit mathématique Br. : 845 f., cart. : 945 f.

Classe de PHILOSOPHIE :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — ALGÈBRE ET COSMOGRAPHIE Br. : 340 f., cart. : 445 f.

Classe de MATHÉMATIQUES :

COURS COMPLET

LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE	Br. : 690 f., cart. : 790 f.
» — GEOMETRIE DESCRIPTIVE ET COTÉE	Br. : 275 f.
» — ARITHMETIQUE	Br. : 285 f.
» — MECANIQUE	Br. : 245 f., cart. : 335 f.
LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — COSMOGRAPHIE,	Br. : 330 f., cart. : 425 f.
LESPINARD et PERNET. — ALGÈBRE	Br. : 595 f., cart. : 695 f.
» — TRIGONOMETRIE	Br. : 375 f., cart. : 470 f.
» — SOLUTIONS DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Bac., 2 ^e partie, classe de Mathématiques	335 f.

Classe de Première C. et M.

LESPINARD et PERNET. — SOLUTIONS DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Bac.,
1^{re} partie, séries C. et M. 280 f.

DELAGRAVE

Mathématiques

COURS BRACHET DUMARQUÉ

avec la collaboration de **P. COUDERC** et de **R. ROSTOLLAND**

Vient de paraître, pour la classe de **Mathématiques** :

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET COTÉE

168 pages, 392 figures, 448 exercices et problèmes
NOUVELLE ÉDITION, ENTIÈREMENT REFONDUE

Signalé spécialement :

GÉOMÉTRIE, classe de Mathématiques.

Présentation nouvelle des déplacements.

Exposé explicite, adapté à la fois à l'étude et à la recherche.

Nombreux exercices intercalés dans le cours : applications ou compléments.

PETITES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES NATURELLES.

(Dépliant à trois volets, sur papier fort).

Modèle commode pour Cours et Examens (Bacc, B. E. P. C.), Mathématiques et Physique.

Cours complet, maintenu au courant.

Longue expérience, au service des **idées nouvelles.**

Catalogue et Spécimens sur demande : **15, rue Soufflot, PARIS (5^e)**

MASSON & C^o, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6^e

— **COURS DE MATHÉMATIQUES G. CAGNAC ET L. THIBERGE** —

Nouveauté :

Nouveauté :

**ALGÈBRE
ET
TRIGONOMETRIE**

Classe de Mathématiques

par

J. COMMEAU

Professeur de Math. Sup. au Lycée Kléber
à Strasbourg

Un fort volume (15,5×22) de 504 pages, avec figures, exercices
et problèmes, broché fort

1.970 fr.

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD
GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU

Professeurs au Lycée de Grenoble

Programmes du 18 avril 1947

Tarif juin 1953

Arithmétique 6°	220	»
Dessin Géométrique 6° et 5°	125	»
Géométrie 5° et 4°	360	»
Arithmétique 5°	295	»
Arithmétique et Algèbre 4°	300	»
Arithmétique et Algèbre 3°	320	»
Géométrie 3°	295	»
Compléments d'Algèbre et de Géométrie Géométrie 3° Moderne court	100	»
Algèbre 2° A.B.C.M.	500	»
Géométrie 2° A.B.C.M.	465	»
Algèbre 1 ^{re} A.B.	180	»
Algèbre et Trigonométrie 1 ^{re} C.M.	440	»
Géométrie 1 ^{re} A.B.C.M.	440	»
Questions de Cours de Mathématiques du Baccalauréat, 1 ^{re} partie, A.B.C.M.	340	»
Nouveauté :		
Géométrie 5°, 4°, 3° (pour les Lycées, Col- lèges et Cours Complémentaires), car- tonné	800	»

Roland MAILLARD et

Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne,
chargé d'un cours
à l'École Normale Supérieure

Albert MILLET

Professeur agrégé
au Lycée Janson-de-Sailly
et à l'École Normale Supérieure
de l'Enseignement Technique

COURS DE MATHÉMATIQUES

Enseignement du second degré

Classe de Sixième

Mathématiques. 192 p., 900 exerc. et probl.

Classe de Cinquième

Mathématiques. 272 p., 900 exerc. et probl.

Classe de Quatrième

Mathématiques. 288 p., 687 exerc. et probl.

Classe de Troisième

Mathématiques. 304 p., 1185 exerc. et probl.

Classes de Seconde Classique A et B

Mathématiques. 320 p., 714 exerc. et probl.

Classes de Seconde Classique C et Moderne

Algèbre. 256 p., 633 exerc. et probl.

Géométrie. 444 p., 724 exerc. et probl.

Classes de Première Classique A et B

Mathématiques. 288 p., 600 exerc. et probl.

Classes de Première Classique C et Moderne

Algèbre et Trigonométrie. 288 p., 634 ex. probl.

Géométrie. 336 p., 528 exerc. et probl.

Classe de Mathématiques

Algèbre. 368 p., 890 exerc. et probl.

Cosmographie. 256 p., 94 exerc. et probl.

Géométrie. 480 p., 693 exerc. et probl.

Géométrie descriptive. 256 p., 414 ex. probl.

Trigonométrie. 192 p., 585 exerc. et probl.

Classe de Mathématiques (Technique)

Géométrie. 496 p., 711 exerc. et probl.

Classe de Philosophie et Sciences expér.

Cosmographie. 208 pages.

Classe de Philosophie

Trigonométrie et Algèbre. 104 p., 158 ex. probl.

► En préparation :

Mathématiques, Cl. de Sciences expérimentales.
Arithmétique, Cl. de Mathématiques.

*Une méthode
efficace*

*Une culture
mathématique*



*Une nouvelle
présentation
typographique*

LIVRES DU MAÎTRE :

Corrigés de 6°

Corrigés de 5°

Corrigés de 4°

Corrigés de 3°

Corrigés de Géométrie 2^e CM

Corrigés de Géométrie 1^{re} CM