

III. Documents officiels

Rapport sur le concours général de mathématiques en 1954 (classe de mathématiques)

Le Jury était composé ainsi : M. ROBERT, inspecteur général, président ; Mlle RANSON, professeur de mathématiques (Fontenay) au lycée Jules-Ferry ; M. BOUSQUET, professeur de mathématiques supérieures au lycée Chaptal ; M. COSSART, professeur de mathématiques (Ecole Supérieure d'Electricité) au lycée Chaptal ; M. DURRANDE, professeur de mathématiques (Centrale) au lycée Saint-Louis ; M. ECALLE, professeur de mathématiques (Navale) à l'annexe Stanislas du lycée Saint-Louis.

L'idée du problème procédait de la remarque suivante : lorsque quatre points analytiques de l'espace sont situés sur une même sphère de rayon nul, leurs distances mutuelles satisfont à la relation classique de Ptolémée sur le quadrilatère inscriptible à un cercle (1). Transcrite dans le langage de la géométrie réelle, cette propriété

(1) D'après la formule donnant le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre dont on donne les six arêtes (voir J. HADAMARD, *Leçons de géométrie*, n° 675).

donne, en particulier, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un cercle du plan d'un triangle ABC soit tangent au cercle circonscrit à ce triangle. Une recherche directe de cette condition est un problème de géométrie élémentaire.

Cette condition donne une démonstration presque immédiate du théorème de Feuerbach.

Partie I. — 1° On envisage d'abord une inversion de pôle O distinct des points A, B, C, et les inverses A', B', C' de ces points. On demande de justifier les deux relations :

$$(1) \frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB} : \frac{OC}{OB} \quad \text{et} \quad (2) (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \pmod{2\pi}.$$

Dans presque toutes les copies la première égalité est établie à partir de la formule classique $A'B' = \frac{|k|BA}{OA \cdot OB}$. Mais les élèves n'indiquent pas que les triangles OAB, OB'A' sont indirectement semblables, ce qui leur a rendu l'égalité (2) difficile à démontrer. On voit ici apparaître la tendance à appliquer un résultat sans évoquer la manière dont il a été obtenu. Il serait bon que les élèves comprennent qu'un cours fournit, non seulement des résultats à connaître, mais des modes de raisonnement, des méthodes, applicables à d'autres questions que les questions classiques.

Le fait, signalé par les cours, que A, B, B', A' sont concycliques, a été utilisé, mais ne permet que la justification de (2) à $k\pi$ près (et non à $2k\pi$ près).

Peu de concurrents se sont inquiétés de ce détail et la plupart de ceux qui ont essayé de démontrer la relation angulaire (2) $\pmod{2\pi}$ ont examiné différents cas de figure.

On préférerait que ceux qui n'ont pas signalé cette difficulté reconnaissent carrément qu'ils n'arrivent pas complètement au résultat demandé : cela aurait permis de les distinguer de ceux qui ne l'ont pas vue du tout.

D'autres arrivent au but par des procédés irréguliers. L'un traduit le fait que A, B, B', A' sont sur un cercle, par une égalité entre angles de vecteurs, et non de droites. Un autre ajoute deux égalités, valable chacune à $k\pi$ près, ce qui donne une égalité valable, selon lui, à $2k\pi$ près. Il n'y a donc pas encore partout une parfaite compréhension de l'usage des angles généralisés.

2° On demande de déterminer O de manière que le triangle A'B'C' soit directement semblable à un triangle donné T₁ du plan.

Sans doute, l'enseignement traditionnel des cas de similitude de deux triangles est-il muet sur la distinction des deux cas de similitude directe ou indirecte. Dans l'état actuel des choses, il semble qu'il serait bon de revenir sur ces points dans les classes de Mathématiques.

Les candidats avaient, d'après leurs souvenirs de la Seconde, trois méthodes à leur disposition pour résoudre la question posée, dont chacune est l'application d'un des cas de similitude. Le second donne les moindres difficultés et les jalons de 1° devaient naturellement conduire à son emploi. Le troisième, utilisé par certains, ne peut tenir compte de la stipulation que l'orientation du triangle A'B'C' est donnée.

L'inventaire des tracés fournissant un point O (qui est supposé répondre à la question) est ici instructif : il y a surabondance de constructions possibles de O, et donc nécessité d'une synthèse intelligente utilisant celle qui est préférable pour justifier au mieux de la convenance d'une solution. Il faut souligner que ce choix est d'esprit tout différent de celui du tracé le plus avantageux graphiquement, il vise à la simplicité de la discussion.

Des exemples classiques de circonstances analogues ne manquent pas : citons la recherche du centre de rotation de deux figures planes (directement) égales.

Quelques candidats seulement ont clairement indiqué pourquoi le problème a en général une solution, et quels sont les triangles T₁ pour lequel le problème est impos-

sible : ce sont les triangles indirectement semblables au triangle ABC. Cette exception disparaît si l'on admet l'emploi d'une symétrie par rapport à une droite du plan comme inversion : elle n'a plus de centre O.

3° Les réflexions précédentes auraient pu permettre de découvrir la solution de la question : rechercher un point m du plan ABC tel que $\frac{mA}{\alpha} = \frac{mB}{\beta} = \frac{mC}{\gamma}$

α, β, γ étant trois nombres positifs donnés.

Seule, la discussion de cette question offre une difficulté, que les paragraphes précédents 1° et 2° permettaient de dominer.

En effet, en considérant m comme un pôle d'une inversion transformant les points donnés A, B, C en A', B', C', le triangle A'B'C' doit avoir ses côtés B'C', C'A', A'B' proportionnels à $\alpha\alpha, b\beta, c\gamma$ [et réciproquement, s'il en est ainsi, m est solution du problème]. A condition qu'il existe un triangle T₁ de côtés égaux à $\alpha\alpha, b\beta, c\gamma$, et alors il en existe deux, différents par l'orientation, on est ramené à (I, 2°). On trouve ainsi que si la plus grande des trois longueurs $\alpha\alpha, b\beta, c\gamma$ est inférieure (ou égale) à la somme des deux autres, il existe deux points m_1, m_2 distincts (ou confondus), dont les distances à A, B, C, sont proportionnelles à α, β, γ .

La discussion de l'existence de ces points a été nette dans certaines copies ; mais dans tant d'autres, les locutions « il faut et il suffit », « condition nécessaire et suffisante », bien commodes, n'indiquent pas à quoi elles se rapportent. Non employées dans une proposition complète, de telles locutions servent trop souvent à masquer l'insuffisance ou l'absence du raisonnement.

L'étude du lieu (Δ) des points M de l'espace tels que $\frac{MA}{\alpha} = \frac{MB}{\beta} = \frac{MC}{\gamma}$

se rattache immédiatement à la précédente : quand la condition d'existence du couple de points (m_1, m_2), précédemment signalée, est remplie, (Δ) est le cercle orthogonal au plan (P) du triangle ABC en m_1 et m_2 .

Ce cercle forme un anneau orthogonal avec le cercle ABC, ce qui se vérifie très simplement, et ainsi le cercle circonscrit au triangle commence à intervenir dans le problème. Pour que (Δ) se réduise à un cercle point, il faut et il suffit que le triangle T₁ soit aplati, et alors ce (cercle) point M appartient au cercle ABC.

4° On suppose désormais qu'il en soit ainsi, et il est visible que ce cas est caractérisé par la relation d'égalité $\alpha\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0$, où α', β', γ' sont des nombres algébriques de valeurs absolues α, β, γ .

α', β', γ' sont nécessairement deux d'un même signe et le troisième du signe contraire. La distinction de ces cas se rattache à la situation de M sur le cercle ABC, partagé par ces points en arcs inférieurs à un demi-cercle. Les concurrents, déjà essoufflés, n'ont guère précisé les divers cas de figure.

A tout point M du cercle ABC correspondent des nombres algébriques α', β', γ' , de rapports mutuels déterminés et tels que $\alpha\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0$: on considère les points U, V, W, situés respectivement sur BC, CA, AB, et tels que

$$\frac{\overline{UB}}{\overline{UC}} = \frac{\beta'}{\gamma'}, \quad \frac{\overline{VC}}{\overline{VA}} = \frac{\gamma'}{\alpha'}, \quad \frac{\overline{WA}}{\overline{WB}} = \frac{\alpha'}{\beta'}$$

et leurs conjugués harmoniques U', V', W', respectivement par rapport à B et C, C et A, A et B. Les sphères de diamètres UU', VV', WW' ont en commun le cercle point M et sont orthogonales en ce point au cercle ABC.

Le théorème de Ménélaus montre que les six points U, U', V, V', W, W' sont trois à trois alignés sur les côtés UVW, UV'W', U'VW, U'V'W, d'un quadrilatère complet (Q) correspondant au point M.

Une question intéressante (qui était, avouons-le, un peu en marge de l'idée centrale du problème) était posée, à la fin de 4°, aux concurrents : quelles sont les enve-

loppes, des quatre côtés de (Q) ? Des indications (a), (b), (c), destinées plus à jalonner une méthode qu'à allonger la rédaction du problème, étaient fournies, mais l'énoncé, bien que précisant que les enveloppes cherchées étaient autant de points fixes, laissait secrète la situation remarquable de ces points (qui sont les centres I, J, K, L des quatre cercles inscrits et ex-inscrits au triangle ABC).

Le paragraphe (a) [les droites telles que MU, MU' passent par des points fixes] a été abordé souvent, mais traité superficiellement. Les parties (b) et (c), plus difficiles, n'ont pas été traitées. Cependant, un concurrent, le meilleur, semble-t-il, sans y avoir recours, a montré que la droite UVW passe par I.

A quoi faut-il attribuer cet insuccès ? Difficulté de la chose à découvrir sans doute. Le centre I du cercle inscrit au triangle ABC, par exemple, est le point commun aux cercles décrits sur BC, CA, AB comme cordes et ayant pour centres respectifs les milieux des arcs interceptés, sur le cercle ABC, par les angles du triangle. On peut penser que cette propriété, vue en Seconde, ne s'est pas imposée aux souvenirs des concurrents.

La démonstration que le texte préparait ne reposait que sur la condition pour que quatre points soient concycliques, utilisant deux couples de droites isogonaux. La théorie de l'hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes n'est pas au programme de la classe de Mathématiques. Avec des connaissances plus poussées sur ce sujet, les considérations du texte font vérifier ce résultat remarquable : *le quadrilatère complet (Q) relatif au point M est circonscrit à une seule hyperbole équilatère (comptant double) qui touche les côtés du quadrilatère aux quatre points I, J, K, L.*

Le lauréat qui a prouvé que la droite UVW passe par I a employé, lui, le théorème de Ménélaus et sa démonstration, généralisée, permet d'énoncer le résultat suivant : une droite étant caractérisée, par rapport au triangle ABC, par le fait que les mesures algébriques des distances de A, B, C à cette droite soient proportionnelles aux nombres α' , β' , γ' ; si la droite varie de façon que α' , β' , γ' soient liées par la relation linéaire homogène $u\alpha' + v\beta' + w\gamma' = 0$, elle passe par un point fixe (le barycentre des sommets A, B, C affectés des coefficients u, v, w).

Partie II. — 1° On considère les cercles (Γ) du plan (P) tels que les puissances de A, B, C par rapport à un tel cercle soient proportionnelles à $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ et l'on demande de caractériser l'axe radical d'un tel cercle (Γ) et du cercle ABC.

On a très généralement pensé à appliquer le théorème de la différence des puissances d'un point par rapport aux deux cercles, en considérant pour ce point les positions A, B, C. Il en résulte que les distances (algébriques) de ces points à l'axe radical sont proportionnelles à $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$, et que cette droite coupe les côtés du triangle en des points fixes : l'axe radical est fixe (quel que soit Γ).

Mais les copies qui contiennent ce raisonnement n'ont pas établi l'existence des cercles (Γ) et n'ont pas soupçonné le rapport existant entre cette question et la partie I du problème : ces cercles doivent satisfaire à deux conditions, l'une, par exemple, étant que le rapport des puissances de A et de B soit $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$; considéré isolément, ce fait équivaut à dire que l'axe radical d'un tel cercle (Γ_1) avec le cercle

ABC passe par le point w de AB, tel que $\frac{wA}{wB} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$, qui est fixe. Une propriété de la théorie des divisions harmoniques permettait de qualifier w comme milieu du segment WW' (les points W, W' partagent AB dans les rapports $\pm \frac{\alpha}{\beta}$).

Il n'était pas indispensable de connaître cette propriété : dire que l'axe radical de (Γ_1) et de ABC passe par w , c'est dire que la puissance de w par rapport au cercle (Γ_1) est la constante $\overline{wA} \cdot \overline{wB}$ (positive) ou encore que (Γ_1) est orthogonal à un

cercle fixe de centre w . Ceci doit s'appliquer en particulier aux cercles points tels que le rapport des distances de A et B à ces points soit $\frac{\alpha}{\beta}$; on sait déjà que ces points appartiennent au cercle décrit sur WW' comme diamètre. Le cercle fixe de centre w , mis précédemment en évidence, doit donc se confondre avec le cercle de diamètre WW' .

En revenant aux cercles (Γ) , on voit, par cette interprétation de chacune des deux conditions auxquelles ils sont assujettis, qu'ils sont orthogonaux aux cercles (WW') ; (VV') décrits sur deux diagonales du quadrilatère complet (Q) comme diamètres : et réciproquement cette double orthogonalité suffit pour qu'un cercle soit de la famille (Γ) .

Bien entendu les cercles (Γ) sont aussi orthogonaux au cercle de diamètre UU' , et l'on retrouve un théorème célèbre sur le quadrilatère complet.

L'axe radical d'un cercle (Γ) et du cercle ABC est la droite urw joignant les milieux des diagonales de ce quadrilatère. Il en résulte que la famille des cercles (Γ) est un faisceau linéaire (Φ) de cercles défini par son axe radical et le cercle circonscrit au triangle ABC.

Trois cas de figure sont possibles : on peut les discuter par les points limites du faisceau (Φ) . *A priori* ceux-ci, s'ils existent, sont les points M_1 et M_2 de la partie (I) et inversement, si M_1 et M_2 existent, ces points sont des cercles points du faisceau (Φ) .

1^{er} cas. — *Le cercle (Λ) n'existe pas* : les cercles (Γ) du faisceau (Φ) passent par deux points fixes du cercle ABC.

2^e cas. — *Le cercle (Λ) existe, et n'est pas de rayon nul* : les cercles (Γ) sont tels que m_1 et m_2 leur sont inverses : ils sont intérieurs ou extérieurs au cercle ABC.

3^e cas. — *Le cercle (Λ) est de rayon nul* : c'est un point M du cercle ABC : les cercles (Γ) sont tangents en M au cercle ABC.

Le faisceau (Φ) n'est autre que le faisceau conjugué de celui qui serait défini par deux des cercles (UU') , (VV') , (WW') [et qui contient d'ailleurs le troisième].

2^o De cette étude résulte une condition nécessaire et suffisante pour qu'un cercle, tel que les puissances de A, B, C, par rapport à lui, sont proportionnelles à α^2 , β^2 , γ^2 , soit tangent au cercle ABC : c'est $a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0$ (α' , β' , γ' , étant, aux signes près, α , β , γ). C'est-à-dire aussi : $a\sqrt{|\mathcal{P}_A|} \pm b\sqrt{|\mathcal{P}_B|} \pm c\sqrt{|\mathcal{P}_C|} = 0$ $\mathcal{P}_A$, $\mathcal{P}_B$, $\mathcal{P}_C$ étant les puissances considérées, nécessairement d'ailleurs de même signe.

3^o Cette condition est vérifiée par le cercle inscrit au triangle XYZ dont les milieux des côtés sont les points A, B, C. En effet, les longueurs des tangentes issues de A, B, C à ce cercle sont $|b - c|$, $|c - a|$, $|a - b|$. Prenons

$$\alpha' = b - c \quad \beta' = c - a \quad \gamma' = a - b.$$

On vérifie immédiatement que $a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0$.

Le cercle inscrit au triangle XYZ est donc tangent en un certain point μ au cercle ABC [qui est le cercle d'Euler de ce triangle].

On demandait de prouver que dans ces conditions particulières pour α' , β' , γ' , la droite UVW passe par le point de concours G des médianes (de ABC, et aussi de X, Y, Z) et que les droites UV'W', U'VW', U''V'W' passent respectivement par X, Y, Z.

Un seul candidat l'a reconnu. Ces propriétés se rattachent à la proposition que nous avons signalée à la fin du commentaire de la partie I, et s'établissaient par la relation de Ménélaüs. De l'une d'entre elles, on déduisait aisément les autres par l'emploi de la théorie des faisceaux harmoniques.

4°. La même théorie permettait, en guidant étroitement les candidats par l'énoncé, d'établir la conclusion remarquable suivante : la droite IG et la tangente au point de contact μ du cercle inscrit à XYZ et du cercle circonscrit à ABC sont deux transversales réciproques par rapport au triangle XYZ.

Cette partie du problème ne présentait d'autre difficulté que de faire des figures claires. Elle a été abordée, même par des concurrents qui n'avaient pas fait tout le reste.

Si personne n'a rédigé la solution du problème dans son intégralité, on s'est attaqué, parfois avec succès, à presque toutes les parties de ce problème.

Mais l'impression dominante est celle du nombre important de copies vraiment faibles. Au lieu de réfléchir à la question posée, les candidats paraissent avoir hâte d'appliquer les résultats qu'ils connaissent, comme on essaye à une serrure toutes les clefs d'un trousseau.

Ils ne semblent pas être convaincus que telle question puisse être abordable par plusieurs procédés. Nombreux sont ceux qui ont invoqué comme connu le théorème de Feuerbach, sans se rendre compte qu'on les guidait vers une démarche y conduisant et différente de la démonstration habituelle.

Enfin, le manque de netteté dans les discussions, notamment dans (I, 3°) ne permettait pas d'échafauder sur une base solide les recherches ultérieures.

Une demi-douzaine de copies révèlent des qualités certaines, et leurs auteurs seraient capables, en temps non limité, de transformer leur ébauche en un excellent devoir.

Le lauréat classé premier a, mieux que les autres, dominé le sujet, sans chercher à glaner des résultats au petit bonheur, un peu partout.

La longueur du sujet est une circonstance atténuante pour les défauts multiples relevés par les correcteurs, qui signalent, en particulier, trop de négligences dans les figures.

Le jury a décerné un unique prix (Premier prix) et cinq accessits. La moyenne sur 20 du meilleur est 13,6 ; pour les cinq autres, cette moyenne prend les valeurs 10,5 ; 10 ; 8,5 ; 8,3 ; 8.

Trois de ces lauréats avaient déjà figuré au palmarès de 1953 du Concours Général (classe de Première).

P. ROBERT,

Inspecteur général, Président du Jury.