

Nombres réels et mesure des grandeurs

(Conférence de M. Henri CARTAN, le 17 juin 1954)

La théorie des nombres réels est présentée habituellement dans la classe de Mathématiques Spéciales en utilisant les « coupures » de Dedekind. Ceci prend beaucoup de temps et laisse les élèves assez indifférents. A vrai dire, les coupures ne leur seront plus jamais d'aucune utilité : ce n'est pas d'elles que l'on se sert pour le calcul numérique, qui a besoin d'outils plus explicites, et quant aux développements ultérieurs de l'Analyse mathématique, ils utilisent surtout quelques propriétés essentielles de l'ensemble des nombres réels, et non une définition au moyen d'un procédé particulier comme celui des coupures. Dans un cours de Mathématiques Spéciales, il importe donc, à mon avis, de mettre en évidence les principales propriétés de l'ensemble des nombres réels ; c'est ce que je vais tenter de faire ici, et cela me donnera l'occasion d'utiliser devant vous la « méthode axiomatique ».

I. PROPRIÉTÉS DU GROUPE ADDITIF DES NOMBRES RÉELS.

Je suppose provisoirement que nous avons déjà une idée de ce que sont les nombres réels (positifs, négatifs ou zéro), et je fais un bilan d'une partie de nos connaissances supposées.

Dans l'ensemble R des nombres réels est définie une *addition* qui, à chaque couple (x, y) d'éléments de R , associe un élément de R noté $x + y$. Muni de cette addition, R est un *groupe abélien* ; ceci signifie que les conditions suivantes sont remplies :

$$(1) \quad x + y = y + x ;$$

- (2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
 (3) il existe un élément 0 tel que $x + 0 = x$ pour tout x ;
 (4) pour tout x il existe un x' tel que $x + x' = 0$ (un tel x' est unique ; on le note $-x$; d'où la possibilité et l'unicité de la soustraction).

Ce n'est pas tout : R est un *ensemble ordonné* (« totalement ordonné », comme dit Bourbaki). Cela signifie que, pour tout couple (x, y) , on a l'une des relations $x \leq y$ ou $y \leq x$, et que cette « relation d'ordre » jouit des deux propriétés que voici : si l'on a $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$; si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$. On définit la relation $x < y$, qui signifie $x \leq y$ et $x \neq y$.

Il est commode de se représenter les éléments de R comme les points d'une droite illimitée ; $x < y$ s'interprète alors au moyen de la notion intuitive : « x à gauche de y », et l'opération qui fait correspondre à tout x l'élément $x + a$ (a fixe) s'interprète comme une *translation*. Ceci est simplement un langage commode ; nous ne cherchons pas à définir la droite, nous nous servons simplement d'un langage intuitif pour traduire les propriétés axiomatiques que nous attribuons à notre groupe R .

R jouit de certaines propriétés supplémentaires que nous allons énumérer :

(A 1) $x \leq y$ entraîne $x + z \leq y + z$ (en langage géométrique : la relation d'ordre est invariante par translation). Il en résulte aussitôt que les relations $(x \leq y)$ et $(x + z \leq y + z)$ sont *équivalentes*. De là on déduit la possibilité d'ajouter les inégalités membre à membre ; le fait que $x \leq y$ équivaut à $y - x \geq 0$ (la connaissance des nombres positifs détermine la relation d'ordre). Si on note $\sup(x, y)$ le plus grand des deux nombres x et y , on pose $x^+ = \sup(x, 0)$, $x^- = \sup(-x, 0)$; alors $x^+ + x^- = \sup(x, -x)$ est noté $|x|$. Il est évident que

$$(x + y)^+ \leq x^+ + y^+, \quad (x + y)^- \leq x^- + y^-,$$

d'où, en ajoutant membre à membre : $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Étant donnés x et y tels que $x \leq y$, on appelle *intervalle fermé* (ou *segment*) d'origine x et d'extrémité y l'ensemble des z tels que $x \leq z \leq y$. L'élément $y - x$ s'appelle la *longueur* de l'intervalle. Si x, y, z sont trois éléments quelconques, ils définissent trois intervalles, dont les longueurs satisfont à l'inégalité

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

Tout ceci résulte de la condition (A 1). Le groupe R n'est pas le seul à satisfaire à cette condition (exemple : le groupe additif des nombres entiers). Un tel groupe s'appelle un *groupe abélien ordonné*.

Mais R satisfait encore à deux autres conditions :

(A 2) il existe des éléments > 0 , et si $x > 0$, il existe $y > 0$ tel que $y < x$. (Observer que le groupe des entiers ne satisfait pas à cette condition).

Avant d'énoncer (A 3), rappelons que, dans tout ensemble ordonné, on a la notion de *majorant* d'un sous-ensemble A : on appelle ainsi tout élément a tel que l'on ait $x \leq a$ pour tout x de A . On dit qu'un ensemble est *majoré* si l'ensemble de ses majorants n'est pas vide ; on appelle *borne supérieure* (exacte) d'un ensemble majoré le *plus petit* de ses majorants, s'il en existe un (qui est alors unique). Cela dit, (A 3) s'énonce comme suit :

(A 3) toute suite croissante (au sens large) et majorée, possède une borne supérieure.

Ceci est la propriété la plus profonde de l'ensemble R des nombres réels. L'ensemble des nombres rationnels satisfait bien à (A 2), mais pas à (A 3).

2. THÉORÈME D'EXISTENCE.

Il s'agit de montrer qu'il existe effectivement un groupe abélien ordonné satisfaisant à (A 1), (A 2) et (A 3). Pour cela, considérons l'ensemble des nombres décimaux illimités ; ou encore, ce qui sera plus commode, l'ensemble des nombres dyadiques illimités. Un tel nombre s'écrit avec un nombre entier n (≥ 0 ou ≤ 0) suivi

d'une virgule et d'une suite illimitée de chiffres 0 et 1, comprenant une infinité de zéros. Soit R l'ensemble de ces « nombres ». Il nous faut définir dans R une relation d'ordre et une addition, puis vérifier les axiomes.

La relation d'ordre sera l'ordre *lexicographique* : soient donnés deux nombres $x = n, s$ et $x' = n', s'$ (où s et s' désignent des suites illimitées de chiffres 0 et 1) ; si $n < n'$, on pose $x < x'$; si $n = n'$, on pose $x < x'$ si $s < s'$, et cette dernière relation se définit comme suit : s étant supposé différent de s' , on compare, pour chaque entier $p \geq 0$, les chiffres de rang p de s et de s' ; on prend le plus petit p pour lequel ils sont distincts, et on écrit $s < s'$ si le p -ième chiffre de s est 0, le p -ième chiffre de s' est 1.

On vérifie sans difficulté que cette relation d'ordre satisfait à (A 2) et (A 3). Il reste à définir l'addition des nombres dyadiques ; cette définition est classique s'ils sont « limités » (c'est-à-dire ne contiennent qu'un nombre fini de chiffres 1) ; dans le cas général, associés à chaque nombre dyadique x la suite croissante des nombres limités x_p que l'on obtient en remplaçant tous ses chiffres par des zéros à partir du rang p ; étant donnés deux nombres x et y , la suite des sommes $x_p + y_p$ est une suite croissante et majorée, dont la borne supérieure est, par définition, la somme $x + y$. La vérification des axiomes est un peu fastidieuse, mais ne présente aucune difficulté.

On pourrait procéder de même avec les nombres décimaux illimités. On obtiendrait encore un groupe abélien ordonné satisfaisant aux axiomes. Bien entendu, tout le monde pense que *c'est le même*, aux notations près. Mais si on veut exprimer ceci en langage précis, on est conduit à la notion d'*isomorphisme* : soient G et G' deux groupes abéliens, munis chacun d'une relation d'ordre ; on appelle isomorphisme de G sur G' une application biunivoque f de G sur G' , telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, et que $x \leq y$ entraîne $f(x) \leq f(y)$ (autrement dit, f respecte l'addition et respecte l'ordre). Cela dit, annonçons tout de suite le théorème fondamental de la théorie des nombres réels : notons R le groupe ordonné des nombres dyadiques, tel qu'il vient d'être défini ; alors :

Théorème d'isomorphisme : tout groupe abélien ordonné G satisfaisant à (A 1), (A 2) et (A 3) est isomorphe au groupe R . D'une façon précise, pour tout $a \in G$ tel que $a > 0$, il existe un isomorphisme f de G sur R tel que $f(a) = 1$; un tel isomorphisme est unique quand a est donné.

3. QUELQUES CONSÉQUENCES DES AXIOMES.

Avant de démontrer le théorème d'isomorphisme, il est bon de tirer quelques conséquences des axiomes (A 1), (A 2) et (A 3).

Tout d'abord, la *notion de limite* : une suite (x_n) a pour limite a si, pour tout $b > 0$, on a $|x_n - a| < b$ pour tous les n assez grands (interprétation géométrique). Il revient au même de dire que la suite des nombres $x_n - a$ a pour limite zéro (« tend vers zéro »), ou encore que $|x_n - a|$ tend vers zéro. Une suite est dite *convergente* si elle a une limite (nécessairement unique). La limite d'une suite convergente de nombres ≥ 0 est ≥ 0 (passage à la limite dans les inégalités). La borne supérieure d'une suite croissante et majorée est limite de cette suite.

L'axiome (A 2) exprime qu'il existe une suite de nombres > 0 et tendant vers zéro. Il permet de démontrer que la limite d'une somme $(x_n + y_n)$ est la somme des limites des suites (x_n) et (y_n) : pour cela, on doit d'abord montrer que pour tout $x > 0$ existe un $z > 0$ tel que $2z \leq x$ (il suffit de prendre $z = \inf(y, x - y)$, y étant tel que $0 < y < x$).

Voici quelques conséquences de l'axiome (A 3) :

(B 1) le groupe R est *archimédien* : cela signifie que si $x > 0$, la suite croissante des nx (n entier > 0) n'est pas majorée.

Démonstration : supposons-la majorée, et soit y sa borne supérieure ; y est aussi la borne supérieure de la suite des $(n+1)x = nx + x$, suite qui a pour borne supérieure $y + x$. Ainsi $y = y + x$, d'où $x = 0$ contrairement à l'hypothèse.

(B 1) entraîne (B' 1) : soit une suite (a_n) d'éléments $a_n > 0$ tels que $2a_{n+1} \leq a_n$; une telle suite tend vers 0.

En effet, on a $2^n a_n \leq a_0$; si $b > 0$ était tel que $a_n \geq b$ pour tout n , on aurait $2^n b \leq a_0$ pour tout n , ce qui contredit (B 1).

(B 2) si on a une suite d'intervalles fermés I_n tels que I_{n+1} soit contenu dans I_n et que la longueur de I_n tende vers zéro, il existe un point commun et un seul à ces intervalles.

Démonstration : les origines des I_n forment une suite croissante et majorée ; soit a sa limite. On voit tout de suite que a est l'unique point commun aux I_n .

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME D'ISOMORPHISME.

Il suffit de montrer ceci : soit G un groupe abélien ordonné satisfaisant à (A 1), (A 2), (B 1) et (B 2) ; pour tout a de G , tel que $a > 0$, il existe un isomorphisme f de G sur R tel que $f(a) = 1$, et un tel isomorphisme est unique.

Si ceci est prouvé, il en résultera aussi que le système des axiomes (A 1), (A 2) et (A 3) est équivalent au système des axiomes (A 1), (A 2), (B 1) et (B 2).

Supposons donc que G vérifie les conditions (A 1), (A 2), (B 1) et (B 2). Montrons d'abord que, dans G , la division par 2 est toujours possible (d'une seule manière, évidemment). Soit par exemple $x > 0$; il existe $u > 0$ tel que $2u \leq x$ et $4u > x$ (en effet, d'après (A 2), il existe $s > 0$ tel que $2s \leq x$; d'après (B 1), soit n le plus grand entier tel que $2ns \leq x$; il suffit de prendre $u = ns$). L'intervalle $(u, x - u)$ a pour longueur $x - 2u < 2u$, donc le double de sa longueur est $> x$. En recommençant sur cet intervalle, on trouvera une suite d'intervalles emboîtés $(0, x)$, $(x_1, x - x_1)$, $(x_2, x - x_2)$, ..., $(x_n, x - x_n)$, tels que, si $a_n = x - 2x_n$ désigne la longueur du n -ième, on ait $2a_{n+1} < a_n$. Il en résulte que a_n tend vers zéro [cf. (B' 1)]. D'après (B 2), la suite (x_n) a une limite y , et on trouve à la limite $y = x - y$, c'est-à-dire $2y = x$. C.Q.F.D.

Ayant choisi $a > 0$ dans G , notons $a/2^n$ le quotient de a par 2^n , qui existe comme on vient de le voir ; pour tout entier p positif ou négatif, on note $(p/2^n)a$ le produit de $a/2^n$ par p , qui ne dépend que de la fraction $p/2^n$. Par définition, $f[(p/2^n)a]$ sera le nombre dyadique $p/2^n$. Soit ensuite à définir $f(u)$ pour un u quelconque de G ; pour chaque n , soit p_n le plus grand des entiers p tels que $(p/2^n)a \leq u$; u est limite de la suite croissante des $(p_n/2^n)a$ (valeurs approchées par défaut). La suite des nombres dyadiques $p_n/2^n$ est croissante, et sa limite sera, par définition, $f(u)$. Ainsi f est défini ; il est facile de voir que f respecte l'addition et l'ordre ; à deux éléments distincts de G , f associe deux nombres dyadiques distincts. Enfin, (B 2) sert à prouver que tout nombre dyadique est le f d'un élément convenable de G . L'existence de l'isomorphisme f est ainsi démontrée, et son unicité est immédiate.

5. AUTRES PROPRIÉTÉS DU GROUPE ADDITIF DES NOMBRES RÉELS.

Théorème : dans R , tout ensemble non vide et majoré, admet une borne supérieure.

En effet, soit A un ensemble non vide et majoré. Pour tout n , soit $p_n/2^n$ le plus petit des majorants de A de la forme $p/2^n$. La suite $(p_n/2^n)$ est décroissante (au sens large) ; elle a donc une borne inférieure a . Il est immédiat que a est un majorant de A , et que tout autre majorant de A est $\geq a$.

Critère de Cauchy : pour qu'une suite (x_n) soit convergente, il faut et il suffit

que $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow \infty}} |x_n - x_p| = 0$ (autrement dit, pour tout $b > 0$, on a $|x_n - x_p| < b$ dès que n et p sont supérieurs à un entier convenable).

Démonstration : la condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, supposons-la remplie ; alors la suite (x_n) est majorée et minorée, soit

$$M_p = \sup_{n \geq p} x_n, \quad m_p = \inf_{n \geq p} x_n.$$

Soit I_p l'intervalle d'origine m_p et d'extrémité M_p . I_{p+1} est contenu dans I_p , et la longueur de I_p tend vers zéro d'après l'hypothèse ; donc, d'après (B 2), il existe un point y commun à ces intervalles, et il est immédiat que y est limite de la suite (x_n) .

6. MULTIPLICATION DES NOMBRES RÉELS.

Voici comment la multiplication peut être définie dans R en utilisant seulement les notions précédentes. Soit, d'abord, $a > 0$; d'après le théorème d'isomorphisme, il existe un seul automorphisme de R (respectant l'ordre) qui transforme 1 en a ; lorsque a est un entier, $n > 0$, c'est l'automorphisme $x \mapsto nx$; dans le cas général, notons ax le transformé de x dans cet automorphisme. Si $a < 0$, il existe un seul automorphisme du groupe additif R , qui change l'ordre et transforme 1 en a ; même notation. Enfin, si $a = 0$, on pose $ax = 0$.

On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} a \cdot 1 &= a, & a(b + c) &= ab + ac, \\ (ab)c &= a(bc), \\ ab &= ba. \end{aligned}$$

Les deux premières sont évidentes d'après la définition ; la troisième exprime que si l'on effectue successivement l'automorphisme amenant 1 en b , puis celui amenant 1 en a , on trouve l'automorphisme amenant 1 en ab ; ce qui est évident. Enfin, la commutativité $ab = ba$ se démontre d'abord pour b entier, puis pour b fractionnaire, et enfin dans le cas général par passage à la limite.

Puisque, pour $a \neq 0$, la transformation $x \mapsto ax$ est un automorphisme, le nombre a possède un inverse a^{-1} pour la multiplication : les $a \neq 0$ forment un groupe abélien pour la multiplication.

7. FONCTION EXPONENTIELLE ET FONCTION LOGARITHMIQUE.

Soit toujours R le groupe additif des nombres réels. Les nombres réels > 0 forment un groupe pour la multiplication ; soit G ce groupe. Pour l'ordre induit sur G par l'ordre de R , G est un groupe abélien ordonné (1 remplace 0) : il suffit de vérifier que $x \leq y$ entraîne $zx \leq zy$ quand x, y, z sont > 0 . Les axiomes (A 2) et (A 3) sont vérifiés par G . Le théorème d'isomorphisme nous dit alors qu'étant donné un $a \neq 1$, il existe un isomorphisme f et un seul du groupe G sur le groupe R , qui conserve l'ordre si $a > 1$ et le change si $a < 1$, et satisfait à $f(a) = 1$. La fonction $f(x)$ (à valeurs réelles) se note $\log_a x$; toutes les fonctions logarithmiques sont proportionnelles. La fonction réciproque g , qui applique le groupe R sur le groupe G , se note a^x ; pour $a = 1$, on pose $1^x = 1$. De là on déduit les relations fonctionnelles de l'exponentielle et du logarithme. Soit, par exemple, à montrer la relation

$$a^{xy} = (a^x)^y ;$$

c'est évident si $a = 1$; si $a \neq 1$, c'est évident si $x = 0$, et si $x \neq 0$, la transformation $y \mapsto a^{xy}$ est un isomorphisme de R sur G , qui transforme 1 en a^x , donc c'est $y \mapsto (a^x)^y$.

8. EXTENSIONS DU THÉORÈME D'ISOMORPHISME.

Ce théorème est valable sous des hypothèses plus larges. Proposons-nous d'abord de caractériser axiomatiquement le demi-groupe ordonné R^+ des nombres réels ≥ 0 (la loi de composition étant l'addition) : considérons un ensemble ordonné E , ayant un plus petit élément (que nous noterons ω), et une loi de composition $(x, y) \rightarrow x+y$ satisfaisant aux conditions suivantes :

- (C 1) l'addition est commutative, associative et admet ω comme élément neutre ;
- (C 2) la relation $x < y$ entraîne $x + z < y + z$;
- (C 3) l'ensemble des $x \in E$ tels que $x \neq \omega$ n'est pas vide, n'a pas de plus petit élément, et, pour tout couple (x, y) tel que $x < y$, il existe z tel que $x + z = y$ [possibilité de la soustraction, qui est nécessairement unique d'après (C 2)] ;
- (C 4) toute suite croissante et majorée admet une borne supérieure.

On démontre qu'un tel E est isomorphe à R^+ ; les isomorphismes f de E sur R^+ sont déterminés à un facteur constant près (la démonstration est la même que celle du théorème d'isomorphisme).

Mais on peut encore faire mieux : on peut caractériser n'importe quel intervalle de R^+ , d'origine 0 . Soit E un ensemble ordonné ayant un plus petit élément ω ; soit I une partie de E , contenant ω , et telle que $x \in I$ et $y < x$ entraînant $y \in I$. Supposons définie une loi de composition $(x, y) \rightarrow x + y$ lorsque x et y sont dans I ($x + y$ peut ne pas appartenir à I). Faisons les hypothèses :

(C 1) l'addition est commutative, admet ω comme élément neutre, et est associative dans le sens suivant : chaque fois que $x, y, z, x + y$ et $y + z$ sont dans I , on a $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(C 2) la relation $x < y$ (entre éléments de I) entraîne, pour tout $z \in I$,

$$x + z < y + z ;$$

(C 3) l'ensemble des $x \in I$ tels que $x \neq \omega$ n'est pas vide et n'a pas de plus petit élément, et si $x < y \in I$, il existe $z \in I$ tel que $x + z = y$;

(C 4) toute suite croissante d'éléments de I , majorée par un élément de I , possède une borne supérieure dans I .

Alors il existe une application strictement croissante f de I sur un intervalle de R^+ , d'origine 0 , telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ chaque fois que x, y et $x + y$ sont dans I . Une telle f est déterminée à un facteur constant près.

Application à la mesure des angles : un « angle » est déterminé par un point du cercle trigonométrique, c'est-à-dire par un couple (a, b) de nombres réels tels que $a^2 + b^2 = 1$; l'angle nul est défini par le couple $(1, 0)$. Notons-le ω . A un angle (a, b) on attache la rotation $(x, y) \rightarrow (ax - by, bx + ay)$. Ces rotations forment un groupe G : le composé de l'angle (a, b) et de l'angle (a', b') est l'angle $(aa' - bb', ab' + ba')$. Ce groupe est abélien et a pour élément neutre ω . Soit E l'ensemble des angles (a, b) tels que $b \geq 0$; sur E , considérons la relation d'ordre définie par

$$(a, b) \leq (a', b') \text{ si } a \geq a'.$$

Soit I le sous-ensemble des angles tels que $a \geq 0$ et $b \geq 0$ (interprétation géométrique). On vérifie facilement (C 1), (C 2), (C 3), (C 4). D'où la mesure des angles tels que $a \geq 0, b \geq 0$: elle consiste en une application f de I dans R^+ , bien définie à un facteur constant près. L'application réciproque g applique un intervalle de R^+ sur I ; elle se prolonge en une application $\bar{g}$ de R tout entier dans le groupe des angles G , telle que $\bar{g}(x + y) = \bar{g}(x) + \bar{g}(y)$. Les nombres réels x tels que $\bar{g}(x) = \omega$ forment un sous-groupe de R , qui se compose des multiples entiers d'un élément $a \neq 0$. La « mesure » d'un angle quelconque est une classe de nombres réels modulo a .

9. MESURE DES GRANDEURS.

On peut encore affaiblir les hypothèses sur E et I ; mais alors on obtiendra seulement un isomorphisme de I sur un certain sous-ensemble de R^+ . D'une façon précise, supposons donné un ensemble ordonné E , possédant un plus petit élément noté ω ; les éléments de E peuvent être appelés des « grandeurs ». Soit I une partie de E contenant ω , et telle que $x \in I$ et $y < x$ entraînent $y \in I$: les éléments de I s'appelleront les « grandeurs addibles ». Soit donnée une loi de composition

$(x, y) \rightarrow x + y$ entre éléments de I (à valeurs dans E),

appelée l'addition des grandeurs. Faisons les hypothèses suivantes :

(C 1) et (C 2) comme ci-dessus ;

(C' 3) l'ensemble des $x \in I$ tels que $x \neq \omega$ n'est pas vide, et si $x < y \in I$, il existe un $z \in I$, $z > \omega$, tel que $x + z < y$;

(C' 4) si $x \in I$ et $y \in I$, avec $x \neq \omega$, il existe un entier n tel que nx soit défini (i.e. : $x, 2x, \dots, (n-1)x$ sont dans I) et que $nx > y$ (« axiome d'Archimède »).

Alors il existe une application *strictement croissante* f de I dans R^+ , telle que $f(\omega) = 0$, et $f(x + y) = f(x) + f(y)$ chaque fois que x, y et $x + y$ sont dans I . Une telle f est déterminée à un facteur constant près ; pour $x \in I$, $f(x)$ s'appelle la *mesure* de x .

En particulier, si on choisit un $a \neq \omega$, il existe une f et une seule telle que $f(a) = 1$; on dit qu'on a pris a comme *grandeur-unité*.

Tel est le théorème fondamental de la *mesure des grandeurs*. On observera qu'on n'a pas supposé la possibilité de la soustraction, ni la possibilité de diviser les grandeurs par des entiers. Naturellement, le théorème vaut notamment lorsque $I = E$ (toutes les grandeurs sont alors addibles).

La démonstration détaillée se trouve dans le livre de Bourbaki (« Top. Générale », chapitre V, proposition 1). En voici le principe : ayant choisi $a > \omega$, le nombre $f(x)$ attaché à la grandeur $x \in I$ sera le « rapport » de la grandeur x à la grandeur a ; on le trouve comme suit. Soit $y > \omega$ très petit ; soit $p(y)$ le plus grand entier p tel que $py \leq x$; soit $q(y)$ le plus grand entier q tel que $qy \leq a$; on démontre que le quotient $p(y)/q(y)$ tend vers une limite quand y tend vers ω . Cette limite est le nombre réel $f(x)$ cherché.

Remarque : pour établir le théorème précédent, il n'est même pas nécessaire de supposer que l'addition des grandeurs est commutative ; on modifie alors l'axiome (C 2) comme suit :

la relation $x < y$ entraîne $x + z < y + z$ et $z + x < z + y$.

La conclusion subsiste ; il en résulte à *posteriori* que l'addition des grandeurs était commutative.

Henri CARTAN,
professeur à la Sorbonne.