

Sur l'Orientation relative de deux Trièdres

Dans le *Bulletin* n° 160 de janvier 1954, M. MIRABEL a publié un article relatif à l'orientation des trièdres. Il caractérise la disposition mutuelle de deux trièdres T et T' par la parité du nombre n des symétries planaires [qu'il appelle transformation (II)] qui transforment T' en un trièdre T'' ayant en commun avec T le sommet, la première arête, le demi-plan limité à cette première arête et contenant les deuxièmes arêtes de T et T'' , les troisièmes arêtes de ces deux trièdres étant du même côté du plan précédent.

Cette définition présente un grand intérêt, car elle réduit les propriétés de l'orientation des trièdres (généralement présentées d'une façon intuitive, en faisant appel à la distinction de la droite et de la gauche d'un observateur) aux axiomes antérieurs de la géométrie euclidienne.

Les procédés de la géométrie analytique semblent conduire aux mêmes conclusions en utilisant le signe d'un déterminant (produit mixte de trois vecteurs portés par chacune des trois arêtes) ; toutefois, la méthode analytique fait appel à des considérations de continuité et notamment à la propriété d'une fonction continue de ne pouvoir changer de signe sans s'annuler, d'où résulte la conservation de l'orientation d'un trièdre par un déplacement. La méthode de M. MIRABEL semble pouvoir se passer de telles considérations.

Etant donnée l'importance du résultat ainsi obtenu, il paraît nécessaire de préciser certains points de son exposé et de réfuter certaines objections qui me sont venues à l'esprit en prenant connaissance de son article.

J'espère que M. MIRABEL voudra bien y répondre. Voici de quoi il s'agit :

Dans le passage du trièdre T' au trièdre T'' M. MIRABEL suit un certain ordre d'ailleurs tout naturel : il fait coïncider d'abord les deux sommets, puis les deux premières arêtes, puis les deux demi-plans contenant les premières et les deuxièmes arêtes. Mais, qui me dit qu'en suivant un autre ordre il utiliserait le même nombre de symétries ou tout au moins un nombre de même parité ?

Cela nous semble évident, car nous avons *a priori* l'intuition de l'orientation, mais il s'agit d'en faire abstraction pour aboutir à une définition purement logique. Or, c'est la parité du nombre de symétries à faire qui est la clef de la question.

Remarquons que, quand il s'agit de figures planes, cette parité n'est plus déterminée : lorsqu'on a fait coïncider un triangle $A'B'C'$ avec un triangle égal ABC par un certain nombre de symétries, on peut évidemment ajouter une symétrie de plus par rapport au plan commun des deux triangles superposés. Cette indétermination de la parité du nombre n n'existe plus pour les figures à trois dimensions, mais il s'agit d'établir ce fait en toute rigueur sans aucun appel à l'intuition, ou alors il faudrait l'énoncer comme un axiome supplémentaire et, dans ce cas, on pourra estimer qu'il serait préférable de conserver les modes d'exposés traditionnels.

**

Puisque l'occasion m'en est fournie par l'article de M. MIRABEL, je me permettrais de marquer ma répugnance pour l'expression « antidéplacement » qui fait inévitablement penser à une opposition, voire même à une hostilité envers les déplacements. Je préférerais, pour ma part, la terminologie suivante : les transformations qui conservent les longueurs étant appelées « isométries » se classeraient en isométries positives ou « déplacements » et isométries négatives ou « retournements » (les mots « positif » et « négatif » rappelant le signe du déterminant dont il a été parlé plus haut).

D'autre part, l'idée de définir les translations et les rotations par le produit de deux symétries planaires, est certainement ingénieux, mais je déplorerais, pour ma part, que l'on se refuse aussi totalement à reconnaître que les fondements de la

géométrie résident, de l'avis même des mathématiciens les plus éminents, tels Henri Poincaré et Emile Borel, dans les propriétés du mouvement d'une figure invariable.

M. MIRABEL me permettra-t-il de lui demander encore quelques éclaircissements sur le début de son exposé : j'aurais souhaité qu'il dise d'une façon plus explicite les propriétés qu'il supposait connues. Puisqu'il part de la notion de plan médiateur d'un segment, je suppose qu'il utilise les résultats relatifs aux droites et plans parallèles et aux droites et plans perpendiculaires, qu'il admet l'axiome de la division du plan en deux demi-plans par une droite, qu'il admet aussi les propriétés du triangle isocèle.

Dans ces conditions, je ne m'explique pas la nécessité de la démonstration qu'il donne de l'invariance d'une droite par la transformation (II) : l'égalité des deux segments joignant deux couples de points homologues se ramène à la considération d'un triangle isocèle d'où il résulte immédiatement que les supports des deux segments homologues sont également inclinés sur le plan de symétrie.

Mais peut-être M. MIRABEL n'accepte-t-il pas la superposition des deux moitiés d'un trapèze, ayant un axe de symétrie, par rabattement autour de cet axe. Les tendances axiomatiques des exposés actuels des faits les plus élémentaires paraissent décidément bien mystérieux au profane.

Encore une petite question : M. MIRABEL présente comme *conséquence* de la définition de la transformation (II) le fait qu'un plan partage l'espace en deux régions. Est-ce bien là une conséquence ou bien plutôt une inadvertance de rédaction ?

Car il me semble que l'axiome du partage de l'espace par un plan intervient dès le début de la géométrie de l'espace.

M. WEBER,
*professeur honoraire de Mathématiques Spéciales
au Lycée Condorcet.*