

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Publication trimestrielle

Administration : Musée Pédagogique, 29, rue d'Ulm, Paris (5^e)

SOMMAIRE

Avis important I

PREMIÈRE PARTIE

I. Réunion du Comité (11 novembre 1954)	2
II. Concours de l'Enseignement public en 1954	3
III. Documents officiels :	
<i>Rapport sur le Concours général (Classe de Mathématiques)</i>	4
<i>Certificat d'aptitude au Professorat du Second Degré</i>	9

DEUXIÈME PARTIE

M. WEBER : Les Mathématiques et la réalité extérieure	17
E. EHRHART : La divisibilité par 6	25
Mlle AÏTOFF : Réflexions sur le Baccalauréat « Sciences expérimentales » ..	26
M. WEBER : Sur l'orientation relative de deux trièdres	27
H. CARTAN : Nombres réels et mesure des grandeurs	28
Bibliographie	36

Cotisations : 600 F

Abonnements : 1.000 F

Expédition des Bulletins : 29, rue d'Ulm, Paris, 5^e

Cotisation pour les professeurs de mathématiques	600 F
Abonnement pour les autres membres	1.000 F
Prix d'un numéro du <i>Bulletin</i> ou d'un <i>Supplément</i> (prix net) : France	200 F
Les membres de l'Association (cotisation : 600 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le <i>Bulletin</i> ainsi que les <i>Fascicules d'Enoncés</i> .	

Regler par chèque postal en utilisant l'adresse suivante :

Paris, Cc. 5.708-21

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5^e)

Présidents d'Honneur

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

Président : M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris (5°).
Vice-Présidents : Mlle MASSON, 3, avenue de la Porte-de-Montrouge, Paris (14°).
M. BIGUENET, 41, rue Mad.-Michelin, Neuilly-sur-Seine.
M. CAGNAC, 53, rue de Babylone, Paris (7°).
M. EDDE, 40, avenue du Général-Leclerc, Paris (14°).
Secrétaires : M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16°).
M. ROSTOLLAND, professeur au Lycée Marcel-Roby, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).
Trésorier : M. LEGRAND, 3 bis, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).

Comité :

Membres élus

Sortants en 1955 : M. CAGNAC (*Louis-le-Grand*) ; M. DURRANDE (*St-Louis*) ; M. HUISMAN (*Montaigne*) ; M. MARVILLET (*Strasbourg, Kléber*) ; M. MONJALLON (*St-Louis*).

Sortants en 1956 : Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; M. BAY (*Condorcet*) ; M. CARALP (*Montaigne*) ; M. CROZES (*Henri-IV*) ; M. DELTHEIL (*Fac. Sc. Toulouse*) ; M. PÉTRUS (*Janson*).

Sortants en 1957 : M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; M. ITARD (*Henri-IV*) ; M. MAILLARD (*Charlemagne*) ; M. POCHARD (*Condorcet*) ; M. ROSTOLLAND (*Marcel-Roby*) ; M. THOVERT (*Lyon, Ampère*).

Sortants en 1958 : Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (*E.N.P. Saint-Ouen*) ; M. CHAZAL (*Saint-Louis*) ; M. EDDE (*E.N. Auteuil*) ; M. GIRARD (*Arago*) ; M. LEGRAND (*Compiègne*) ; M. WALUSINSKI (*Voltaire*).

Membres de droit

Mme NICOD (*Lyon, Marie-Vidalenc*) ; M. CANONGE (*Castres*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; M. BAY (*Condorcet*) ; M. POUX (*Saint-Cloud*).

Rapporteurs

Classes Nouvelles : Mlle MASSON ; *Enseignement moderne court :* M. BIGUENET ; *Enseignement technique :* M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, Mlle PROTIN (*Sciences Expérimentales*) ; *Mathématiques Supérieures et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques : Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — Concours général : M. MONJALLON ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (*Besançon*) ; *Dijon :* M. SAUSER ; *Lille :* M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (*Lyon, Ampère*) ; *Montpellier :* M. DUSSOL (*Montpellier*) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (*Nancy, Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULD (*Rennes*) ; *Strasbourg :* M. FHRHART (*Strasbourg, Kléber*) ; *Maroc :* M. QUEYSANNE (*Casablanca, Lyautéy*) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (*Tunis, Carnot*).

Bulletin de l'Association
des
Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement public

AVIS IMPORTANT

Par décision du Comité en date du 11 novembre 1954, la cotisation, dont le montant vient d'être porté à **600 francs** (six cents francs), doit être versée avant le 1^{er} janvier 1955 au

C.C. 5708-21 Paris

A.P.M., 29, rue d'Ulm, Paris, 5^e

Les collègues l'ayant déjà acquittée à l'ancien taux sont priés d'effectuer un versement complémentaire.

Le service du BULLETIN sera suspendu après cette date aux collègues ayant omis d'effectuer le règlement.

Le Comité informe les adhérents qu'ils recevront dès leur parution les Annales du Baccalauréat et du B.E.P.C. de la librairie Vuibert.

Il rappelle que toute adhésion tardive n'est pas assurée de recevoir les numéros parus depuis le 1^{er} octobre 1954.

PREMIÈRE PARTIE

I. Réunion du Comité

11 novembre 1954

Présents : Mlles FÉLIX, MASSON ; MM. CAGNAC, CHAZAL, DURRAND, EDDE, ITARD, LEGRAND, MONJALLON, PÉTRUS, ROSTOLLAND, THOVERT, WALUSINSKI.

Excusés : Mlle DIONOT ; MM. CARALP, GIRARD.

La séance est ouverte à 16 h. 40.

M. CAGNAC donne lecture d'une lettre de notre collègue FERRIEU, membre fidèle de notre Association, à qui le *Bulletin* ne parvient plus depuis plusieurs mois. MM. MONJALLON et LEGRAND se sont déjà inquiétés de cette anomalie, assurément déplorable, et vont tenter à nouveau de la faire cesser. Le Président annonce que l'envoi du *Bulletin* va être dorénavant fait sous une bande plus large et plus solide. La discussion se développe alors sur diverses questions relatives au *Bulletin*. M. MONJALLON dit qu'il a entrepris une campagne de propagande par l'envoi d'une circulaire aux chefs d'établissement en les priant de la communiquer aux professeurs de mathématiques. M. THOVERT suggère l'envoi de spécimens aux conseillers pédagogiques.

M. WALUSINSKI soulève la question de la cotisation, fixée jusqu'ici à 400 francs, ce qui paraît insuffisant si l'on veut sauvegarder la qualité de cette publication qui attirerait plus que toute autre propagande de nouveaux adhérents. Puisque la dernière Assemblée générale avait laissé au Comité le soin de prendre une décision, ne devrait-on pas demander une cotisation de 600 francs en annonçant un *Bulletin* plus étoffé, publiant, non seulement des conférences et des articles divers, mais encore une bibliographie nourrie (pourquoi pas des comptes rendus d'ouvrages étrangers ?) et les meilleures études suscitées par des questions mises en chantier.

Le Président lui répond. Il espère que la propagande qu'il a entreprise amènera une augmentation du nombre des adhérents évitant de relever le taux de la cotisation. Il est d'autre part en pourparlers avec les Contributions directes en vue de réduire certains frais. De plus, M. LEGRAND, trésorier, signale que l'état des finances de la Société, sans être excessivement prospère, n'est pas alarmant.

Cependant le Comité décide, à une forte majorité (quatre abstentions), le relèvement à 600 francs du taux de la cotisation, et en même temps la nomination d'un Comité de rédaction du *Bulletin* composé de Mlle FÉLIX ; MM. CAGNAC, CHAZAL, GIRARD (secrétaire chargé de la production du *Bulletin*), THOVERT et WALUSINSKI.

Puis, le Président donne lecture d'une lettre de la librairie Vuibert relativement à la publication des textes des examens de 1954. Le Comité décide à l'unanimité d'accepter l'offre de fourniture des publications *Annales du Baccalauréat* et *Annales du B.E.P.C.*, qui seront adressées gratuitement aux membres de l'A.P.M. en règle vis-à-vis de la Trésorerie. M. WALUSINSKI signale qu'une conférence de M. Paul COUDERC aura lieu le 9 décembre au Musée Pédagogique. M. MONJALLON, qui a représenté l'Association au Congrès international d'Amsterdam en septembre 1954, annonce que, à la suite de pourparlers qu'il avait eus à cette occasion, des journées internationales concernant l'enseignement des Mathématiques dans l'Enseignement Moyen, vont être organisées à Paris pour le Mardi-Gras par ses soins. Mlle FÉLIX, qui a été également à Amsterdam, fait part au Comité du succès de l'Exposition des livres d'enseignement français dû au dévouement de notre Président et lui présente ses félicitations auxquelles le Comité s'associe chaleureusement.

La séance est levée à 18 h. 30.

Le Secrétaire : P. ROSTOLLAND.

II. Concours de l'Enseignement public en 1954

1. Agrégation des Sciences Mathématiques

MM.	MM.	MM.
1. LEGRAND (E.N.S.).	» RICHARD Michel (E. N.S.).	17. LEGOUPIL.
2. OMNES (E.N.S.).		18. KERAMSI.
3. LENFANT.	11. BATMALLE.	19. FORT.
4. POUJOIS.	12. KOVALEVSKY (E.N.S.).	» HAUCHARD (St-Cloud).
5. FRASNAY.	» LOUVEAU.	21. GENÊT (St-Cloud).
6. COLLEAU (E.N.S.).	14. DUSSAUD.	22. CUILLERIER (St-Cloud).
7. MÉTIVIER.	15. RICHARD Christian (E. N.S.).	» FAIVRE.
8. MAURY.	16. MEURISSE (St-Cloud).	24. GIRAUD (E.N.S.).
9. PÉROL.		» ROBERT (St-Cloud).
		» SEM.

2. Agrégation féminine de Mathématiques

M ^{mes} et M ^{lles}	M ^{mes} et M ^{lles}	M ^{mes} et M ^{lles}
1. CHAMFY (E.N.S.).	8. DESOUCHES.	15. BREIX.
2. PIERROT (E.N.S.).	» PHILIPPON.	16. DUVIGNAUD.
3. ELKOUBI (E.N.S.).	10. FUZIER.	17. CROUZET.
4. KORNMANN.	» OZON.	18. PÉLISSIER.
» PAGLIERO (E.N.S.).	12. RIOU (Fontenay).	19. HUET.
6. ETIÉVANT.	13. AVRIL.	19bis VAN REGEMORTEN (E. N.S.).
7. GUÉVILLE (E.N.S.).	14. PELLETIER.	20. POUGET.

3. Proposés pour l'équivalence du C.A.P.E.S.

MM.
DUTIGNY.
GROSJEAN.

M^{mes} et M^{lles}
PERRAUTEAU (Fontenay).
MINOIS (E.N.S.).

Proposés pour la dispense de la partie théorique du C.A.P.E.S.

MM.
EDELIN.
FERNIQUE.
POUGET.

M^{lle}
MARCHAL.

4. C.A.P.E.S. (Ancien Régime)

Hommes

MM.	MM.
1. PLANE.	6. L'ESPAGNOL.
2. LAGOUTTE.	7. POUJOL.
3. GIRAUD.	8. JOLIE.
4. SIMON.	9. LE CORRE.
5. ARNAUD.	

Femmes

M ^{mes} et M ^{lles}
1. BRUNEL.
2. TINCHON.
3. CARLE.

5. C.A.P.E.S. (Nouveau Régime)

Admis

MM.
DUMONT (T.B.).
TOUDIC (T.B.).
ACHARD (B.).
BERNARD (B.).
CASTELLANET (B.).
CHABROLLES (B.).
CHEVALLOT (B.).
DELAHAYE (B.).
FLORY (B.).
GRUEZ (B.).
KINDLER (B.).
MAURIN (B.).
MONNIN (B.).

MM.
MOREL (B.).
PHILIPPE (B.).
PRADAYROL (B.).
PROTEAU (B.).
SANCHIS (B.).
BALLERET (A.B.).
CALOET (A.B.).
CHAPPAZ (A.B.).
CHEMOUILLY (A.B.).
CHEVALIER (A.B.).
CRAMPAGNE (A.B.).
DELCROS (A.B.).
FRASNAY (A.B.).

MM.
GRASSIN (A.B.).
KRUGER (A.B.).
MOTET (A.B.).
NOÉ (A.B.).
PHILIPPON (A.B.).
RANNOU (A.B.).
RAULLET (A.B.).
TAILLADE (A.B.).
AUGÉ (P.).
BERNIER (P.).
COUMBA (P.).
NICOLAÏ (P.).

Admises

M^{mes} et M^{lles}
ASPEELE (T.B.).
CARRERAS (T.B.).
RÉGIS (T.B.).
VANACKER (T.B.).
VIGNES (T.B.).
BÉRARD (B.).
BEUGIN (B.).
BREIX (B.).
CAMOUX (B.).
DUHARD (B.).
LEFÈVRE (B.).
LE LUHERN (B.).

M^{mes} et M^{lles}
MARCHOU-MONJAUZE (B.).
MIGNON-CALVEL (B.).
NAKACH (B.).
NEUHAUS (B.).
PÉROLE (B.).
POLLET (B.).
PROUTI (B.).
SARDOS (B.).
VAILLE (B.).
BOUDIER (A.B.).
CHAZALON-GOUJON (A.B.).
DEPAIX (A.B.).

M^{mes} et M^{lles}
DUMONT (A.B.).
GOUBLET-MONETA (A.B.).
LEMASURIER (A.B.).
MURE (A.B.).
PILLON (A.B.).
RIGAUD (A.B.).
ROBIN (A.B.).
SCHMITT (A.B.).
TAIB (A.B.).
WEIL (A.B.).
HAGÈNE (P.).

III. Documents officiels

Rapport sur le concours général de mathématiques en 1954 (classe de mathématiques)

Le Jury était composé ainsi : M. ROBERT, inspecteur général, président ; Mlle RANSON, professeur de mathématiques (Fontenay) au lycée Jules-Ferry ; M. BOUSQUET, professeur de mathématiques supérieures au lycée Chaptal ; M. COSSART, professeur de mathématiques (Ecole Supérieure d'Electricité) au lycée Chaptal ; M. DURRANDE, professeur de mathématiques (Centrale) au lycée Saint-Louis ; M. ECALLE, professeur de mathématiques (Navale) à l'annexe Stanislas du lycée Saint-Louis.

L'idée du problème procédait de la remarque suivante : lorsque quatre points analytiques de l'espace sont situés sur une même sphère de rayon nul, leurs distances mutuelles satisfont à la relation classique de Ptolémée sur le quadrilatère inscriptible à un cercle (1). Transcrite dans le langage de la géométrie réelle, cette propriété

(1) D'après la formule donnant le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre dont on donne les six arêtes (voir J. HADAMARD, *Leçons de géométrie*, n° 675).

donne, en particulier, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un cercle du plan d'un triangle ABC soit tangent au cercle circonscrit à ce triangle. Une recherche directe de cette condition est un problème de géométrie élémentaire.

Cette condition donne une démonstration presque immédiate du théorème de Feuerbach.

Partie I. — 1° On envisage d'abord une inversion de pôle O distinct des points A, B, C, et les inverses A', B', C' de ces points. On demande de justifier les deux relations :

$$(1) \frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB} : \frac{OC}{OB} \quad \text{et} \quad (2) (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \pmod{2\pi}.$$

Dans presque toutes les copies la première égalité est établie à partir de la formule classique $A'B' = \frac{|k|BA}{OA \cdot OB}$. Mais les élèves n'indiquent pas que les triangles OAB, OB'A' sont indirectement semblables, ce qui leur a rendu l'égalité (2) difficile à démontrer. On voit ici apparaître la tendance à appliquer un résultat sans évoquer la manière dont il a été obtenu. Il serait bon que les élèves comprennent qu'un cours fournit, non seulement des résultats à connaître, mais des modes de raisonnement, des méthodes, applicables à d'autres questions que les questions classiques.

Le fait, signalé par les cours, que A, B, B', A' sont concycliques, a été utilisé, mais ne permet que la justification de (2) à $k\pi$ près (et non à $2k\pi$ près).

Peu de concurrents se sont inquiétés de ce détail et la plupart de ceux qui ont essayé de démontrer la relation angulaire (2) $\pmod{2\pi}$ ont examiné différents cas de figure.

On préférerait que ceux qui n'ont pas signalé cette difficulté reconnaissent carrément qu'ils n'arrivent pas complètement au résultat demandé : cela aurait permis de les distinguer de ceux qui ne l'ont pas vue du tout.

D'autres arrivent au but par des procédés irréguliers. L'un traduit le fait que A, B, B', A' sont sur un cercle, par une égalité entre angles de vecteurs, et non de droites. Un autre ajoute deux égalités, valable chacune à $k\pi$ près, ce qui donne une égalité valable, selon lui, à $2k\pi$ près. Il n'y a donc pas encore partout une parfaite compréhension de l'usage des angles généralisés.

2° On demande de déterminer O de manière que le triangle A'B'C' soit directement semblable à un triangle donné T₁ du plan.

Sans doute, l'enseignement traditionnel des cas de similitude de deux triangles est-il muet sur la distinction des deux cas de similitude directe ou indirecte. Dans l'état actuel des choses, il semble qu'il serait bon de revenir sur ces points dans les classes de Mathématiques.

Les candidats avaient, d'après leurs souvenirs de la Seconde, trois méthodes à leur disposition pour résoudre la question posée, dont chacune est l'application d'un des cas de similitude. Le second donne les moindres difficultés et les jalons de 1° devaient naturellement conduire à son emploi. Le troisième, utilisé par certains, ne peut tenir compte de la stipulation que l'orientation du triangle A'B'C' est donnée.

L'inventaire des tracés fournissant un point O (qui est supposé répondre à la question) est ici instructif : il y a surabondance de constructions possibles de O, et donc nécessité d'une synthèse intelligente utilisant celle qui est préférable pour justifier au mieux de la convenance d'une solution. Il faut souligner que ce choix est d'esprit tout différent de celui du tracé le plus avantageux graphiquement, il vise à la simplicité de la discussion.

Des exemples classiques de circonstances analogues ne manquent pas : citons la recherche du centre de rotation de deux figures planes (directement) égales.

Quelques candidats seulement ont clairement indiqué pourquoi le problème a en général une solution, et quels sont les triangles T₁ pour lequel le problème est impos-

sible : ce sont les triangles indirectement semblables au triangle ABC. Cette exception disparaît si l'on admet l'emploi d'une symétrie par rapport à une droite du plan comme inversion : elle n'a plus de centre O.

3° Les réflexions précédentes auraient pu permettre de découvrir la solution de la question : rechercher un point m du plan ABC tel que $\frac{mA}{\alpha} = \frac{mB}{\beta} = \frac{mC}{\gamma}$

α, β, γ étant trois nombres positifs donnés.

Seule, la discussion de cette question offre une difficulté, que les paragraphes précédents 1° et 2° permettaient de dominer.

En effet, en considérant m comme un pôle d'une inversion transformant les points donnés A, B, C en A', B', C', le triangle A'B'C' doit avoir ses côtés B'C', C'A', A'B' proportionnels à $\alpha\alpha, b\beta, c\gamma$ [et réciproquement, s'il en est ainsi, m est solution du problème]. A condition qu'il existe un triangle T₁ de côtés égaux à $\alpha\alpha, b\beta, c\gamma$, et alors il en existe deux, différents par l'orientation, on est ramené à (I, 2°). On trouve ainsi que si la plus grande des trois longueurs $\alpha\alpha, b\beta, c\gamma$ est inférieure (ou égale) à la somme des deux autres, il existe deux points m_1, m_2 distincts (ou confondus), dont les distances à A, B, C, sont proportionnelles à α, β, γ .

La discussion de l'existence de ces points a été nette dans certaines copies ; mais dans tant d'autres, les locutions « il faut et il suffit », « condition nécessaire et suffisante », bien commodes, n'indiquent pas à quoi elles se rapportent. Non employées dans une proposition complète, de telles locutions servent trop souvent à masquer l'insuffisance ou l'absence du raisonnement.

L'étude du lieu (Λ) des points M de l'espace tels que $\frac{MA}{\alpha} = \frac{MB}{\beta} = \frac{MC}{\gamma}$ se rattache immédiatement à la précédente : quand la condition d'existence du couple de points (m_1, m_2), précédemment signalée, est remplie, (Λ) est le cercle orthogonal au plan (P) du triangle ABC en m_1 et m_2 .

Ce cercle forme un anneau orthogonal avec le cercle ABC, ce qui se vérifie très simplement, et ainsi le cercle circonscrit au triangle commence à intervenir dans le problème. Pour que (Λ) se réduise à un cercle point, il faut et il suffit que le triangle T₁ soit aplati, et alors ce (cercle) point M appartient au cercle ABC.

4° On suppose désormais qu'il en soit ainsi, et il est visible que ce cas est caractérisé par la relation d'égalité $\alpha\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0$, où α', β', γ' sont des nombres algébriques de valeurs absolues α, β, γ .

α', β', γ' sont nécessairement deux d'un même signe et le troisième du signe contraire. La distinction de ces cas se rattache à la situation de M sur le cercle ABC, partagé par ces points en arcs inférieurs à un demi-cercle. Les concurrents, déjà essoufflés, n'ont guère précisé les divers cas de figure.

A tout point M du cercle ABC correspondent des nombres algébriques α', β', γ' , de rapports mutuels déterminés et tels que $\alpha\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0$: on considère les points U, V, W, situés respectivement sur BC, CA, AB, et tels que

$$\frac{UB}{UC} = \frac{\beta'}{\gamma'}, \quad \frac{VC}{VA} = \frac{\gamma'}{\alpha'}, \quad \frac{WA}{WB} = \frac{\alpha'}{\beta'}$$

et leurs conjugués harmoniques U', V', W', respectivement par rapport à B et C, C et A, A et B. Les sphères de diamètres UU', VV', WW' ont en commun le cercle point M et sont orthogonales en ce point au cercle ABC.

Le théorème de Ménélaus montre que les six points U, U', V, V', W, W' sont trois à trois alignés sur les côtés UVW, UV'W', U'VW', U'V'W', d'un quadrilatère complet (Q) correspondant au point M.

Une question intéressante (qui était, avouons-le, un peu en marge de l'idée centrale du problème) était posée, à la fin de 4°, aux concurrents : quelles sont les enve-

loppes, des quatre côtés de (Q) ? Des indications (a), (b), (c), destinées plus à jalonner une méthode qu'à allonger la rédaction du problème, étaient fournies, mais l'énoncé, bien que précisant que les enveloppes cherchées étaient autant de points fixes, laissait secrète la situation remarquable de ces points (qui sont les centres I, J, K, L des quatre cercles inscrits et ex-inscrits au triangle ABC).

Le paragraphe (a) [les droites telles que MU, MU' passent par des points fixes] a été abordé souvent, mais traité superficiellement. Les parties (b) et (c), plus difficiles, n'ont pas été traitées. Cependant, un concurrent, le meilleur, semble-t-il, sans y avoir recours, a montré que la droite UVW passe par I.

A quoi faut-il attribuer cet insuccès ? Difficulté de la chose à découvrir sans doute. Le centre I du cercle inscrit au triangle ABC, par exemple, est le point commun aux cercles décrits sur BC, CA, AB comme cordes et ayant pour centres respectifs les milieux des arcs interceptés, sur le cercle ABC, par les angles du triangle. On peut penser que cette propriété, vue en Seconde, ne s'est pas imposée aux souvenirs des concurrents.

La démonstration que le texte préparait ne reposait que sur la condition pour que quatre points soient concycliques, utilisant deux couples de droites isogonaux. La théorie de l'hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes n'est pas au programme de la classe de Mathématiques. Avec des connaissances plus poussées sur ce sujet, les considérations du texte font vérifier ce résultat remarquable : *le quadrilatère complet (Q) relatif au point M est circonscrit à une seule hyperbole équilatère (comptant double) qui touche les côtés du quadrilatère aux quatre points I, J, K, L.*

Le lauréat qui a prouvé que la droite UVW passe par I a employé, lui, le théorème de Ménélaus et sa démonstration, généralisée, permet d'énoncer le résultat suivant : une droite étant caractérisée, par rapport au triangle ABC, par le fait que les mesures algébriques des distances de A, B, C à cette droite soient proportionnelles aux nombres α' , β' , γ' ; si la droite varie de façon que α' , β' , γ' soient liées par la relation linéaire homogène $u\alpha' + v\beta' + w\gamma' = 0$, elle passe par un point fixe (le barycentre des sommets A, B, C affectés des coefficients u , v , w).

Partie II. — 1° On considère les cercles (Γ) du plan (P) tels que les puissances de A, B, C par rapport à un tel cercle soient proportionnelles à α^2 , β^2 , γ^2 et l'on demande de caractériser l'axe radical d'un tel cercle (Γ) et du cercle ABC.

On a très généralement pensé à appliquer le théorème de la différence des puissances d'un point par rapport aux deux cercles, en considérant pour ce point les positions A, B, C. Il en résulte que les distances (algébriques) de ces points à l'axe radical sont proportionnelles à α^2 , β^2 , γ^2 , et que cette droite coupe les côtés du triangle en des points fixes : l'axe radical est fixe (quel que soit Γ).

Mais les copies qui contiennent ce raisonnement n'ont pas établi l'existence des cercles (Γ) et n'ont pas soupçonné le rapport existant entre cette question et la partie I du problème : ces cercles doivent satisfaire à deux conditions, l'une, par exemple, étant que le rapport des puissances de A et de B soit $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$; considéré isolément, ce fait équivaut à dire que l'axe radical d'un tel cercle (Γ_1) avec le cercle

ABC passe par le point w de AB, tel que $\frac{wA}{wB} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$, qui est fixe. Une propriété de la théorie des divisions harmoniques permettait de qualifier w comme milieu du segment WW' (les points W, W' partagent AB dans les rapports $\pm \frac{\alpha}{\beta}$).

Il n'était pas indispensable de connaître cette propriété : dire que l'axe radical de (Γ_1) et de ABC passe par w , c'est dire que la puissance de w par rapport au cercle (Γ_1) est la constante $wA \cdot wB$ (positive) ou encore que (Γ_1) est orthogonal à un

cercle fixe de centre w . Ceci doit s'appliquer en particulier aux cercles points tels que le rapport des distances de A et B à ces points soit $\frac{\alpha}{\beta}$; on sait déjà que ces points appartiennent au cercle décrit sur WW' comme diamètre. Le cercle fixe de centre w , mis précédemment en évidence, doit donc se confondre avec le cercle de diamètre WW' .

En revenant aux cercles (Γ) , on voit, par cette interprétation de chacune des deux conditions auxquelles ils sont assujettis, qu'ils sont orthogonaux aux cercles (WW') ; (VV') décrits sur deux diagonales du quadrilatère complet (Q) comme diamètres : et réciproquement cette double orthogonalité suffit pour qu'un cercle soit de la famille (Γ) .

Bien entendu les cercles (Γ) sont aussi orthogonaux au cercle de diamètre UU' , et l'on retrouve un théorème célèbre sur le quadrilatère complet.

L'axe radical d'un cercle (Γ) et du cercle ABC est la droite urw joignant les milieux des diagonales de ce quadrilatère. Il en résulte que la famille des cercles (Γ) est un faisceau linéaire (Φ) de cercles défini par son axe radical et le cercle circonscrit au triangle ABC.

Trois cas de figure sont possibles : on peut les discuter par les points limites du faisceau (Φ) . *A priori* ceux-ci, s'ils existent, sont les points M_1 et M_2 de la partie (I) et inversement, si M_1 et M_2 existent, ces points sont des cercles points du faisceau (Φ) .

1^{er} cas. — *Le cercle (Λ) n'existe pas* : les cercles (Γ) du faisceau (Φ) passent par deux points fixes du cercle ABC.

2^e cas. — *Le cercle (Λ) existe, et n'est pas de rayon nul* : les cercles (Γ) sont tels que m_1 et m_2 leur sont inverses : ils sont intérieurs ou extérieurs au cercle ABC.

3^e cas. — *Le cercle (Λ) est de rayon nul* : c'est un point M du cercle ABC : les cercles (Γ) sont tangents en M au cercle ABC.

Le faisceau (Φ) n'est autre que le faisceau conjugué de celui qui serait défini par deux des cercles (UU') , (VV') , (WW') [et qui contient d'ailleurs le troisième].

2^o De cette étude résulte une condition nécessaire et suffisante pour qu'un cercle, tel que les puissances de A, B, C, par rapport à lui, sont proportionnelles à α^2 , β^2 , γ^2 , soit tangent au cercle ABC : c'est $a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0$ (α' , β' , γ' , étant, aux signes près, α , β , γ). C'est-à-dire aussi : $a\sqrt{|\mathcal{P}_A|} \pm b\sqrt{|\mathcal{P}_B|} \pm c\sqrt{|\mathcal{P}_C|} = 0$ $\mathcal{P}_A$, $\mathcal{P}_B$, $\mathcal{P}_C$ étant les puissances considérées, nécessairement d'ailleurs de même signe.

3^o Cette condition est vérifiée par le cercle inscrit au triangle XYZ dont les milieux des côtés sont les points A, B, C. En effet, les longueurs des tangentes issues de A, B, C à ce cercle sont $|b - c|$, $|c - a|$, $|a - b|$. Prenons

$$\alpha' = b - c \quad \beta' = c - a \quad \gamma' = a - b.$$

On vérifie immédiatement que $a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0$.

Le cercle inscrit au triangle XYZ est donc tangent en un certain point μ au cercle ABC [qui est le cercle d'Euler de ce triangle].

On demandait de prouver que dans ces conditions particulières pour α' , β' , γ' , la droite UVW passe par le point de concours G des médianes (de ABC, et aussi de X, Y, Z) et que les droites UV'W', U'VW', U''V'W' passent respectivement par X, Y, Z.

Un seul candidat l'a reconnu. Ces propriétés se rattachent à la proposition que nous avons signalée à la fin du commentaire de la partie I, et s'établissaient par la relation de Ménélaüs. De l'une d'entre elles, on déduisait aisément les autres par l'emploi de la théorie des faisceaux harmoniques.

4°. La même théorie permettait, en guidant étroitement les candidats par l'énoncé, d'établir la conclusion remarquable suivante : la droite IG et la tangente au point de contact μ du cercle inscrit à XYZ et du cercle circonscrit à ABC sont deux transversales réciproques par rapport au triangle XYZ.

Cette partie du problème ne présentait d'autre difficulté que de faire des figures claires. Elle a été abordée, même par des concurrents qui n'avaient pas fait tout le reste.

Si personne n'a rédigé la solution du problème dans son intégralité, on s'est attaqué, parfois avec succès, à presque toutes les parties de ce problème.

Mais l'impression dominante est celle du nombre important de copies vraiment faibles. Au lieu de réfléchir à la question posée, les candidats paraissent avoir hâte d'appliquer les résultats qu'ils connaissent, comme on essaye à une serrure toutes les clefs d'un trousseau.

Ils ne semblent pas être convaincus que telle question puisse être abordable par plusieurs procédés. Nombreux sont ceux qui ont invoqué comme connu le théorème de Feuerbach, sans se rendre compte qu'on les guidait vers une démarche y conduisant et différente de la démonstration habituelle.

Enfin, le manque de netteté dans les discussions, notamment dans (I, 3°) ne permettait pas d'échafauder sur une base solide les recherches ultérieures.

Une demi-douzaine de copies révèlent des qualités certaines, et leurs auteurs seraient capables, en temps non limité, de transformer leur ébauche en un excellent devoir.

Le lauréat classé premier a, mieux que les autres, dominé le sujet, sans chercher à glaner des résultats au petit bonheur, un peu partout.

La longueur du sujet est une circonstance atténuante pour les défauts multiples relevés par les correcteurs, qui signalent, en particulier, trop de négligences dans les figures.

Le jury a décerné un unique prix (Premier prix) et cinq accessits. La moyenne sur 20 du meilleur est 13,6 ; pour les cinq autres, cette moyenne prend les valeurs 10,5 ; 10 ; 8,5 ; 8,3 ; 8.

Trois de ces lauréats avaient déjà figuré au palmarès de 1953 du Concours Général (classe de Première).

P. ROBERT,

Inspecteur général, Président du Jury.

Certificat d'Aptitude au professorat de l'Enseignement du Second degré

(Ancien régime)

Mathématiques

(SESSION 1954)

Rapport de M. l'Inspecteur général ROBERT, Président du Jury

EPREUVES PRATIQUES

Les épreuves pratiques ont été subies par quatre candidats, tous stagiaires d'enseignement en seconde année de stage, et par une candidate, adjointe d'enseignement, autorisée à se présenter au concours en 1954.

Tous les candidats ont été déclarés admis aux épreuves pratiques, un avec mention très bien, deux avec mention bien, un avec mention assez bien, la candidate a été également admise avec mention bien.

L'interruption du stage subie pendant un an par les candidats pendant l'année scolaire 1952-1953, durant laquelle ils ont accompli leur service militaire, n'a pas

semblé avoir de répercussion appréciable sur leur formation pédagogique, et, en fait, tous ces candidats, comme la candidate, ont réussi aux épreuves théoriques d'une manière honorable.

EPREUVES THEORIQUES

Le jury national du C.A.P.E.S., ancien régime (section mathématiques, hommes et femmes) pour la session 1954 était composé de M. ROBERT, Inspecteur général de l'Instruction publique, président ; de Mlle BUDON, professeur au lycée Jules-Ferry ; de MM. MINOIS et MULTON, professeurs aux lycées Saint-Louis et Buffon.

La session des épreuves théoriques a commencé le 8 juin, date du début des épreuves écrites ; elle a été close le 10 juillet 1954, date de la proclamation des résultats.

EPREUVES ÉCRITES. — Elles ont eu lieu les 8, 9, 11, 12 juin. L'épreuve de calcul numérique (12 juin) n'intervient pas pour l'admissibilité.

Les sujets proposés étaient les mêmes pour les candidats et les candidates.

On trouvera, en annexe à ce rapport, les rapports des correcteurs sur les compositions écrites.

ADMISSIBILITÉ. — Les douze candidats inscrits ont tous composé et dix d'entre eux ont été déclarés admissibles. Les deux candidats éliminés n'ont pas atteint la moyenne 4,5 (sur 20) pour le total des épreuves écrites. Le premier des admissibles a la moyenne 14,3 ; le dernier a 8,5.

Sur six candidates inscrites, cinq avaient composé. Trois seulement ont été déclarées admissibles. Les deux autres n'ont pas atteint la moyenne 4,5. La première des admissibles a la moyenne 10 ; les deux autres ont des moyennes voisines de 8,5.

Les listes d'admissibilité, distinctes, des candidats et des candidates, ont été affichées, par ordre alphabétique, le 28 juin.

EPREUVES ORALES. — Elles ont eu lieu au lycée Louis-le-Grand, du 5 au 10 juillet.

Chaque admissible a eu à faire deux leçons : l'une d'elles était relative à la géométrie ou à la descriptive, l'autre concernait l'algèbre, ou la trigonométrie, ou l'arithmétique.

A la séance inaugurale, les concurrents avaient tiré au sort des enveloppes contenant l'association des textes de leurs sujets de leçons, association déterminée préalablement par le jury et connue de lui seul.

Tous les candidats et candidates admissibles se sont présentés à l'appel du 5 juillet, et ont exposé leurs leçons aux jours et heures qui leur ont été fixés.

Le nombre des admissibles étant notablement plus faible que lors des années précédentes, le jury a pu faire un tri dans la multiplicité des sujets de leçons possibles : d'abord en évitant de faire traiter les thèmes qui servent généralement de sujets de leçons aux épreuves pratiques ; ensuite en écartant les plus difficiles leçons de la classe de Mathématiques. Malgré cette dernière précaution, il a semblé que le programme de cette classe, surtout en arithmétique, soit peu approfondi par les candidats. Les lacunes dans les connaissances n'ont pu être compensées par des qualités personnelles de logique et de méthode. On ne peut dénier l'effort de préparation que les concurrents ont, en général, accompli, dans le cours de l'année, pour être au niveau du programme de la classe de Mathématiques ; il semble cependant qu'ils l'aient employé à assimiler des procédés, à associer des exemples aux théories, plutôt qu'à ordonner des faits autour d'idées générales.

Sur les vingt-six leçons entendues, vingt ont mérité des notes supérieures ou égales à 10 (sur 20) ; dont deux 17, quatre 16, trois 15, six 14, deux 13, un 12, un 11, un 10 ; viennent ensuite un 8, deux 7, deux 5 et un 2.

Alors que quatre concurrents avaient dépassé la note 15 dans chacune de leurs leçons l'an dernier, cet exploit n'a été réalisé, à la session de 1954, que par un seul, classé premier, des candidats. Ce fait illustre un affaiblissement de la qualité des concurrents, en cette session, par rapport aux sessions précédentes. La correction des épreuves écrites avait conduit les membres du jury à la même conclusion ; ils ont été obligés de faire preuve de plus d'indulgence que par le passé.

RESULTATS GENERAUX

Candidats. — Pour l'ensemble des épreuves théoriques, la moyenne des notes obtenues (majorations non comprises) par chacun des dix admissibles varie de 14 à 7. Le jury a proposé, pour l'admission définitive, les neuf premiers candidats ; la moyenne du dernier de ceux-ci est 10,3.

La liste des nouveaux certifiés se compose de quatre stagiaires, quatre adjoints d'enseignement titulaires, un professeur du cadre chérifien.

Candidates. — La moyenne des notes pour les trois admissibles atteignant 11,75, 10,5, 10,2, toutes trois ont été proposées pour l'admission définitive.

Ce sont, un professeur du cadre chérifien, une adjointe d'enseignement titulaire et une adjointe d'enseignement stagiaire.

La session 1954 semble avoir épuisé la réserve de recrutement qui avait été constituée lors des choix, sur titres, des licenciés autorisés les années précédentes, à se présenter au C.A.P.E.S. (ancien régime).

Il demeure cependant des adjoints d'enseignement qui pourront encore profiter d'une session du C.A.P.E.S.¹ en 1955.

Nous les engageons à faire tous leurs efforts en vue de cette épreuve, sans se duper d'illusions. Le pire serait d'espérer que la possession d'une mention aux épreuves pratiques confère une inscription automatique sur un nouveau « plan de liquidation ».

Le C.A.P.E.S. première formule a rendu de grands services et a maintenu la tradition de l'ancien certificat d'aptitude à l'enseignement dans les collèges. Si des considérations d'équité justifient sa reconduction au delà de l'année 1954, il demeure essentiel que le niveau de ce concours y soit maintenu, sans souci d'apporter un palliatif, qui ne pourrait être à l'avenir que dérisoire, à la crise du recrutement en maîtres de l'Enseignement du Second Degré.

ANNEXE I

Rapport sur l'épreuve dite : problème

Correcteurs : Mlle BUDON et M. MINOIS

Rapporteur : Mlle BUDON (1)

Le problème de géométrie élémentaire proposé est l'étude des triangles formés par les pieds des bissectrices d'un triangle ABC. Il est précisé qu'on s'occupera particulièrement du triangle $A_1B_1C_1$ déterminé par les pieds des bissectrices intérieures d'un triangle ABC à côtés inégaux.

L'étude est divisée en trois parties : la plupart des candidats ont traité plus ou moins complètement la première, notée 12,5 sur 20, et abordé la seconde, notée 7,5 sur 20. Aucun candidat n'a eu une vue d'ensemble du problème.

I^{re} partie

1° Il s'agit d'abord de rétablir des propriétés classiques du quadrilatère complet formé par les six pieds des bissectrices ; elles sont généralement connues des candidats, mais pas toujours démontrées avec rigueur.

(1) Les textes seront encartés dans le prochain *Bulletin*.

2° Les trois cercles ayant pour diamètres les diagonales se coupent deux à deux sous l'angle $\frac{\pi}{2}$. Les démonstrations suggérées utilisent l'inversion. Un emploi abusif des propriétés angulaires alourdit la première démonstration ; la dernière n'est pas toujours exacte. Enfin, pour prouver que deux des cercles sont sécants, le manque de précision empêche généralement les candidats de conclure correctement.

3° La généralisation à l'espace est souvent comprise et beaucoup de candidats évitent de refaire les démonstrations. L'anneau orthogonal est parfois confondu avec l'ensemble de deux cercles orthogonaux.

4° Les relations métriques résultant du fait que les cercles se coupent sous l'angle $\frac{\pi}{2}$ sont établies correctement en ce qui concerne le cosinus ; mais l'utilisation du sinus, pour l'expression de la surface d'un triangle, paraît généralement ignorée, d'où la difficulté rencontrée pour établir la deuxième formule.

II^e partie

I, J, K étant les milieux des côtés du triangle $A_1B_1C_1$, il est facile d'établir que les triangles ABC, IJK sont homologues ; d'où l'on déduit que les droites AI, BJ, CK, concourent en un point O. La démonstration proposée, qui utilise la perspective d'un plan sur un autre, n'est pas familière aux candidats, qui préfèrent l'homographie.

Le point O est le centre d'un hexagone à côtés égaux ; l'hexagone a été dessiné avec soin dans les meilleures copies, la propriété essentielle n'a cependant pas été établie.

La généralisation faisant l'objet du 5° n'a pas été abordée.

III^e partie

Il s'agit seulement de constater que la construction du triangle ABC, connaissant $A_1B_1C_1$, est liée à celle de cet hexagone ; cette conclusion n'a pas été donnée.

Sur les 17 copies corrigées, 13 ont été notées de 9,5 à 14 (sur 20). Les meilleures montrent des qualités de soin, de rigueur, sans que le sujet soit véritablement dominé. Les quatre autres notées de 2,5 à 3,5 prouvent une formation très insuffisante : les auteurs de ces copies n'ont pas été admissibles.

Cette épreuve montre que les aspirants professeurs se destinant à l'Enseignement Secondaire n'ont pas une connaissance suffisante des méthodes de la géométrie élémentaire (grandeurs orientées, inversion, perspective). Il leur restera encore à les apprendre en travaillant avec leurs élèves.

ANNEXE II

Rapport sur l'épreuve dite : corrigé (1)

Correcteurs : M. MULTON et Mlle BUDON

Rapporteur : M. MULTON

Cette épreuve demande, comme son texte le rappelle, une solution suivie d'un commentaire, constituant avec elle le corrigé du problème proposé, ce dernier pouvant être le sujet d'un devoir donné aux élèves d'une classe de Mathématiques Élémentaires.

Le commentaire ne peut sans doute pas être exactement ce qu'il serait si les candidats avaient réellement corrigé les devoirs d'élèves, mais leur expérience pou-

(1) Cf. bas page 11.

vait leur dicter quelques conseils à donner relativement à l'emploi des notations, à la conduite des calculs, à la discussion des équations ; ils pouvaient aussi faire des remarques géométriques recoupant certains calculs ou précisant la portée d'un résultat. Il aurait fallu, pour cela, traiter le problème et avoir ensuite encore assez de temps pour la rédaction du commentaire.

Une seule copie, présentant d'ailleurs des lacunes, aborde toutes les parties du problème et donne la plupart des résultats ; elle ne fournit pas de commentaire ; les autres compositions donnent des solutions partielles du problème sans donner de commentaire ; l'une d'elles, cependant, présente quelques remarques dont il a été tenu compte par quelques points ajoutés à la note du problème.

Le nombre total des points : 60, a été attribué au problème (47 points à la partie I, 13 points à la partie II). Les notes se répartissent en trois groupes assez nettement séparés : quatre dépassent la moyenne et une lui est égale (48, 36,5, 34, 34, 30) ; ensuite six notes se répartissent de 25,5 à 22 ; enfin six notes se répartissent de 17,5 à 3, celle qui est immédiatement supérieure à 3 étant 10,5.

Voici quelques observations relatives au travail fourni par les candidats :

Dans toutes les copies : beaucoup d'imprécision et des négligences dans l'emploi des notations algébriques et arithmétiques, ce qui amène des confusions et des calculs douteux.

Le lieu du point ω signalé dans toutes les copies, sauf quatre, est indiqué d'une manière plus ou moins complète, mais toujours sans réciproque.

Dans presque toutes les compositions, discussion incomplète de l'équation en φ de (I, 1°), cette dernière se résolvant par une décomposition en facteurs et moyennant $1 \pm e \cos \theta \neq 0$ (le coefficient de φ^2 est $1 - e^2 \cos^2 \theta$) ; l'abaissement possible du degré n'a pas été soupçonné.

Même observation au sujet de l'équation qui, dans I, 3°, a pour racines, en général $\overline{Ff_1}$ et $\overline{Ff_2}$ (inconnue x), ou au sujet de celle dont les racines sont $\overline{FO'_1}$ et $\overline{FO'_2}$ (inconnue λ), dans lesquelles le coefficient du terme du deuxième degré contient $e^2 - 1$ en facteur.

Dans le calcul de $\mathcal{P}$ (I) on simplifie l'expression en divisant ses deux termes par $1 - e^2 \cos^2 \theta$ presque toujours sans dire que $1 - e^2 \cos^2 \theta$ ne doit pas être nul ; personne ne s'est demandé dans quelles circonstances $1 - e^2 \cos^2 \theta$ devient nul, et ce que deviennent alors le cercle (ω) et $\mathcal{P}$ (I).

Quelques candidats recherchent $\underline{f_1}$ et $\underline{f_2}$ en identifiant à zéro la dérivée par rapport à t , l'un d'eux la dérivée par rapport à θ , de $\left(\frac{\omega I}{\omega h^2}\right)^2$; ils ne viennent pas à bout de leurs calculs.

L'égalité $\frac{1}{\overline{Ff_1}} + \frac{1}{\overline{Ff_2}} = -\frac{2}{\overline{Fi}}$ n'est trouvée que dans quelques copies ; une seule l'interprète.

$\overline{Fi}$ et $\mathcal{P}(i)$ sont calculés dans un certain nombre de compositions et la condition pour que i coïncide avec $\underline{f_1}$ (ou avec $\underline{f_2}$) est trouvée dans quelques-unes d'entre elles, qui ne mentionnent pas toujours qu'alors $\mathcal{P}(i)$ est nul.

La partie II n'est traitée d'une manière passable que dans une copie.

Enfin, la présentation matérielle de beaucoup de compositions laisse à désirer ; certains calculs mal écrits, mal disposés, sont difficiles à lire ; dans l'une des compositions, des expressions surchargées sont illisibles ; il y a là un danger auquel les candidats ne doivent pas s'exposer.

ANNEXE III

Rapport sur le calcul numérique (1)

Correcteurs : M. MINOIS et M. MULTON

Rapporteur : M. MINOIS

Il s'agissait de calculer deux inconnues définies par deux formules simples. Un paramètre n pouvait prendre les sept valeurs 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1. Une conséquence en résultait immédiatement, soulignée par le texte : la nécessité de construire un tableau de calculs clairs et bien ordonnés.

La seule difficulté de l'épreuve consistait à calculer un logarithme, lui-même calculé à l'aide de son logarithme ou du logarithme de son opposé. Elle n'a jamais gêné les candidats. Au surplus, il s'agissait d'une difficulté qui se rencontre tout naturellement dans la classe de Sciences Expérimentales.

Les calculs ont été convenables, en général. Sept candidats ou candidates ont disposé leurs calculs avec adresse et avec soin. Ils en ont été largement récompensés. En dehors d'une copie à peine ébauchée et dont l'existence surprend en ce concours, les notes se sont étalées de 19 (donnée trois fois) à 6 (donnée une fois). Douze notes furent supérieures ou égales à la moyenne.

Conformément à la tradition de cette épreuve, le calcul était totalement abstrait. Quelques lignes placées à la fin du texte en expliquaient l'origine concrète (ralentissement d'un navire qui stoppe ses machines). Les candidats en pouvaient tirer quelque réconfort dans le déroulement de leurs calculs.

ANNEXE IV

Rapport sur l'exposé pédagogique

Correcteurs : MM. ROBERT et MINOIS

Texte de l'épreuve. — « Les mathématiques, a dit Descartes, ont des innovations très subtiles et qui peuvent beaucoup servir, tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et diminuer le travail des hommes. »

Et Jules Tannery, à propos de ce texte, écrivit : « Notre enseignement est volontiers un enseignement de luxe ; on s'excuse de ce luxe en parlant de la formation des esprits et l'on décore d'une belle épithète, en les qualifiant de désintéressés, les enseignements dont l'inutilité crève les yeux. »

En confrontant vos souvenirs d'élève et votre expérience de jeune professeur, avez-vous été parfois tenté de partager, soit l'opinion sévère de Tannery, soit l'optimisme de Descartes ? Comment concevez-vous un enseignement qui ne prête pas à la critique de Tannery, tout en méritant la confiance accordée par Descartes ?

Rapport des correcteurs. — Les deux phrases soumises à l'attention des concurrents pouvaient donner lieu à des considérations rétrospectives ou actuelles. Ces dernières touchant à ce qu'on appellerait aujourd'hui le rôle social des Mathématiques, ont été les plus complaisamment développées dans les copies.

Mais le sujet posait, principalement, le problème du caractère « inutile » de l'enseignement. Les candidats ont sagement limité ce problème à l'enseignement des Mathématiques ; leur travail s'est trop souvent borné à une paraphrase respectueuse des textes qui leur étaient proposés. On ne leur demandait qu'une opinion personnelle, et ils se sont montrés si prudents qu'on pourrait croire qu'ils n'en ont aucune sur ce point fondamental.

Leur style est souvent douteux, leur langage pauvre. Parfois des fautes d'orthographe témoignent de désarroi, peut-être de fatigue en fin d'année scolaire.

Les notes, échelonnées entre 7 et 10 sur 20, ont participé à cette uniforme médiocrité.

(1) Cf. bas page 11.

ANNEXE V

Rapport sur les épreuves orales

Le petit nombre de concurrents admissibles a permis au président du jury de leur donner des conseils généraux sur la préparation, la présentation et la durée des exposés. Ces conseils ont été suivis. La plupart des leçons étaient accompagnées de plans, ce qui est, devant une classe, préférable à la lecture de notes manuscrites, dont certains candidats demeurent encore trop esclaves.

Mais les conseils d'ordre technique qui avaient été publiés dans le rapport du jury les années précédentes ont été de moindre efficacité : nous concevons la réputation de la majorité des candidats déjà admissibles de l'an dernier, à réfléchir à des critiques qui les atteignaient directement. Ainsi deux admissibles se sont trouvés, par hasard, avoir tiré le même sujet de leçon que l'an dernier, et ils ont plus ou moins commis les maladroites qui leur avaient été reprochées dans le rapport de 1953.

Les leçons faibles, plusieurs fois, ont été celles où le concurrent a reconnu franchement qu'il ignorait tout ou partie du sujet, ce qui marque une renonciation consciente à aborder un domaine impréparé ; pour une autre très mauvaise leçon, l'exposition a duré trois quarts d'heure sans posséder aucune consistance, d'où l'échec total mais inconscient du candidat.

Ce genre d'insuccès provient du fait que les étudiants peuvent croire assimilées logiquement des théories d'emploi très usuel auxquels ils n'ont jamais réfléchi soigneusement depuis leurs années de baccalauréat ; il s'agissait de la leçon sur l'extension de la notion d'arc et de la notion d'angle, et le fait est trop habituel pour que nous ne le signalions pas ici : l'étudiant licencié manie si souvent la formule $2k\pi + \alpha$ qu'il faut attirer son attention sur l'incapacité qu'il rencontre à la justifier clairement à des élèves. Cette justification n'exige qu'un vocabulaire concret, sans prétention à l'hermétisme, et un emploi correct des mots : longueur, chemin, parcours, pour préciser les idées.

Un candidat, dont le concours est par ailleurs honorable, ne put tenter aucune justification de la méthode pratique d'extraction de la racine carrée d'un nombre naturel à une unité près, dans le système de numération décimale, en classe de Mathématiques. Le seul remède à préconiser est une méditation à loisir, sur ce sujet, pendant l'année de préparation au concours.

Tel autre qui avait à traiter, dans la même classe, des nombres premiers, renonça à établir que deux produits de facteurs premiers ne sont égaux que s'ils sont identiques, à l'ordre près des facteurs.

De telles leçons n'auraient pu convenir qu'en Troisième ou en Cinquième. Voilà qui est bien surprenant quant à la formation que devraient posséder des professeurs licenciés, voire même, en ne s'attachant pas à une érudition livresque quant au fonctionnement même d'une certaine activité intellectuelle, dont on ne peut espérer que l'âge, à l'avenir, en fera prendre l'habitude.

Les observations qui vont suivre, particulières à certaines leçons, sont moins graves, et ne seront données ici que pour marquer la physionomie des épreuves orales, sans constituer autant de véritables critiques :

Classe de Seconde. — *Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.*

Même en employant la méthode de substitution, il y a lieu d'examiner si les valeurs $\frac{bc' - cb'}{a'b - ab'}$, $\frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}$, trouvées par x et y (quand $a'b - ab' \neq 0$) satisfont effectivement aux équations
$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

C'est d'ailleurs fort court dans cette méthode, et c'est essentiel pour faire comprendre l'avantage logique du procédé.

Il y a lieu d'expliquer aussi pourquoi on suppose, au démarrage, l'un des quatre coefficients a, b, a', b' non nul ; la méthode consistant à résoudre une des équations par rapport à une inconnue, il va de soi que cette équation doit renfermer effectivement cette inconnue.

On pourrait presque aller jusqu'à dire, qu'en disposant des notations (ou quitte à les modifier), on pourrait toujours supposer que ce coefficient non nul est a . Mais il est alors dangereux de présenter ensuite les résultats de discussion, sans insister sur leur relativité, et de se laisser aller à annoncer que si $ab' - ba' = ac' - ca' = 0$, il y a indétermination, sans prévenir que la conclusion n'est certainement exacte que lorsque a (ou a') n'est pas nul.

Classe de Seconde. — *Lieu des points dont le rapport des distances à deux droites données est donné.*

La méthode utilisant l'homothétie a été bien comprise (lorsque les droites sont sécantes) : mais dans le cas où elles sont parallèles, la translation, ce parent pauvre, n'a pas été mise aussi bien en lumière.

Il semble qu'il y ait avantage (dans le premier cas) par marker que le lieu est formé, *à priori*, de droites passant par le point de rencontre des droites sécantes ; leur décompte pose ensuite un problème facile.

Classe de Mathématiques. — *Première leçon sur l'ellipse.*

Le candidat a posé que le sujet ne comportait aucune notion préalable sur les coniques en général.

Mais combien peu naturelle ensuite a été, de sa part, l'idée de considérer les points dont le rapport des distances à un point F et à une droite D est une constante k , et de supposer celle-ci inférieure à 1 ! Pourquoi cette restriction ? L'avantage de la définition « par foyer et directrice » est de permettre l'étude simultanée des trois coniques.

Classe de Mathématiques. — *Calcul des angles d'un triangle dont on donne les trois côtés.*

La simplification du calcul logarithmique de $\operatorname{tg} \frac{A}{2}, \operatorname{tg} \frac{B}{2}, \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ par l'introduction de $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ ne semble pas être appréciée, ou même connue des étudiants actuels.

On peut estimer qu'il n'y a là qu'un artifice. Mais un professeur soucieux d'ouvrir l'intelligence de ses élèves doit voir plus loin que les ornières du calcul et profiter de cette occasion pour souligner la constance d'une idée générale ; les méthodes purement mécaniques du calcul conduisent à des résultats dont l'explication géométrique est fréquemment prévisible ; ce qui est simple (par exemple la formule

$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$) doit avoir une raison simple.

La tradition, sur un tel point, excuse l'oubli que nous signalons ici. Et, cependant, si des élèves étaient les auteurs de tels procédés aveugles, qui ne les critiquerait à juste titre, précisément parce qu'ils ne sont que des élèves !

Classe de Mathématiques. — *Rabattement d'une figure plane. Application aux angles et aux distances.*

Le candidat a exposé avec soin les tracés pour construire le rabattement d'un point, a omis partout de considérer l'opération inverse : « relèvement » d'un point rabattu.

On peut ramener les questions d'angle de deux éléments, dont l'un au moins est un plan aux questions relatives à l'angle de deux droites, par usage de la normale au plan. Mais cette remarque ne fait pas connaître la construction du rectiligne d'un dièdre, qu'il est trop facile d'escamoter par ce procédé.

Classe de Première. — *Variation du trinôme du second degré : représentation graphique.*

Signalons la défaveur actuelle du procédé, passé de mode, qui consistait à étudier successivement x^2 , ax^2 , puis $ax^2 + bx + c$.

L'habitude de procédés généraux finit par masquer les procédés les plus naturels. Sans doute donne-t-elle un procédé de présentation commode pour une leçon d'oral dans un concours.

Mais, dans l'enseignement réel, le professeur aura à se demander si l'étude de $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ semble aussi aisée aux élèves pour $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pour $f(x) = x^2$. L'ancien procédé avait son avantage pour la représentation graphique du trinôme du second degré.

Classe de Mathématiques. — *Axe radical de deux cercles. Différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles. Applications.*

La candidate s'est engagée maladroitement dans une étude de la variation de $\overline{IH}$ [I milieu de la distance des centres OO' , H pied sur la droite OO' de l'axe radical des deux cercles (O, R) , (O', R')], d'après la formule $R^2 - R'^2 = 2\overline{OO'} \cdot \overline{IH}$.

En supposant l'un des cercles fixes, le rayon de l'autre constant, et OO' variable, cette variation ne permettait pas de voir comment varie l'axe radical, puisque le milieu I est lui-même variable.

Classe de Mathématiques. — *Trièdre, inégalités entre les faces. Trièdre orienté : sens.*

La seconde partie de la leçon fut fort insuffisante. Faut-il rappeler ici qu'un trièdre est orienté lorsqu'on énumère ses arêtes dans un certain ordre ?

Il est éducatif de compléter ici l'acquisition de base de tout enfant qui sait distinguer sa droite de sa gauche et d'évoquer des observateurs, sans omettre celui qui est couché sur une demi-droite intérieure au trièdre ; c'est le conciliateur des trois autres, couchés sur les arêtes elles-mêmes du trièdre.

Sans doute des vues axiomatiques schématisent-elles les résultats, sans rien devoir à l'intuition ; mais de telles considérations ne sont-elles pas à rapprocher des notions du même genre que l'enseignement de la cosmographie et de l'électrodynamique vulgarisent sans prétention ?

Classe de Mathématiques. — *Sections paraboliques d'un cône de révolution.*

Le candidat s'est montré inapte à analyser les figures de l'espace ; il a commis une grosse erreur pour placer une parabole donnée sur le cône, en effectuant une translation parallèlement à l'axe du cône ; elle aurait dû être faite parallèlement à la génératrice du sommet (après avoir placé provisoirement la parabole dans un plan parallèle à un plan tangent du cône, son sommet sur le cône et l'axe de la parabole parallèle à la génératrice de contact).

DEUXIÈME PARTIE

Les Mathématiques et la réalité extérieure

I. INTRODUCTION. — Le sujet suivant a été proposé en octobre 1949 comme épreuve de philosophie aux candidats de la section de Sciences Expérimentales au Baccalauréat :

« D'où vient que les mathématiques, qui reposent sur de pures conceptions de l'esprit, ont pourtant une application pratique ? »

Ce sujet pose un problème d'une importance capitale, aussi bien du point de vue de la philosophie que de l'enseignement des mathématiques. Il était manifestement au-dessus de la portée de la grande majorité des élèves ; peut-être aussi certains de leurs professeurs de philosophie n'ont-ils sur cette question que des lumières bien faibles. Cela me paraît tenir essentiellement à la façon, à mon avis inadéquate, dont les principes fondamentaux des mathématiques sont présentés le plus souvent dans l'enseignement. Ces modes d'exposition tendent en effet à laisser croire que les mathématiques ont un caractère arbitraire, sans rapport avec la réalité extérieure, résultant du jeu de l'activité intellectuelle pure et libre. Or il est impossible de contester que les mathématiques trouvent d'innombrables applications, aussi bien dans la réalité pratique courante que dans les sciences et les techniques les plus variées : mécanique, astronomie, physique, chimie, techniques de l'ingénieur, mathématiques financières et actuariales, méthodes statistiques en biologie, sociologie, psychologie, etc... Si donc on devait prendre à la lettre l'affirmation que les mathématiques reposent sur de pures conceptions de l'esprit, il y aurait là un mystère totalement incompréhensible et le fait que les mathématiques puissent servir à tant de choses constituerait un perpétuel miracle. Nous nous proposons de montrer que la contradiction affirmée par le texte de la composition résulte dans une large mesure d'une méconnaissance de la nature et de la genèse des mathématiques.

II. LES NOMBRES. — Les mathématiques ont essentiellement pour objet l'étude de deux sortes d'êtres de pensée : les êtres numériques et les êtres géométriques. Ces entités ne sont pas créées de rien et gratuitement par l'esprit de l'homme, elles sont suggérées par l'expérience physique. Nous allons le montrer en examinant d'abord les êtres numériques, puis les êtres géométriques.

Les être numériques comprennent les diverses sortes de nombres, puis d'autres êtres résultant des combinaisons des premiers (expressions algébriques, fonctions, équations, intégrales, etc...). Nous nous contenterons ici d'examiner les notions fondamentales concernant les nombres.

Nombres arithmétiques ou absolus. — L'idée originelle du nombre arithmétique est celle du numéro d'ordre qui se trouve fourni immédiatement par la succession indéfinie de points sur une ligne ou de signaux sonores dans le temps. L'humanité au cours de son évolution a eu quelque peine à passer de la notion ordinale à celle du nombre cardinal qui correspond à la quantité des objets d'une collection. C'est là une constatation psychologique qui s'impose à tous ceux qui s'occupent de l'initiation enfantine aux premiers éléments du calcul. Comment se fait ce passage ? Considérons une collection d'objets qu'il s'agit de dénombrer. A cet effet on numérote les objets de cette collection en les prenant dans un ordre quelconque et l'on constate expérimentalement que le rang du dernier des objets ainsi numérotés reste le même quel que soit l'ordre dans lequel on a choisi les objets. C'est cette *invariance* du rang qui fournit la notion du nombre cardinal d'une collection. Cette notion, une fois acquise, apparaît une nouvelle idée : celle de la possibilité de continuer indéfiniment à édifier la suite naturelle des nombres cardinaux. Cette idée se précise par le principe d'induction complète dans lequel Henri Poincaré voyait un des instruments essentiels du raisonnement mathématique. Ces notions, une fois élaborées, on peut évidemment prétendre qu'elles constituent des éléments de notre pensée, antérieurs à toute expérience, mais il m'a paru indispensable de rappeler les expériences qui sont à la base de cette élaboration.

Un nouveau stade de la genèse des nombres est celle des fractions. Là encore, l'histoire du calcul montre que cette notion ne s'est dégagée que très lentement en commençant par des fractions particulièrement simples, telles que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc... Il a fallu beaucoup de millénaires pour arriver à la notion générale de fraction et ce n'est

qu'il y a moins de deux siècles qu'on est parvenu à appréhender complètement cette notion en dépouillant la fraction de tout caractère de « choses » (ou fraction de grandeur) et en la regardant comme l'indicateur d'une opération (1) (opérateur) que l'on doit faire subir à une grandeur. Le nombre entier et la fraction apparaissent ainsi comme des outils de la pensée complétant les outils matériels que l'homme a inventés successivement au cours de son évolution.

Une nouvelle étape a été constituée par la création des nombres irrationnels, mais il ne s'agit plus là d'une conquête d'origine expérimentale, ou plutôt il ne s'agit plus d'expériences faites dans le monde des êtres physiques, mais dans le monde des êtres mathématiques déjà créés. Le problème de la racine carrée ou du rapport de la diagonale au côté du carré a conduit à l'invention de $\sqrt{2}$. Plus généralement la nécessité qui s'impose à l'esprit d'énoncer des résultats généraux et toujours valables, l'a obligé à définir l'ensemble des irrationnels arithmétiques ; là encore, ce n'est que très tardivement que la notion générale en a été pleinement élaborée dans le courant du XIX^e siècle en aboutissant à la notion de coupure, c'est-à-dire d'un mode de répartition des nombres rationnels en deux classes. Cette notion des nombres irrationnels ne peut d'ailleurs aucunement se rencontrer dans le monde physique, car les mesures physiques ne sont susceptibles par nature que d'une approximation limitée, ce qui exclut dans ce domaine toutes les considérations développées à propos des irrationnels.

Nombres algébriques ou relatifs. — Les mathématiciens grecs n'ont pas dépassé le stade des nombres arithmétiques. Ce n'est qu'au cours du Moyen Age et au début des Temps Modernes qu'ont été élaborées peu à peu de nouvelles espèces de nombres ; encore du temps de Descartes, les nombres négatifs étaient qualifiés de « fausses racines ». Là encore, les notions nouvelles auxquelles on a été conduit, n'ont acquis un sens parfaitement clair que par la notion d'opérateur, appliquée à des grandeurs susceptibles de deux sens différents, tels que parcours horizontaux ou verticaux, recettes et dépenses, etc... La règle des signes de l'addition algébrique exprime évidemment les lois de composition, de montée et de descente successives, ou de recettes et de dépenses. De ce point de vue, il ne serait pas nécessaire d'utiliser les signes indiquant l'addition ou la soustraction arithmétique. Mais l'observation des lois de combinaison de ces derniers signes dans des suites d'additions et de soustractions, a conduit à les considérer à la fois comme des signes d'opération et comme signes distinctifs des deux espèces de nombres relatifs.

La multiplication des nouveaux nombres ainsi créés, se définit par un procédé analogue à celui qui conduit à la multiplication des fractions. Dans les deux cas, il s'agit de remplacer deux multiplicateurs, agissant, successivement, par un multiplicateur unique produisant le même effet. Dans le cas des nombres relatifs, il suffit de distinguer le rôle du multiplicateur positif et du multiplicateur négatif, celui-ci changeant le sens de l'élément orienté auquel il s'applique. On est ainsi conduit à la règle des signes de la multiplication algébrique et le résultat coïncide avec ceux déduits de la considération des produits de sommes et de différences arithmétiques. Malheureusement, dans la pratique courante de l'enseignement, on se borne le plus souvent à dire aux élèves que les nombres sont des « symboles » dont les lois de composition satisfont par définition à des règles données *a priori* comme si elles étaient tombées du ciel et sans qu'on dise d'ailleurs ce que symbolisent ces symboles. On comprend, dans ces conditions, que beaucoup de gens se fassent des mathématiques une idée fallacieuse.

Nombres complexes. — Bornons-nous à indiquer que la création au XVI^e siècle des nombres complexes que l'on s'obstine trop souvent encore à qualifier d'imaginaires et même de quantités imaginaires, relève de considérations analogues aux

(1) Le mot « opération » a ici un sens concret ou matériel et non numérique.

précédentes. On doit toutefois reconnaître ici que l'expérience qui a conduit à leur invention fut, à l'origine, tout à fait étrangère à la considération d'opérations sur des grandeurs : il s'agissait uniquement de constatations en apparence mystérieuses dans lesquelles l'introduction du symbole $\sqrt{-1}$, qui paraissait dénué de toute signification, conduisait à des conséquences parfaitement valables pour les nombres déjà connus. C'est pourquoi leurs inventeurs les appelaient des quantités sophistiquées, idée qui se trouve conservée dans une certaine mesure par le qualificatif « imaginaire ».

Si on désigne par i l'indicateur d'une rotation d'un angle droit dans le plan, l'égalité $i^2 = -1$ signifie tout simplement que deux rotations successives d'un angle droit dans le même sens produisent le même effet qu'une rotation de π , c'est-à-dire qu'une multiplication par -1 . Dans ces conditions, l'égalité $i = \sqrt{-1}$ cesse de revêtir un aspect absurde ou contradictoire. Ce n'est pas en effet dans l'ensemble des nombres relatifs que cette égalité est posée, mais dans l'ensemble des nombres nouveaux qui viennent d'être définis. On comprend alors immédiatement comment ces symboles prétendus imaginaires peuvent intervenir dans des questions concrètes telles que l'étude des courants alternatifs : un mouvement périodique sinusoïdal résultant de la projection d'un mouvement circulaire uniforme, on est conduit tout naturellement à l'introduction d'indicateurs de rotation.

Propriétés des opérations sur les nombres. — Les propriétés commutatives et associatives de l'addition des nombres entiers ne font qu'exprimer les propriétés des collections d'objets. Ces propriétés, ainsi que celles de la multiplication, peuvent s'étendre par raisonnement logique aux autres nombres arithmétiques, algébriques et complexes. On peut aussi regarder ces propriétés comme traduisant les propriétés géométriques des segments rectilignes et des vecteurs. On voit ainsi apparaître une corrélation très étroite entre le domaine numérique et le domaine géométrique que nous allons maintenant examiner.

III. LES ÊTRES GÉOMÉTRIQUES. — Les êtres géométriques fondamentaux sont les points, les lignes, les surfaces, les portions d'espace ou volumes. À partir de ces êtres, les géomètres en considèrent ensuite d'autres plus abstraits, tels que vecteurs, ensembles ponctuels, transformations, groupes, etc..., dont nous ne nous occupons pas.

Points, lignes, surfaces et volumes ont leur origine dans le monde matériel, mais les concepts des mathématiciens résultent d'une abstraction faite à partir des objets naturels. Cette abstraction consiste essentiellement à réduire à zéro les dimensions suffisamment faibles, telles que l'épaisseur d'une feuille, ou d'un fil, ou d'un grain de poussière. En outre, l'expérience ne nous offre que des objets finis ou limités, alors que notre esprit conçoit la ligne droite ou le plan comme infinis. Nous reviendrons plus loin sur cette question de l'infini mathématique, qui a déjà été rencontrée à propos de la suite naturelle des entiers. Les êtres mathématiques dont nous venons de parler sont doués de propriétés qui les distinguent les uns des autres et à partir desquelles le raisonnement permet d'en déduire d'autres. Ainsi la ligne droite est déterminée par deux points, elle partage le plan en deux régions, etc... L'ensemble de ces propriétés constitue les axiomes de la géométrie. Leur énumération complète nous entraînerait beaucoup trop loin. Nous reviendrons plus loin sur cette question de l'axiomatique.

L'origine de ces axiomes et postulats est certainement d'ordre expérimental : ainsi les propriétés de la ligne droite résultent des propriétés d'un fil tendu, d'un rayon lumineux, d'un axe de rotation ou de glissement. Mais, bien entendu, comme les êtres mathématiques n'existent pas dans la nature, mais seulement dans notre esprit, leurs propriétés ne sont vérifiables dans la pratique qu'avec une certaine approximation et dans certaines limites. Ainsi, quand nous disons : « Par deux points il passe une ligne droite et une seule », cet énoncé dépasse infiniment l'expérience,

d'une part, parce que nous ne pouvons pas réaliser physiquement de véritables lignes droites, d'autre part, parce que toute vérification est impossible pour deux points très éloignés. Les axiomes sont donc *suggérés* par l'expérience.

On s'est imaginé, pendant de longs siècles, que ces axiomes constituaient des « vérités éternelles » issues de l'esprit de Dieu, ce Dieu qui géométrise toujours, comme le pensaient les géomètres et les philosophes grecs. C'est ainsi que l'axiome ou postulat d'Euclide relatif aux droites parallèles était regardé comme une vérité indiscutable. Au début du XIX^e siècle, Gauss, qui avait pressenti son véritable caractère, n'osa pas publier ses idées sur ce sujet par peur de provoquer un scandale. Ce ne fut qu'un peu plus tard que plusieurs géomètres édifièrent des géométries non euclidiennes qui niaient l'axiome des parallèles en développant les conséquences de cette négation, où, à aucun moment, aucune contradiction n'apparaissait. La question fut complètement élucidée à la fin du XIX^e siècle et on se convainquit clairement que le postulat d'Euclide était logiquement indépendant des autres axiomes de la ligne droite : sans cet axiome le concept de ligne droite n'est pas entièrement déterminé. En définitive, le rôle des axiomes est maintenant apparu en pleine lumière : bien qu'ils soient d'origine expérimentale, ils ne constituent, ni des vérités physiques, ni des vérités abstraites, mais la *définition* même des êtres auxquels ils s'appliquent.

Toutefois, si l'on se réfère à l'origine expérimentale de ces propriétés et aux possibilités de faire à leur sujet des vérifications relativement précises, on peut envisager la géométrie, non pas comme une science abstraite, mais comme une sorte de théorie physique de l'espace. Le point d'aboutissement actuel de cette façon de voir est la Théorie de la Relativité générale d'Einstein.

Un ensemble fondamental d'axiomes d'origine expérimentale concerne les propriétés du mouvement des figures invariables — on a été amené à poser le postulat de l'existence de figures dites invariables pouvant se déplacer dans l'espace vide. Ce sont ces postulats que l'on admet implicitement au début de la géométrie quand on établit, par exemple, les cas d'égalité des triangles et les propriétés du triangle isocèle. A ce propos, certains mathématiciens ont prétendu que les démonstrations géométriques étaient de véritables expériences que l'on imaginerait sans les effectuer réellement. Cette façon de voir peut convenir à une première initiation géométrique, mais elle doit être ensuite abandonnée : une fois les postulats du mouvement énoncés (avec référence à l'expérience physique), les démonstrations perdent leur caractère expérimental et sont justiciables de la seule logique déductive.

On peut en dire autant des « expériences graphiques » qui peuvent suggérer aux élèves les axiomes de géométrie de situation, et permettre de prévoir certaines propriétés élémentaires. Mais, dès que les figures se compliquent, la vérification devient de plus en plus précaire ; ainsi la figure formée par les six bissectrices d'un triangle, trois à trois concourantes aux centres des quatre cercles, tangents aux trois côtés. Le tracé de ces quatre cercles eux-mêmes et celui du cercle d'Euler, qui doit être tangent aux quatre précédents, alors qu'il passe déjà par neuf points remarquables, soulève des difficultés très sérieuses d'exécution, et c'est même une excellente occasion de montrer la nécessité du raisonnement déductif. Il n'y a donc pas lieu, à mon avis, d'insister comme on le fait souvent sur les connaissances empiriques que possédaient en géométrie les Egyptiens, les Chaldéens et les Hindous, et sur la signification même du mot géométrie. Il ne s'agit pas du tout d'une science expérimentale, mais d'une science déductive née du « miracle grec », qui introduisit entre les faits géométriques une cohérence et un enchaînement logiques.

IV. L'INFINI ET LA CONTINUITÉ. — Nous avons à deux reprises mentionné l'introduction de la notion d'infini. Expérimentalement, il s'agit uniquement de la possibilité de continuer indéfiniment la même opération telle que la répétition d'un signal ou le prolongement d'une ligne droite ou d'une surface plane. La réalité ne nous offre, bien entendu, dans ce domaine, que des possibilités limitées et c'est notre esprit qui se trouve amené à concevoir une continuation indéfinie.

« L'axiome d'Archimède », qui affirme qu'on peut trouver un multiple d'un segment S , qui soit supérieur à tout autre segment S' , est évidemment suggéré par les considérations précédentes, mais on s'est rendu compte que toute vérification expérimentale résultait d'une illusion comme le montre l'exemple célèbre d'Henri Poincaré relatif à des êtres intérieurs à une sphère de rayon fini, mais où la température absolue tend vers 0 au voisinage de la surface limite : les pas qu'ils font en se rapprochant de cette surface diminuant sans cesse, tout se passe pour eux comme s'ils étaient dans un monde infini.

Les développements de la Théorie de la Relativité ont de même conduit à l'idée d'un univers courbe et fini, mais sans frontière dans lequel la lumière décrirait des trajectoires fermées, conception qui s'oppose à notre habitude intuitive d'un espace infini, et pour laquelle nous manquons tout à fait de représentations concrètes.

La notion de continuité est aussi d'origine expérimentale, mais l'expérience ne nous la fournit que par suite d'un manque de finesse de nos perceptions. En réalité nous savons maintenant que toute matière est discontinue et l'hypothèse des quanta étend cette discontinuité à l'énergie elle-même. Par suite, le monde physique est essentiellement discontinu, et cependant notre structure psychologique conduit notre esprit à poser la continuité des êtres géométriques comme une propriété essentielle, constituant « l'axiome de continuité ». Là encore, il y a suggestion de l'expérience, mais non pas vérification expérimentale.

Il est à remarquer d'ailleurs que contraints ainsi à introduire la continuité dans leurs concepts, les mathématiciens ont été amenés, ainsi que nous l'avons déjà signalé à propos des nombres irrationnels, à créer le continu mathématique qui ne réalise que très imparfaitement l'image de la continuité physique, car sur un segment de droite les points d'abscisses rationnelles et irrationnelles apparaissent nécessairement comme des individualités distinctes les unes des autres.

V. LE MONDE DES ÊTRES MATHÉMATIQUES. — Les êtres mathématiques, une fois définis par l'ensemble des axiomes, apparaissent souvent aux mathématiciens comme un univers existant par lui-même en dehors de l'homme et où le mathématicien, tel un explorateur, découvre sans cesse des vérités nouvelles. Telle était notamment l'attitude du mathématicien français Charles Hermite, qui était pénétré d'une sorte de mysticisme religieux devant le monde mathématique. Il y a certainement là beaucoup d'illusions, et les combinaisons des êtres mathématiques entre eux et les êtres nouveaux, dont les mathématiciens se proposent l'étude, sont en réalité des inventions bien plus que des découvertes. L'harmonie incontestable qui se révèle dans ce domaine n'est pas une harmonie préétablie ; en réalité, elle résulte du fait que les combinaisons, qui se sont révélées infécondes, ou les vues intuitives qui se sont révélées inexactes, ont été abandonnées au cours de l'évolution plusieurs fois millénaire de la pensée mathématique ; par suite, ce qui a subsisté, fournit naturellement cette impression d'harmonieuse unité.

Il y a en effet des rapports très étroits entre les diverses parties des mathématiques, même si elles paraissent très éloignées les unes des autres. Notamment, les propriétés des êtres numériques et celles des êtres géométriques sont étroitement liées et apparaissent souvent comme des aspects différents d'une réalité unique. Il n'y a là, en vérité, rien de mystérieux, puisque c'est l'esprit de l'homme qui a inventé et combiné ces divers êtres en passant alternativement d'un point de vue à l'autre. Un exemple remarquable de ces liaisons étroites est fourni par H. Poincaré dans sa conférence sur « l'invention mathématique », où il signale comment lui est apparue brusquement, à la suite d'un travail inconscient, l'analogie profonde entre la géométrie non euclidienne et les fonctions appelées « thétafuchsiennes ».

Ce n'est pas seulement entre les nombres et les figures géométriques qu'apparaissent des liens étroits, mais aussi entre la Physique et les Mathématiques. Tantôt c'est la physique qui précède l'invention mathématique, en posant aux mathémati-

ciens des problèmes dont la solution conduit à de nouvelles inventions : telle fut, par exemple, la théorie des séries trigonométriques, provoquée par l'étude des phénomènes vibratoires. Inversement, certaines théories mathématiques, en apparence purement abstraites et sans application au monde extérieur, trouvent à certains moments leurs applications : ainsi les sections coniques, étudiées par les géomètres grecs de l'antiquité, furent utilisées par Képler dans son étude du mouvement de la planète Mars. De même, Einstein, pour développer sa théorie de la Relativité générale, fut amené à utiliser le calcul différentiel absolu et la théorie des tenseurs inventés antérieurement à toute application.

Dans le domaine de la Physique mathématique, qui, à certains égards, peut être rattachée aux mathématiques pures, il peut arriver souvent que la théorie ait précédé toute expérience. En voici trois exemples particulièrement célèbres : la théorie de Maxwell le conduisit à prévoir l'existence d'ondes électromagnétiques qui furent ensuite réalisées physiquement par Hertz ; la théorie de la Relativité restreinte conduisit Einstein à prévoir la variation de la masse avec la vitesse et l'équivalence de la masse et de l'énergie, ce qui fut ensuite vérifié expérimentalement, et, exemple particulièrement saisissant, la théorie de la Mécanique ondulatoire, créée tout d'abord par Louis de Broglie, comme une simple spéculation mathématique, conduisit à prévoir la diffraction des électrons, qui fut ensuite vérifiée par des physiciens américains et amena l'invention du microscope électronique. Ainsi apparaît constamment un accord étroit entre les spéculations abstraites de l'esprit humain et les résultats physiques.

VI. LES AXIOMES ET L'AXIOMATIQUE. — Nous avons déjà signalé que la véritable définition des êtres mathématiques résidait dans les axiomes dont nous avons indiqué l'origine expérimentale. Il est naturel que dans un souci de clarté et de rigueur logique, toute trace de cette origine soit effacée et que les mathématiciens cherchent à construire un édifice totalement abstrait basé sur l'ensemble des axiomes. Cela nécessite d'abord l'étude de l'ensemble de ces axiomes, de leur indépendance ou de leur dépendance logique ; cette œuvre, qui fut entreprise d'abord par Hilbert, est ce qu'on appelle l'axiomatique.

Dans cette perspective, les mathématiques apparaissent comme un jeu parfaitement logique et parfaitement arbitraire où, suivant la boutade de Bertrand Russel, « on ne sait jamais de quoi l'on parle, ni si ce qu'on dit est vrai ». Mais ce n'est là qu'une apparence dont il convient de ne pas être dupe ; sans les bases expérimentales sous-jacentes, il n'y aurait effectivement là qu'un jeu sans signification et qui ne conduirait d'ailleurs à aucune découverte nouvelle ; cette reconstruction après coup n'est qu'une réflexion rétrospective sur ce qui est déjà inventé et connu.

Il me paraît donc tout à fait regrettable et dangereux que des professeurs, mus par des préoccupations fort louables, mais maladroites, songent à introduire, dès l'Enseignement Secondaire, des exposés axiomatiques. En procédant ainsi, ils risquent de faire complètement méconnaître aux élèves la véritable nature des mathématiques, à les couper de toute leur évolution historique, à laisser ignorer le rôle des mathématiciens créateurs. Conséquence plus grave encore, ils risquent d'amener les élèves à se figurer naïvement que par un jeu purement verbal, on puisse aboutir à des résultats utilisables, en rapport avec la réalité. C'est ainsi que, en toute bonne foi, certains philosophes ont pu croire que les mathématiques reposaient sur « de pures conceptions de l'esprit ».

VII. ÉLÉMENTS PRÉEXISTANTS A L'EXPÉRIENCE. — Dans ce qui précède, nous nous sommes efforcés de montrer que, dans une très large mesure, les mathématiques procédaient d'une donnée expérimentale préalable. Toutefois nous avons mis en garde contre des vues trop simplistes qui feraient des mathématiques une simple science expérimentale. Nous voudrions signaler pour terminer qu'il paraît exister certains domaines où on aperçoit difficilement une origine expérimentale antérieure

au développement mathématique. Nous avons d'ailleurs mentionné déjà plus haut certains exemples de ces faits, tels que les théories de Maxwell, d'Einstein, de de Broglie. Un autre exemple, très digne d'être médité est celui du calcul des probabilités : il semble bien que le concept de probabilité ait été créé par Pascal par une voie purement logique, abstraction faite de toute expérience, et cependant on est bien obligé de constater que la réalité extérieure s'accorde étroitement avec les déductions *a priori* du calcul des probabilités. Ainsi, la fréquence de la répétition d'un phénomène est de plus en plus voisine de la probabilité calculée *a priori* quand le nombre des épreuves devient très grand. On a souvent fait remarquer que les bénéfices faits par les compagnies d'assurances sur la vie, constituent une preuve particulièrement tangible de la validité des raisonnements et des calculs des actuaires. De même, la loi des écarts représentée par la « courbe en cloche » de Gauss se vérifie avec une très grande précision dans des cas extrêmement nombreux ; il est vrai que dans cet exemple, on ne sait trop si cette loi des erreurs résulte de l'expérience ou du raisonnement.

Bien des mathématiciens ont signalé entre la réalité physique et le monde mathématique un « accord mystérieux » suivant l'expression qu'emploie M. Emile Borel dans la préface de son livre sur « les paradoxes de l'Infini ».

Mais, même sans chercher d'autres exemples, une remarque essentielle s'impose à la réflexion. Toute la valeur de l'édifice mathématique repose sur la logique déductive. Cette logique s'impose à notre esprit avec une certitude qui paraît présenter un caractère absolu ; la distinction entre un raisonnement juste et un raisonnement faux est tout à fait indépendante des résultats auxquels ils conduisent, car il est bien connu qu'un raisonnement faux peut conduire à un résultat exact.

Les mathématiciens contemporains ont été amenés à introduire des notions tout à fait générales, celles de transformations, de groupes, d'ensembles, de corps, etc... où la nature des éléments sur lesquels on raisonne n'est pas précisée, mais seulement « les lois de composition » auxquelles ces éléments sont obligés d'obéir. On se trouve transporté ainsi dans un domaine assez surprenant où un raisonnement purement abstrait conduit à des conclusions qui peuvent ensuite être vérifiées dans de nombreux domaines particuliers, par exemple, les propriétés des groupes de substitution et celles de certains groupes de transformations géométriques sont logiquement équivalentes. Ainsi les propriétés des substitutions de quatre lettres ne se distinguent pas logiquement des propriétés des rotations et des symétries qui transforment en lui-même un tétraèdre régulier.

On ne peut donc soutenir que, dans ces domaines, les mathématiques soient une science expérimentale. Quelle est la nature véritable des conclusions auxquelles de telles spéculations aboutissent ? Il semble bien que ce que l'on atteint ainsi ce sont les lois mêmes de notre structure mentale.

Ainsi la question posée par le texte qui nous a servi de point de départ n'est pas entièrement résolue par les considérations qui précèdent et une explication reste à élaborer. Ce n'est plus au mathématicien d'y répondre, mais au philosophe.

Dans quelles directions est-il possible de chercher une explication ? Pour ma part, j'en aperçois deux que je me bornerai à indiquer sommairement.

Si on se place dans l'hypothèse évolutionniste, d'après laquelle l'homme actuel est le produit d'une évolution animale qui s'est poursuivie sur la terre depuis des centaines de millions d'années, notre logique, comme toutes nos facultés intellectuelles et affectives est un produit de cette évolution ayant enregistré les enseignements fournis par le contact avec le milieu extérieur. L'accord constaté entre logique, mathématique et physique, paraît alors perdre son caractère mystérieux. Mais d'autres difficultés beaucoup plus graves, sans doute, apparaissent, car la conception d'une évolution due uniquement au jeu aveugle des lois du hasard et qui cependant manifeste incontestablement un progrès orienté est difficilement pensable.

Reste la conception d'un Dieu créateur et ordonnateur de l'univers. Dans cette hypothèse « l'accord mystérieux » trouve tout naturellement son explication. Mais il n'est pas besoin de faire remarquer qu'un mystère de détail se trouve alors expliqué par un mystère beaucoup plus vaste et que, pour beaucoup d'esprits, la difficulté n'a fait que reculer.

M. WEBER,

professeur honoraire au Lycée Condorcet.

La divisibilité par 6

En classe de Cinquième figure au programme la divisibilité par 2 et par 3. Peut-on, à ce niveau, en ignorant la décomposition en facteurs premiers, parler de la divisibilité par 6 ?

Faisons dresser à l'élève le tableau des restes :

$n \dots$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12...
$r_2 \dots$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0...
$r_3 \dots$	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0...
$r_6 \dots$	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0...

Il constatera, puis démontrera, que de 6 en 6 seulement $r_2 = r_3 = 0$, d'où il déduira que « la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit divisible par 6 est qu'il soit divisible par 2 et par 3 ».

Naturellement il importe de mettre en garde contre une fausse généralisation ; pour cela, il suffira de faire examiner quelques exemples : 12 est divisible par 2 et par 4 sans l'être par $2 \cdot 4 = 8$, etc...

En classe de Mathématiques on peut partir du même tableau pour faire découvrir les résultats suivants :

Si a et b sont premiers entre eux,

1) ab , nombres consécutifs quelconques, présentent toute association de restes r_a, r_b pris parmi 0, 1, 2, 3, ..., $a-1$ et 0, 1, 2, 3, ..., $b-1$, une fois et une seule ;

2) les restes r_a, r_b sont caractéristiques du reste r_{ab} (c'est-à-dire à une association r_a, r_b correspond un reste r_{ab} bien déterminé et réciproquement) ;

3) la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre ait les restes r_a, r_b est qu'il soit de la forme $r_{ab} + Kab$, où r_{ab} est le reste par ab associé à r_a, r_b et K un entier arbitraire. En particulier pour qu'un nombre soit divisible par ab , il faut et il suffit qu'il soit divisible par a et par b .

E. EHRHART,

Lycée Kléber, Strasbourg.

Réflexions au sujet du Baccalauréat de « Sciences-Expérimentales »

Créé en 1942, sous le nom de « Philosophie-Sciences », ce baccalauréat, appelé par la suite « Sciences Expérimentales », a changé de nom sans qu'il y ait eu pour autant un changement substantiel de programme. Son essence même ne paraît pas bien définie : bien qu'en changeant le titre on ait voulu, semble-t-il, mettre l'accent sur les sciences, il continue paradoxalement à être décerné par la Faculté des Lettres. Il faudrait s'entendre : oui ou non, est-ce un baccalauréat scientifique ?

... Pourtant ce baccalauréat possède une originalité propre, il répond à des buts précis dans la vie moderne, et à un besoin réel.

La population scolaire de la classe de Sciences Expérimentales se destine en fait, dans l'état actuel des choses, non aux carrières littéraires, mais surtout à la médecine et aux carrières annexes (dentiste, vétérinaire, pharmacien, infirmière, laboratoires biologiques, etc...) et y reçoit, en gros, la formation scientifique adéquate pour les métiers en question. Mais, par contre, il y a toute une catégorie d'élèves qui n'y trouvent pas une préparation suffisante et qui, faute de mieux, entrent en « Math-Elém » et y perdent peut-être un temps qu'ils pourraient mieux utiliser. Je pense à ceux qui se destinent à l'Institut Agronomique (auxquels les sciences naturelles sont plus utiles que la géométrie), à ceux qui veulent entrer dans un Institut de Chimie, et, plus encore, à ceux qui voudraient faire de la recherche scientifique en biologie. Tous ces élèves d'élite trouveraient plus normalement leur place dans une classe de Sciences Expérimentales dont le niveau des études aurait été rehaussé. J'ignore ce qu'il est souhaitable de changer aux programmes de sciences naturelles et de sciences physiques, cela regarde les Associations de spécialistes. Mais il me semble qu'en mathématiques il y a quelque chose à faire, et que cela mérite réflexion.

De plus, le moment semble venu de faire une réforme et de revaloriser cette section. De nouvelles sections existent depuis peu pour la 1^{re} partie du baccalauréat (séries A', C' et M'), et c'est l'occasion de repenser les programmes et la structure de la 2^e partie.

Actuellement, les trois séries de la 2^e partie du baccalauréat n'ont pas le même prestige, la série « Math-Elém » recueillant traditionnellement les meilleurs élèves. Dans mon esprit, il ne devrait pas y avoir de hiérarchie, mais une diversité d'orientation, « Philosophie-Lettres » menant aux lettres, « Mathématiques Élémentaires » aux sciences théoriques, et « Sciences Expérimentales » aux... sciences expérimentales !

Je crois qu'une amélioration est possible, *sans changement d'horaire*, et sans attendre une réforme complète de l'enseignement. C'est ce que je me propose de montrer dans ce qui suit.

**

Structure de l'examen.

1^o Le baccalauréat de « Sciences Expérimentales », considéré comme un baccalauréat scientifique, devrait, à mon avis, être décerné par la Faculté des Sciences.

2^o Les coefficients donnent, il me semble, trop d'importance à la philosophie qui compte autant, à l'écrit, que les sciences physiques et naturelles réunies. Il me paraîtrait raisonnable qu'elle ait, comme coefficients, 4 en « Philo-Lettres », 3 en « Sciences-Ex » et 2 en « Math-Elém ».

[Rappelons qu'actuellement les coefficients d'écrit sont les suivants :

Série Philo-Lettres : 4 en philosophie, 1 en physique, 1 en sciences naturelles.

Série Sciences-Ex : 4 en philosophie, 2 en physique, 2 en sciences naturelles.

Série Math-Elém : 2 en philosophie, 3 en physique, 3 en mathématiques].

3^o Ne serait-il pas possible d'annexer à l'épreuve de physique une épreuve pratique de mathématiques, comportant un calcul numérique (par exemple un calcul de dérivée ou de primitive, ou un exercice sur les logarithmes ou les exponentielles) ?

**

Programme.

Pour pouvoir réformer le programme dans le sens d'une revalorisation, c'est-à-dire augmenter sans surcharger, il faudrait d'abord améliorer le recrutement des élèves. Actuellement trop d'entre eux proviennent des classes de 1^{re} A ou B. Il faudrait que les élèves sachent qu'un tel passage, d'une section littéraire à une section scientifique représente un changement complet d'orientation qu'ils ne doivent faire qu'à leurs risques et périls. Normalement, les élèves de « Sciences Expérimentales » devraient sortir d'une Première C' ou M', ou encore (en ce qui concerne les mathématiques, cela revient au même) d'une Première C, M, T ou A'. Les élèves de Seconde et de Première B devraient être avisés que, s'ils pensent entrer en « Sciences-Ex », ils doivent, à tout le moins, suivre le cours facultatif de Mathématiques.

Si un tel recrutement était assuré, on aurait enfin une classe homogène au point de vue des connaissances mathématiques. Dès lors, une grande partie du programme, qui n'est que révision des programmes de Seconde et Première, pourrait être supprimée, puisque ces révisions avaient été conçues pour un « rattrapage » des élèves littéraires. Actuellement, il suffit de feuilleter un manuel quelconque pour s'apercevoir qu'elles occupent à peu près le tiers du volume. On y trouve en effet des révisions d'algèbre, toute la trigonométrie des classes de Seconde et de Première, et l'étude des mouvements rectilignes uniformes et uniformément variés. Naturellement il peut toujours être bon de faire des révisions, mais elles pourraient être très rapides si l'on était sûr que ces questions ont déjà été vues.

Le programme, une fois allégé, comme je viens de le montrer, il deviendrait possible de le compléter. Voici quelques adjonctions qui me paraissent souhaitables et que je propose à mes collègues de l'A.P.M. comme base de discussion :

- 1° Dérivation d'une fonction de fonction.
- 2° Dérivées de $\sqrt{x}$ et $\sqrt{u}$ (u , fonction dérivable positive).
- 3° Dérivées de e^x et e^u (u , fonction dérivable).
- 4° Etude de la fonction a^x (a positif).
(Cette étude découle de celle de e^x , elle en est le prolongement naturel, et fait déjà l'objet d'exercices dans des manuels et de questions à l'oral ; il faudrait donc au moins que la définition de cette fonction soit au programme).
- 5° Usage d'exposants fractionnaires.
- 6° Différentielles logarithmiques et application aux calculs d'erreurs.
- 7° Notations $\int f(x)dx$ et $\int_a^b f(x)dx$ pour désigner une primitive quelconque et l'aire algébrique entre $x = a$ et $x = b$.
Application : moment d'inertie d'un disque par rapport à son centre.
- 8° Notions élémentaires de Statistique : généralités, exemples, courbe de Gauss.
- 9° Définitions élémentaires des trois coniques (indispensables en cosmographie).
- 10° Définition d'une série convergente, avec des règles pratiques sans démonstration. Application à quelques développements limités, en particulier, à celui de $(1+x)^m$ quand m est un nombre fractionnaire en un entier négatif. (Ce dernier paragraphe est le plus contestable, car il est difficile à exposer).

*
**

Conclusion.

Tout ceci n'est évidemment qu'un ensemble de propositions, mais qui pourraient servir de point de départ à une étude approfondie que je souhaiterais voir l'A.P.M. entreprendre, dans l'intérêt de nos élèves et du prestige du baccalauréat.

Mlle AÏTOFF (Montgeron).

Sur l'Orientation relative de deux Trièdres

Dans le *Bulletin* n° 160 de janvier 1954, M. MIRABEL a publié un article relatif à l'orientation des trièdres. Il caractérise la disposition mutuelle de deux trièdres T et T' par la parité du nombre n des symétries planaires [qu'il appelle transformation (II)] qui transforment T' en un trièdre T'' ayant en commun avec T le sommet, la première arête, le demi-plan limité à cette première arête et contenant les deuxièmes arêtes de T et T'' , les troisièmes arêtes de ces deux trièdres étant du même côté du plan précédent.

Cette définition présente un grand intérêt, car elle réduit les propriétés de l'orientation des trièdres (généralement présentées d'une façon intuitive, en faisant appel à la distinction de la droite et de la gauche d'un observateur) aux axiomes antérieurs de la géométrie euclidienne.

Les procédés de la géométrie analytique semblent conduire aux mêmes conclusions en utilisant le signe d'un déterminant (produit mixte de trois vecteurs portés par chacune des trois arêtes) ; toutefois, la méthode analytique fait appel à des considérations de continuité et notamment à la propriété d'une fonction continue de ne pouvoir changer de signe sans s'annuler, d'où résulte la conservation de l'orientation d'un trièdre par un déplacement. La méthode de M. MIRABEL semble pouvoir se passer de telles considérations.

Etant donnée l'importance du résultat ainsi obtenu, il paraît nécessaire de préciser certains points de son exposé et de réfuter certaines objections qui me sont venues à l'esprit en prenant connaissance de son article.

J'espère que M. MIRABEL voudra bien y répondre. Voici de quoi il s'agit :

Dans le passage du trièdre T' au trièdre T'' M. MIRABEL suit un certain ordre d'ailleurs tout naturel : il fait coïncider d'abord les deux sommets, puis les deux premières arêtes, puis les deux demi-plans contenant les premières et les deuxièmes arêtes. Mais, qui me dit qu'en suivant un autre ordre il utiliserait le même nombre de symétries ou tout au moins un nombre de même parité ?

Cela nous semble évident, car nous avons *a priori* l'intuition de l'orientation, mais il s'agit d'en faire abstraction pour aboutir à une définition purement logique. Or, c'est la parité du nombre de symétries à faire qui est la clef de la question.

Remarquons que, quand il s'agit de figures planes, cette parité n'est plus déterminée : lorsqu'on a fait coïncider un triangle $A'B'C'$ avec un triangle égal ABC par un certain nombre de symétries, on peut évidemment ajouter une symétrie de plus par rapport au plan commun des deux triangles superposés. Cette indétermination de la parité du nombre n n'existe plus pour les figures à trois dimensions, mais il s'agit d'établir ce fait en toute rigueur sans aucun appel à l'intuition, ou alors il faudrait l'énoncer comme un axiome supplémentaire et, dans ce cas, on pourra estimer qu'il serait préférable de conserver les modes d'exposés traditionnels.

**

Puisque l'occasion m'en est fournie par l'article de M. MIRABEL, je me permettrais de marquer ma répugnance pour l'expression « antidéplacement » qui fait inévitablement penser à une opposition, voire même à une hostilité envers les déplacements. Je préférerais, pour ma part, la terminologie suivante : les transformations qui conservent les longueurs étant appelées « isométries » se classeraient en isométries positives ou « déplacements » et isométries négatives ou « retournements » (les mots « positif » et « négatif » rappelant le signe du déterminant dont il a été parlé plus haut).

D'autre part, l'idée de définir les translations et les rotations par le produit de deux symétries planaires, est certainement ingénieux, mais je déplorerais, pour ma part, que l'on se refuse aussi totalement à reconnaître que les fondements de la

géométrie résident, de l'avis même des mathématiciens les plus éminents, tels Henri Poincaré et Emile Borel, dans les propriétés du mouvement d'une figure invariable.

M. MIRABEL me permettra-t-il de lui demander encore quelques éclaircissements sur le début de son exposé : j'aurais souhaité qu'il dise d'une façon plus explicite les propriétés qu'il supposait connues. Puisqu'il part de la notion de plan médiateur d'un segment, je suppose qu'il utilise les résultats relatifs aux droites et plans parallèles et aux droites et plans perpendiculaires, qu'il admet l'axiome de la division du plan en deux demi-plans par une droite, qu'il admet aussi les propriétés du triangle isocèle.

Dans ces conditions, je ne m'explique pas la nécessité de la démonstration qu'il donne de l'invariance d'une droite par la transformation (II) : l'égalité des deux segments joignant deux couples de points homologues se ramène à la considération d'un triangle isocèle d'où il résulte immédiatement que les supports des deux segments homologues sont également inclinés sur le plan de symétrie.

Mais peut-être M. MIRABEL n'accepte-t-il pas la superposition des deux moitiés d'un trapèze, ayant un axe de symétrie, par rabattement autour de cet axe. Les tendances axiomatiques des exposés actuels des faits les plus élémentaires paraissent décidément bien mystérieux au profane.

Encore une petite question : M. MIRABEL présente comme *conséquence* de la définition de la transformation (II) le fait qu'un plan partage l'espace en deux régions. Est-ce bien là une conséquence ou bien plutôt une inadvertance de rédaction ?

Car il me semble que l'axiome du partage de l'espace par un plan intervient dès le début de la géométrie de l'espace.

M. WEBER,

*professeur honoraire de Mathématiques Spéciales
au Lycée Condorcet.*

Nombres réels et mesure des grandeurs

(Conférence de M. Henri CARTAN, le 17 juin 1954)

La théorie des nombres réels est présentée habituellement dans la classe de Mathématiques Spéciales en utilisant les « coupures » de Dedekind. Ceci prend beaucoup de temps et laisse les élèves assez indifférents. A vrai dire, les coupures ne leur seront plus jamais d'aucune utilité : ce n'est pas d'elles que l'on se sert pour le calcul numérique, qui a besoin d'outils plus explicites, et quant aux développements ultérieurs de l'Analyse mathématique, ils utilisent surtout quelques propriétés essentielles de l'ensemble des nombres réels, et non une définition au moyen d'un procédé particulier comme celui des coupures. Dans un cours de Mathématiques Spéciales, il importe donc, à mon avis, de mettre en évidence les principales propriétés de l'ensemble des nombres réels ; c'est ce que je vais tenter de faire ici, et cela me donnera l'occasion d'utiliser devant vous la « méthode axiomatique ».

I. PROPRIÉTÉS DU GROUPE ADDITIF DES NOMBRES RÉELS.

Je suppose provisoirement que nous avons déjà une idée de ce que sont les nombres réels (positifs, négatifs ou zéro), et je fais un bilan d'une partie de nos connaissances supposées.

Dans l'ensemble R des nombres réels est définie une *addition* qui, à chaque couple (x, y) d'éléments de R , associe un élément de R noté $x + y$. Muni de cette addition, R est un *groupe abélien* ; ceci signifie que les conditions suivantes sont remplies :

$$(1) \quad x + y = y + x ;$$

- (2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
 (3) il existe un élément 0 tel que $x + 0 = x$ pour tout x ;
 (4) pour tout x il existe un x' tel que $x + x' = 0$ (un tel x' est unique ; on le note $-x$; d'où la possibilité et l'unicité de la soustraction).

Ce n'est pas tout : R est un *ensemble ordonné* (« totalement ordonné », comme dit Bourbaki). Cela signifie que, pour tout couple (x, y) , on a l'une des relations $x \leq y$ ou $y \leq x$, et que cette « relation d'ordre » jouit des deux propriétés que voici : si l'on a $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$; si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$. On définit la relation $x < y$, qui signifie $x \leq y$ et $x \neq y$.

Il est commode de se représenter les éléments de R comme les points d'une droite illimitée ; $x < y$ s'interprète alors au moyen de la notion intuitive : « x à gauche de y », et l'opération qui fait correspondre à tout x l'élément $x + a$ (a fixe) s'interprète comme une *translation*. Ceci est simplement un langage commode ; nous ne cherchons pas à définir la droite, nous nous servons simplement d'un langage intuitif pour traduire les propriétés axiomatiques que nous attribuons à notre groupe R .

R jouit de certaines propriétés supplémentaires que nous allons énumérer :

(A 1) $x \leq y$ entraîne $x + z \leq y + z$ (en langage géométrique : la relation d'ordre est invariante par translation). Il en résulte aussitôt que les relations $(x \leq y)$ et $(x + z \leq y + z)$ sont *équivalentes*. De là on déduit la possibilité d'ajouter les inégalités membre à membre ; le fait que $x \leq y$ équivaut à $y - x \geq 0$ (la connaissance des nombres positifs détermine la relation d'ordre). Si on note $\sup(x, y)$ le plus grand des deux nombres x et y , on pose $x^+ = \sup(x, 0)$, $x^- = \sup(-x, 0)$; alors $x^+ + x^- = \sup(x, -x)$ est noté $|x|$. Il est évident que

$$(x + y)^+ \leq x^+ + y^+, \quad (x + y)^- \leq x^- + y^-,$$

d'où, en ajoutant membre à membre : $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Étant donnés x et y tels que $x \leq y$, on appelle *intervalle fermé* (ou *segment*) d'origine x et d'extrémité y l'ensemble des z tels que $x \leq z \leq y$. L'élément $y - x$ s'appelle la *longueur* de l'intervalle. Si x, y, z sont trois éléments quelconques, ils définissent trois intervalles, dont les longueurs satisfont à l'inégalité

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

Tout ceci résulte de la condition (A 1). Le groupe R n'est pas le seul à satisfaire à cette condition (exemple : le groupe additif des nombres entiers). Un tel groupe s'appelle un *groupe abélien ordonné*.

Mais R satisfait encore à deux autres conditions :

(A 2) il existe des éléments > 0 , et si $x > 0$, il existe $y > 0$ tel que $y < x$. (Observer que le groupe des entiers ne satisfait pas à cette condition).

Avant d'énoncer (A 3), rappelons que, dans tout ensemble ordonné, on a la notion de *majorant* d'un sous-ensemble A : on appelle ainsi tout élément a tel que l'on ait $x \leq a$ pour tout x de A . On dit qu'un ensemble est *majoré* si l'ensemble de ses majorants n'est pas vide ; on appelle *borne supérieure* (exacte) d'un ensemble majoré le *plus petit* de ses majorants, s'il en existe un (qui est alors unique). Cela dit, (A 3) s'énonce comme suit :

(A 3) toute suite croissante (au sens large) et majorée, possède une borne supérieure.

Ceci est la propriété la plus profonde de l'ensemble R des nombres réels. L'ensemble des nombres rationnels satisfait bien à (A 2), mais pas à (A 3).

2. THÉORÈME D'EXISTENCE.

Il s'agit de montrer qu'il existe effectivement un groupe abélien ordonné satisfaisant à (A 1), (A 2) et (A 3). Pour cela, considérons l'ensemble des nombres décimaux illimités ; ou encore, ce qui sera plus commode, l'ensemble des nombres dyadiques illimités. Un tel nombre s'écrit avec un nombre entier n (≥ 0 ou ≤ 0) suivi

d'une virgule et d'une suite illimitée de chiffres 0 et 1, comprenant une infinité de zéros. Soit R l'ensemble de ces « nombres ». Il nous faut définir dans R une relation d'ordre et une addition, puis vérifier les axiomes.

La relation d'ordre sera l'ordre *lexicographique* : soient donnés deux nombres $x = n, s$ et $x' = n', s'$ (où s et s' désignent des suites illimitées de chiffres 0 et 1) ; si $n < n'$, on pose $x < x'$; si $n = n'$, on pose $x < x'$ si $s < s'$, et cette dernière relation se définit comme suit : s étant supposé différent de s' , on compare, pour chaque entier $p \geq 0$, les chiffres de rang p de s et de s' ; on prend le plus petit p pour lequel ils sont distincts, et on écrit $s < s'$ si le p -ième chiffre de s est 0, le p -ième chiffre de s' est 1.

On vérifie sans difficulté que cette relation d'ordre satisfait à (A 2) et (A 3). Il reste à définir l'addition des nombres dyadiques ; cette définition est classique s'ils sont « limités » (c'est-à-dire ne contiennent qu'un nombre fini de chiffres 1) ; dans le cas général, associés à chaque nombre dyadique x la suite croissante des nombres limités x_p que l'on obtient en remplaçant tous ses chiffres par des zéros à partir du rang p ; étant donnés deux nombres x et y , la suite des sommes $x_p + y_p$ est une suite croissante et majorée, dont la borne supérieure est, par définition, la somme $x + y$. La vérification des axiomes est un peu fastidieuse, mais ne présente aucune difficulté.

On pourrait procéder de même avec les nombres décimaux illimités. On obtiendrait encore un groupe abélien ordonné satisfaisant aux axiomes. Bien entendu, tout le monde pense que *c'est le même*, aux notations près. Mais si on veut exprimer ceci en langage précis, on est conduit à la notion d'*isomorphisme* : soient G et G' deux groupes abéliens, munis chacun d'une relation d'ordre ; on appelle isomorphisme de G sur G' une application biunivoque f de G sur G' , telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, et que $x \leq y$ entraîne $f(x) \leq f(y)$ (autrement dit, f respecte l'addition et respecte l'ordre). Cela dit, annonçons tout de suite le théorème fondamental de la théorie des nombres réels : notons R le groupe ordonné des nombres dyadiques, tel qu'il vient d'être défini ; alors :

Théorème d'isomorphisme : tout groupe abélien ordonné G satisfaisant à (A 1), (A 2) et (A 3) est isomorphe au groupe R . D'une façon précise, pour tout $a \in G$ tel que $a > 0$, il existe un isomorphisme f de G sur R tel que $f(a) = 1$; un tel isomorphisme est unique quand a est donné.

3. QUELQUES CONSÉQUENCES DES AXIOMES.

Avant de démontrer le théorème d'isomorphisme, il est bon de tirer quelques conséquences des axiomes (A 1), (A 2) et (A 3).

Tout d'abord, la *notion de limite* : une suite (x_n) a pour limite a si, pour tout $b > 0$, on a $|x_n - a| < b$ pour tous les n assez grands (interprétation géométrique). Il revient au même de dire que la suite des nombres $x_n - a$ a pour limite zéro (« tend vers zéro »), ou encore que $|x_n - a|$ tend vers zéro. Une suite est dite *convergente* si elle a une limite (nécessairement unique). La limite d'une suite convergente de nombres ≥ 0 est ≥ 0 (passage à la limite dans les inégalités). La borne supérieure d'une suite croissante et majorée est limite de cette suite.

L'axiome (A 2) exprime qu'il existe une suite de nombres > 0 et tendant vers zéro. Il permet de démontrer que la limite d'une somme $(x_n + y_n)$ est la somme des limites des suites (x_n) et (y_n) : pour cela, on doit d'abord montrer que pour tout $x > 0$ existe un $z > 0$ tel que $2z \leq x$ (il suffit de prendre $z = \inf(y, x - y)$, y étant tel que $0 < y < x$).

Voici quelques conséquences de l'axiome (A 3) :

(B 1) le groupe R est *archimédien* : cela signifie que si $x > 0$, la suite croissante des nx (n entier > 0) n'est pas majorée.

Démonstration : supposons-la majorée, et soit y sa borne supérieure ; y est aussi la borne supérieure de la suite des $(n+1)x = nx + x$, suite qui a pour borne supérieure $y + x$. Ainsi $y = y + x$, d'où $x = 0$ contrairement à l'hypothèse.

(B 1) entraîne (B' 1) : soit une suite (a_n) d'éléments $a_n > 0$ tels que $2a_{n+1} \leq a_n$; une telle suite tend vers 0.

En effet, on a $2^n a_n \leq a_0$; si $b > 0$ était tel que $a_n \geq b$ pour tout n , on aurait $2^n b \leq a_0$ pour tout n , ce qui contredit (B 1).

(B 2) si on a une suite d'intervalles fermés I_n tels que I_{n+1} soit contenu dans I_n et que la longueur de I_n tende vers zéro, il existe un point commun et un seul à ces intervalles.

Démonstration : les origines des I_n forment une suite croissante et majorée ; soit a sa limite. On voit tout de suite que a est l'unique point commun aux I_n .

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME D'ISOMORPHISME.

Il suffit de montrer ceci : soit G un groupe abélien ordonné satisfaisant à (A 1), (A 2), (B 1) et (B 2) ; pour tout a de G , tel que $a > 0$, il existe un isomorphisme f de G sur R tel que $f(a) = 1$, et un tel isomorphisme est unique.

Si ceci est prouvé, il en résultera aussi que le système des axiomes (A 1), (A 2) et (A 3) est équivalent au système des axiomes (A 1), (A 2), (B 1) et (B 2).

Supposons donc que G vérifie les conditions (A 1), (A 2), (B 1) et (B 2). Montrons d'abord que, dans G , la division par 2 est toujours possible (d'une seule manière, évidemment). Soit par exemple $x > 0$; il existe $u > 0$ tel que $2u \leq x$ et $4u > x$ (en effet, d'après (A 2), il existe $s > 0$ tel que $2s \leq x$; d'après (B 1), soit n le plus grand entier tel que $2ns \leq x$; il suffit de prendre $u = ns$). L'intervalle $(u, x - u)$ a pour longueur $x - 2u < 2u$, donc le double de sa longueur est $> x$. En recommençant sur cet intervalle, on trouvera une suite d'intervalles emboîtés $(0, x)$, $(x_1, x - x_1)$, $(x_2, x - x_2)$, ..., $(x_n, x - x_n)$, tels que, si $a_n = x - 2x_n$ désigne la longueur du n -ième, on ait $2a_{n+1} < a_n$. Il en résulte que a_n tend vers zéro [cf. (B' 1)]. D'après (B 2), la suite (x_n) a une limite y , et on trouve à la limite $y = x - y$, c'est-à-dire $2y = x$. C.Q.F.D.

Ayant choisi $a > 0$ dans G , notons $a/2^n$ le quotient de a par 2^n , qui existe comme on vient de le voir ; pour tout entier p positif ou négatif, on note $(p/2^n)a$ le produit de $a/2^n$ par p , qui ne dépend que de la fraction $p/2^n$. Par définition, $f[(p/2^n)a]$ sera le nombre dyadique $p/2^n$. Soit ensuite à définir $f(u)$ pour un u quelconque de G ; pour chaque n , soit p_n le plus grand des entiers p tels que $(p/2^n)a \leq u$; u est limite de la suite croissante des $(p_n/2^n)a$ (valeurs approchées par défaut). La suite des nombres dyadiques $p_n/2^n$ est croissante, et sa limite sera, par définition, $f(u)$. Ainsi f est défini ; il est facile de voir que f respecte l'addition et l'ordre ; à deux éléments distincts de G , f associe deux nombres dyadiques distincts. Enfin, (B 2) sert à prouver que tout nombre dyadique est le f d'un élément convenable de G . L'existence de l'isomorphisme f est ainsi démontrée, et son unicité est immédiate.

5. AUTRES PROPRIÉTÉS DU GROUPE ADDITIF DES NOMBRES RÉELS.

Théorème : dans R , tout ensemble non vide et majoré, admet une borne supérieure.

En effet, soit A un ensemble non vide et majoré. Pour tout n , soit $p_n/2^n$ le plus petit des majorants de A de la forme $p/2^n$. La suite $(p_n/2^n)$ est décroissante (au sens large) ; elle a donc une borne inférieure a . Il est immédiat que a est un majorant de A , et que tout autre majorant de A est $\geq a$.

Critère de Cauchy : pour qu'une suite (x_n) soit convergente, il faut et il suffit

que $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow \infty}} |x_n - x_p| = 0$ (autrement dit, pour tout $b > 0$, on a $|x_n - x_p| < b$ dès que n et p sont supérieurs à un entier convenable).

Démonstration : la condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, supposons-la remplie ; alors la suite (x_n) est majorée et minorée, soit

$$M_p = \sup_{n \geq p} x_n, \quad m_p = \inf_{n \geq p} x_n.$$

Soit I_p l'intervalle d'origine m_p et d'extrémité M_p . I_{p+1} est contenu dans I_p , et la longueur de I_p tend vers zéro d'après l'hypothèse ; donc, d'après (B 2), il existe un point y commun à ces intervalles, et il est immédiat que y est limite de la suite (x_n) .

6. MULTIPLICATION DES NOMBRES RÉELS.

Voici comment la multiplication peut être définie dans R en utilisant seulement les notions précédentes. Soit, d'abord, $a > 0$; d'après le théorème d'isomorphisme, il existe un seul automorphisme de R (respectant l'ordre) qui transforme 1 en a ; lorsque a est un entier, $n > 0$, c'est l'automorphisme $x \mapsto nx$; dans le cas général, notons ax le transformé de x dans cet automorphisme. Si $a < 0$, il existe un seul automorphisme du groupe additif R , qui change l'ordre et transforme 1 en a ; même notation. Enfin, si $a = 0$, on pose $ax = 0$.

On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} a \cdot 1 &= a, & a(b + c) &= ab + ac, \\ (ab)c &= a(bc), \\ ab &= ba. \end{aligned}$$

Les deux premières sont évidentes d'après la définition ; la troisième exprime que si l'on effectue successivement l'automorphisme amenant 1 en b , puis celui amenant 1 en a , on trouve l'automorphisme amenant 1 en ab ; ce qui est évident. Enfin, la commutativité $ab = ba$ se démontre d'abord pour b entier, puis pour b fractionnaire, et enfin dans le cas général par passage à la limite.

Puisque, pour $a \neq 0$, la transformation $x \mapsto ax$ est un automorphisme, le nombre a possède un inverse a^{-1} pour la multiplication : les $a \neq 0$ forment un groupe abélien pour la multiplication.

7. FONCTION EXPONENTIELLE ET FONCTION LOGARITHMIQUE.

Soit toujours R le groupe additif des nombres réels. Les nombres réels > 0 forment un groupe pour la multiplication ; soit G ce groupe. Pour l'ordre induit sur G par l'ordre de R , G est un groupe abélien ordonné (1 remplace 0) : il suffit de vérifier que $x \leq y$ entraîne $zx \leq zy$ quand x, y, z sont > 0 . Les axiomes (A 2) et (A 3) sont vérifiés par G . Le théorème d'isomorphisme nous dit alors qu'étant donné un $a \neq 1$, il existe un isomorphisme f et un seul du groupe G sur le groupe R , qui conserve l'ordre si $a > 1$ et le change si $a < 1$, et satisfait à $f(a) = 1$. La fonction $f(x)$ (à valeurs réelles) se note $\log_a x$; toutes les fonctions logarithmiques sont proportionnelles. La fonction réciproque g , qui applique le groupe R sur le groupe G , se note a^x ; pour $a = 1$, on pose $1^x = 1$. De là on déduit les relations fonctionnelles de l'exponentielle et du logarithme. Soit, par exemple, à montrer la relation

$$a^{xy} = (a^x)^y ;$$

c'est évident si $a = 1$; si $a \neq 1$, c'est évident si $x = 0$, et si $x \neq 0$, la transformation $y \mapsto a^{xy}$ est un isomorphisme de R sur G , qui transforme 1 en a^x , donc c'est $y \mapsto (a^x)^y$.

8. EXTENSIONS DU THÉORÈME D'ISOMORPHISME.

Ce théorème est valable sous des hypothèses plus larges. Proposons-nous d'abord de caractériser axiomatiquement le demi-groupe ordonné R^+ des nombres réels ≥ 0 (la loi de composition étant l'addition) : considérons un ensemble ordonné E , ayant un plus petit élément (que nous noterons ω), et une loi de composition $(x, y) \rightarrow x + y$ satisfaisant aux conditions suivantes :

- (C 1) l'addition est commutative, associative et admet ω comme élément neutre ;
- (C 2) la relation $x < y$ entraîne $x + z < y + z$;
- (C 3) l'ensemble des $x \in E$ tels que $x \neq \omega$ n'est pas vide, n'a pas de plus petit élément, et, pour tout couple (x, y) tel que $x < y$, il existe z tel que $x + z = y$ [possibilité de la soustraction, qui est nécessairement unique d'après (C 2)] ;
- (C 4) toute suite croissante et majorée admet une borne supérieure.

On démontre qu'un tel E est isomorphe à R^+ ; les isomorphismes f de E sur R^+ sont déterminés à un facteur constant près (la démonstration est la même que celle du théorème d'isomorphisme).

Mais on peut encore faire mieux : on peut caractériser n'importe quel intervalle de R^+ , d'origine 0. Soit E un ensemble ordonné ayant un plus petit élément ω ; soit I une partie de E , contenant ω , et telle que $x \in I$ et $y < x$ entraînant $y \in I$. Supposons définie une loi de composition $(x, y) \rightarrow x + y$ lorsque x et y sont dans I ($x + y$ peut ne pas appartenir à I). Faisons les hypothèses :

(C 1) l'addition est commutative, admet ω comme élément neutre, et est associative dans le sens suivant : chaque fois que $x, y, z, x + y$ et $y + z$ sont dans I , on a $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(C 2) la relation $x < y$ (entre éléments de I) entraîne, pour tout $z \in I$,

$$x + z < y + z ;$$

(C 3) l'ensemble des $x \in I$ tels que $x \neq \omega$ n'est pas vide et n'a pas de plus petit élément, et si $x < y \in I$, il existe $z \in I$ tel que $x + z = y$;

(C 4) toute suite croissante d'éléments de I , majorée par un élément de I , possède une borne supérieure dans I .

Alors il existe une application strictement croissante f de I sur un intervalle de R^+ , d'origine 0, telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ chaque fois que x, y et $x + y$ sont dans I . Une telle f est déterminée à un facteur constant près.

Application à la mesure des angles : un « angle » est déterminé par un point du cercle trigonométrique, c'est-à-dire par un couple (a, b) de nombres réels tels que $a^2 + b^2 = 1$; l'angle nul est défini par le couple $(1, 0)$. Notons-le ω . A un angle (a, b) on attache la rotation $(x, y) \rightarrow (ax - by, bx + ay)$. Ces rotations forment un groupe G : le composé de l'angle (a, b) et de l'angle (a', b') est l'angle $(aa' - bb', ab' + ba')$. Ce groupe est abélien et a pour élément neutre ω . Soit E l'ensemble des angles (a, b) tels que $b \geq 0$; sur E , considérons la relation d'ordre définie par

$$(a, b) \leq (a', b') \text{ si } a \geq a'.$$

Soit I le sous-ensemble des angles tels que $a \geq 0$ et $b \geq 0$ (interprétation géométrique). On vérifie facilement (C 1), (C 2), (C 3), (C 4). D'où la mesure des angles tels que $a \geq 0, b \geq 0$: elle consiste en une application f de I dans R^+ , bien définie à un facteur constant près. L'application réciproque g applique un intervalle de R^+ sur I ; elle se prolonge en une application $\bar{g}$ de R tout entier dans le groupe des angles G , telle que $\bar{g}(x + y) = \bar{g}(x) + \bar{g}(y)$. Les nombres réels x tels que $\bar{g}(x) = \omega$ forment un sous-groupe de R , qui se compose des multiples entiers d'un élément $a \neq 0$. La « mesure » d'un angle quelconque est une classe de nombres réels modulo a .

9. MESURE DES GRANDEURS.

On peut encore affaiblir les hypothèses sur E et I ; mais alors on obtiendra seulement un isomorphisme de I sur un certain sous-ensemble de R^+ . D'une façon précise, supposons donné un ensemble ordonné E , possédant un plus petit élément noté ω ; les éléments de E peuvent être appelés des « grandeurs ». Soit I une partie de E contenant ω , et telle que $x \in I$ et $y < x$ entraînent $y \in I$: les éléments de I s'appelleront les « grandeurs addibles ». Soit donnée une loi de composition

$(x, y) \longrightarrow x + y$ entre éléments de I (à valeurs dans E),

appelée l'addition des grandeurs. Faisons les hypothèses suivantes :

(C 1) et (C 2) comme ci-dessus ;

(C' 3) l'ensemble des $x \in I$ tels que $x \neq \omega$ n'est pas vide, et si $x < y \in I$, il existe un $z \in I$, $z > \omega$, tel que $x + z < y$;

(C' 4) si $x \in I$ et $y \in I$, avec $x \neq \omega$, il existe un entier n tel que nx soit défini (i.e. : $x, 2x, \dots, (n-1)x$ sont dans I) et que $nx > y$ (« axiome d'Archimède »).

Alors il existe une application *strictement croissante* f de I dans R^+ , telle que $f(\omega) = 0$, et $f(x + y) = f(x) + f(y)$ chaque fois que x, y et $x + y$ sont dans I . Une telle f est déterminée à un facteur constant près ; pour $x \in I$, $f(x)$ s'appelle la *mesure* de x .

En particulier, si on choisit un $a \neq \omega$, il existe une f et une seule telle que $f(a) = 1$; on dit qu'on a pris a comme *grandeur-unité*.

Tel est le théorème fondamental de la *mesure des grandeurs*. On observera qu'on n'a pas supposé la possibilité de la soustraction, ni la possibilité de diviser les grandeurs par des entiers. Naturellement, le théorème vaut notamment lorsque $I = E$ (toutes les grandeurs sont alors addibles).

La démonstration détaillée se trouve dans le livre de Bourbaki (« Top. Générale », chapitre V, proposition 1). En voici le principe : ayant choisi $a > \omega$, le nombre $f(x)$ attaché à la grandeur $x \in I$ sera le « rapport » de la grandeur x à la grandeur a ; on le trouve comme suit. Soit $y > \omega$ très petit ; soit $p(y)$ le plus grand entier p tel que $py \leq x$; soit $q(y)$ le plus grand entier q tel que $qy \leq a$; on démontre que le quotient $p(y)/q(y)$ tend vers une limite quand y tend vers ω . Cette limite est le nombre réel $f(x)$ cherché.

Remarque : pour établir le théorème précédent, il n'est même pas nécessaire de supposer que l'addition des grandeurs est commutative ; on modifie alors l'axiome (C 2) comme suit :

la relation $x < y$ entraîne $x + z < y + z$ et $z + x < z + y$.

La conclusion subsiste ; il en résulte *a posteriori* que l'addition des grandeurs était commutative.

Henri CARTAN,
professeur à la Sorbonne.

Bibliographie

Etude métrique des familles de tétraèdres et de figures apparentées, par Mlle G. GUTTEL. (Etudes pratiques d'accès à la recherche, section des actualités géométriques, dirigée par G. BOULIGAND et G. CHOQUET ; Centre de documentation universitaire, 5, place de la Sorbonne, Paris, V°).

Notre cours de mathématiques élémentaires et plus particulièrement notre cours de géométrie nous donne l'occasion de présenter à nos élèves certaines études com-

munément désignées sous le nom de « discussions ». On sait qu'il s'agit d'organiser un ensemble d'êtres mathématiques en procédant d'abord par « classification », c'est-à-dire en assignant à chaque élément une classe et une seule, puis par « ordination », la relation d'ordre portant sur les classes précédemment découpées.

Ce sont de véritables modèles de discussions que nous offre l'ouvrage de Mlle GUITEL. Le premier problème étudié s'énonce très modestement en ces termes : « Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de comparer à l'angle droit les trois faces d'un trièdre et au dièdre droit ses trois dièdres. »

Ce problème est résolu par une partition de l'ensemble des trièdres en sept « genres » s'inscrivant dans un tableau où thèmes des dièdres et thèmes des faces sont abscisses et ordonnées. La classification des trièdres assure celle des parallélépipèdes, puis les tétraèdres sont à leur tour dûment répartis en 27 genres s'inscrivant dans un tableau à double entrée, analogue au précédent.

Est ensuite étudiée la filiation par laquelle un tétraèdre perd un élément obtus. Par composition de filiations on obtient une relation d'ordre partiel permettant de distinguer cinq familles naturelles de tétraèdres. La représentation graphique de chaque famille, puis celle de l'ensemble complet, donnent des « résilles généalogiques » de grande beauté. L'étude des tétraèdres particuliers, celle de la sphère circonscrite à un tétraèdre, celle des angles tétraèdres, sont ensuite menées dans le même style et avec la même clarté.

« L'analyse graphique des démonstrations », qui termine l'ouvrage, en est la conclusion logique. Une démonstration est en général un ensemble partiellement ordonné de propositions, de nombreux théorèmes d'arithmétique ou de géométrie, très savants ou très familiers, voient alors leurs démonstrations s'illustrer graphiquement. La connaissance de ces graphes est importante pour le professeur, en effet, disposer une démonstration au tableau, n'est-ce pas justement en révéler la structure. Soyons très reconnaissants envers Mlle GUITEL de nous avoir fait réfléchir à ces idées essentielles pour l'art d'enseigner.

Y. CROZES.

Quelques remarques historiques sur l'axiomatique du concept de grandeur, par M. J. ITARD. N° 3321, janvier-février 1953, de la « Revue Scientifique ».

Nous avons encore en mémoire l'intéressante conférence faite par M. J. ITARD devant le groupe « Axiomatique et redécouverte ». Ce sont les thèmes présentés alors, que notre collègue a repris en les développant dans la « Revue Scientifique ».

Le lecteur trouvera dans cette étude : un exposé axiomatique des propriétés des ensembles, simplement ordonnables, des grandeurs sommables et des grandeurs repérables ; puis l'histoire érudite de la pensée mathématique scrutant difficilement le continu et prenant peu à peu conscience du non-archimédien.

Nous citons enfin avec plaisir cette conclusion : « Depuis un siècle, d'abord par les difficultés que crée l'étude du postulat d'Euclide, puis ou parallèlement par celles nées de l'étude de la notion de nombre et de celle de fonction, s'est développée la méthode axiomatique. L'essai historique qui précède tend à montrer sous quelle pression impérieuse et en quelque sorte extérieure les mathématiciens ont été amenés à adopter cette nouvelle attitude. »

Y. CROZES.

Le Gérant : L. PARAZINES.

Cahors. Imp. A. Coueslant (personnel intéressé). 86.984 — 1954
C.O.A.L. 31.2330. — Dépôt légal : IV-1954

Le Jeudi 13 janvier 1955 à 16 heures

au **MUSÉE PÉDAGOGIQUE**, 29, rue d'Ulm, 5°

sera donnée sous les auspices
de la Société française de Pédagogie,
la Conférence suivante :

*Un point de vue nouveau sur l'Enseignement
de la Géométrie élémentaire*

par **M. ZADOUNAISKY**



Les Professeurs de Mathématiques sont cordialement invités.

DELAGRAVE

Vient de paraître

**COURS BRACHET, DUMARQUÉ, ROSTOLLAND
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET COTÉE**

classe de Mathématiques
NOUVELLE ÉDITION, ENTIÈREMENT REFONDUE

MATHÉMATIQUES

classe de Sciences expérimentales
NOUVELLE ÉDITION, ENTIÈREMENT REFONDUE. Principales modifications :

- 1° Des fractions archimédiennes aux fractions ordinaires.
- 2° De la notion de tangente à la notion de dérivée.
- 3° Du mouvement rectiligne, avec vecteur vitesse et vecteur accélération, au mouvement curviligne.
- 4° Regards sur les nombres irrationnels, et nombreux renseignements historiques.

GÉOMÉTRIE

classe de Mathématiques et Technique
PRÉPARATION AUX ARTS ET MÉTIERS

Avec la collaboration de **P. JEANGIRARD**, professeur agrégé
au Collège Moderne et Technique Benjamin-Franklin, à ORLÉANS

Cours de mathématiques complet et maintenu au courant.
Longue expérience, au service des idées nouvelles

LE PROBLÈME de MATHÉMATIQUES au B.E.P.C.
et au Concours d'entrée des Ecoles Normales

par **Marcel BOMPARD**, professeur à l'École Normale d'Instituteurs de Paris

Catalogue et Spécimens sur demande : 15, rue Soufflot, PARIS (5°)

Roland MAILLARD et
Professeur de Mathématiques Spéciales
au Lycée Charlemagne
Chargé d'un cours
à l'École Normale Supérieure

Albert MILLET
Professeur agrégé
au Lycée Janson-de-Sailly
et à l'École Normale Supérieure
de l'Enseignement Technique

COURS DE MATHÉMATIQUES

Enseignement du Second degré

Classe de Sixième. *Un volume.* + Corrigés.

Classe de Cinquième. *Un volume.* + Corrigés.

Classe de Quatrième. *Un volume.* + Corrigés.

Classe de Troisième (Nouvelle édition). *Un volume.*
+ Corrigés.

Classes de Seconde Classique A et B. *Un volume.*

Classes de Seconde Classique C et Moderne :

Algèbre. *Un volume.*

Géométrie. *Un volume.* + Corrigés.

Classes de Première Classique A et B. *Un volume.*

Classes de Première Classique C et Moderne :

Algèbre et Trigonométrie. *Un volume.*

Géométrie. *Un volume.* + Corrigés.

★ **Classe de Sciences expérimentales.** *Un volume.*

Classes de Philosophie et Sciences expérimentales :

Cosmographie. *Un volume.*

★ **Classe de Philosophie :**

Trigonométrie et Algèbre. *Un volume.*

★ **Mathématiques (Trigonométrie, Algèbre et Cosmographie).**
Un volume.

Classe de Mathématiques :

Algèbre. *Un volume.*

Géométrie descriptive.

★ **Arithmétique.** *Un volume.*

Un volume.

Cosmographie. *Un vol.*

Trigonométrie. *Un vol.*

Géométrie. *Un volume.*

★ **Mécanique (en préparat.)**

Classe de Mathématiques (Technique) :

★ **Algèbre (en préparation).**

Géométrie. *Un volume.*

Trigonométrie. *Un volume.*

Cours Complémentaires

★ **Classe de Sixième.** *Un volume.*

★ **Classe de Cinquième.** *Un volume.*

★ **Classe de Quatrième.** *Un volume.*

★ **Classe de Troisième (en préparation).**

+ Les Corrigés, hors commerce, sont exclusivement réservés
à MM. les Professeurs de Mathématiques.

★ **NOUVEAUTÉS.**

