
DEUXIÈME PARTIE

Les Mathématiques et la réalité extérieure

I. INTRODUCTION. — Le sujet suivant a été proposé en octobre 1949 comme épreuve de philosophie aux candidats de la section de Sciences Expérimentales au Baccalauréat :

« D'où vient que les mathématiques, qui reposent sur de pures conceptions de l'esprit, ont pourtant une application pratique ? »

Ce sujet pose un problème d'une importance capitale, aussi bien du point de vue de la philosophie que de l'enseignement des mathématiques. Il était manifestement au-dessus de la portée de la grande majorité des élèves ; peut-être aussi certains de leurs professeurs de philosophie n'ont-ils sur cette question que des lumières bien faibles. Cela me paraît tenir essentiellement à la façon, à mon avis inadéquate, dont les principes fondamentaux des mathématiques sont présentés le plus souvent dans l'enseignement. Ces modes d'exposition tendent en effet à laisser croire que les mathématiques ont un caractère arbitraire, sans rapport avec la réalité extérieure, résultant du jeu de l'activité intellectuelle pure et libre. Or il est impossible de contester que les mathématiques trouvent d'innombrables applications, aussi bien dans la réalité pratique courante que dans les sciences et les techniques les plus variées : mécanique, astronomie, physique, chimie, techniques de l'ingénieur, mathématiques financières et actuariales, méthodes statistiques en biologie, sociologie, psychologie, etc... Si donc on devait prendre à la lettre l'affirmation que les mathématiques reposent sur de pures conceptions de l'esprit, il y aurait là un mystère totalement incompréhensible et le fait que les mathématiques puissent servir à tant de choses constituerait un perpétuel miracle. Nous nous proposons de montrer que la contradiction affirmée par le texte de la composition résulte dans une large mesure d'une méconnaissance de la nature et de la genèse des mathématiques.

II. LES NOMBRES. — Les mathématiques ont essentiellement pour objet l'étude de deux sortes d'êtres de pensée : les êtres numériques et les êtres géométriques. Ces entités ne sont pas créées de rien, et gratuitement par l'esprit de l'homme, elles sont suggérées par l'expérience physique. Nous allons le montrer en examinant d'abord les êtres numériques, puis les êtres géométriques.

Les être numériques comprennent les diverses sortes de nombres, puis d'autres êtres résultant des combinaisons des premiers (expressions algébriques, fonctions, équations, intégrales, etc...). Nous nous contenterons ici d'examiner les notions fondamentales concernant les nombres.

Nombres arithmétiques ou absolus. — L'idée originelle du nombre arithmétique est celle du numéro d'ordre qui se trouve fourni immédiatement par la succession indéfinie de points sur une ligne ou de signaux sonores dans le temps. L'humanité au cours de son évolution a eu quelque peine à passer de la notion ordinale à celle du nombre cardinal qui correspond à la quantité des objets d'une collection. C'est là une constatation psychologique qui s'impose à tous ceux qui s'occupent de l'initiation enfantine aux premiers éléments du calcul. Comment se fait ce passage ? Considérons une collection d'objets qu'il s'agit de dénombrer. A cet effet on numérote les objets de cette collection en les prenant dans un ordre quelconque et l'on constate expérimentalement que le rang du dernier des objets ainsi numérotés reste le même quel que soit l'ordre dans lequel on a choisi les objets. C'est cette *invariance* du rang qui fournit la notion du nombre cardinal d'une collection. Cette notion, une fois acquise, apparaît une nouvelle idée : celle de la possibilité de continuer indéfiniment à édifier la suite naturelle des nombres cardinaux. Cette idée se précise par le principe d'induction complète dans lequel Henri Poincaré voyait un des instruments essentiels du raisonnement mathématique. Ces notions, une fois élaborées, on peut évidemment prétendre qu'elles constituent des éléments de notre pensée, antérieurs à toute expérience, mais il m'a paru indispensable de rappeler les expériences qui sont à la base de cette élaboration.

Un nouveau stade de la genèse des nombres est celle des fractions. Là encore, l'histoire du calcul montre que cette notion ne s'est dégagée que très lentement en commençant par des fractions particulièrement simples, telles que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc... Il a fallu beaucoup de millénaires pour arriver à la notion générale de fraction et ce n'est

qu'il y a moins de deux siècles qu'on est parvenu à appréhender complètement cette notion en dépouillant la fraction de tout caractère de « choses » (ou fraction de grandeur) et en la regardant comme l'indicateur d'une opération (1) (opérateur) que l'on doit faire subir à une grandeur. Le nombre entier et la fraction apparaissent ainsi comme des outils de la pensée complétant les outils matériels que l'homme a inventés successivement au cours de son évolution.

Une nouvelle étape a été constituée par la création des nombres irrationnels, mais il ne s'agit plus là d'une conquête d'origine expérimentale, ou plutôt il ne s'agit plus d'expériences faites dans le monde des êtres physiques, mais dans le monde des êtres mathématiques déjà créés. Le problème de la racine carrée ou du rapport de la diagonale au côté du carré a conduit à l'invention de $\sqrt{2}$. Plus généralement la nécessité qui s'impose à l'esprit d'énoncer des résultats généraux et toujours valables, l'a obligé à définir l'ensemble des irrationnels arithmétiques ; là encore, ce n'est que très tardivement que la notion générale en a été pleinement élaborée dans le courant du XIX^e siècle en aboutissant à la notion de coupure, c'est-à-dire d'un mode de répartition des nombres rationnels en deux classes. Cette notion des nombres irrationnels ne peut d'ailleurs aucunement se rencontrer dans le monde physique, car les mesures physiques ne sont susceptibles par nature que d'une approximation limitée, ce qui exclut dans ce domaine toutes les considérations développées à propos des irrationnels.

Nombres algébriques ou relatifs. — Les mathématiciens grecs n'ont pas dépassé le stade des nombres arithmétiques. Ce n'est qu'au cours du Moyen Age et au début des Temps Modernes qu'ont été élaborées peu à peu de nouvelles espèces de nombres ; encore du temps de Descartes, les nombres négatifs étaient qualifiés de « fausses racines ». Là encore, les notions nouvelles auxquelles on a été conduit, n'ont acquis un sens parfaitement clair que par la notion d'opérateur, appliquée à des grandeurs susceptibles de deux sens différents, tels que parcours horizontaux ou verticaux, recettes et dépenses, etc... La règle des signes de l'addition algébrique exprime évidemment les lois de composition, de montée et de descente successives, ou de recettes et de dépenses. De ce point de vue, il ne serait pas nécessaire d'utiliser les signes indiquant l'addition ou la soustraction arithmétique. Mais l'observation des lois de combinaison de ces derniers signes dans des suites d'additions et de soustractions, a conduit à les considérer à la fois comme des signes d'opération et comme signes distinctifs des deux espèces de nombres relatifs.

La multiplication des nouveaux nombres ainsi créés, se définit par un procédé analogue à celui qui conduit à la multiplication des fractions. Dans les deux cas, il s'agit de remplacer deux multiplicateurs, agissant, successivement, par un multiplicateur unique produisant le même effet. Dans le cas des nombres relatifs, il suffit de distinguer le rôle du multiplicateur positif et du multiplicateur négatif, celui-ci changeant le sens de l'élément orienté auquel il s'applique. On est ainsi conduit à la règle des signes de la multiplication algébrique et le résultat coïncide avec ceux déduits de la considération des produits de sommes et de différences arithmétiques. Malheureusement, dans la pratique courante de l'enseignement, on se borne le plus souvent à dire aux élèves que les nombres sont des « symboles » dont les lois de composition satisfont par définition à des règles données *a priori* comme si elles étaient tombées du ciel et sans qu'on dise d'ailleurs ce que symbolisent ces symboles. On comprend, dans ces conditions, que beaucoup de gens se fassent des mathématiques une idée fallacieuse.

Nombres complexes. — Bornons-nous à indiquer que la création au XVI^e siècle des nombres complexes que l'on s'obstine trop souvent encore à qualifier d'imaginaires et même de quantités imaginaires, relève de considérations analogues aux

(1) Le mot « opération » a ici un sens concret ou matériel et non numérique.

précédentes. On doit toutefois reconnaître ici que l'expérience qui a conduit à leur invention fut, à l'origine, tout à fait étrangère à la considération d'opérations sur des grandeurs : il s'agissait uniquement de constatations en apparence mystérieuses dans lesquelles l'introduction du symbole $\sqrt{-1}$, qui paraissait dénué de toute signification, conduisait à des conséquences parfaitement valables pour les nombres déjà connus. C'est pourquoi leurs inventeurs les appelaient des quantités sophistiques, idée qui se trouve conservée dans une certaine mesure par le qualificatif « imaginaire ».

Si on désigne par i l'indicateur d'une rotation d'un angle droit dans le plan, l'égalité $i^2 = -1$ signifie tout simplement que deux rotations successives d'un angle droit dans le même sens produisent le même effet qu'une rotation de π , c'est-à-dire qu'une multiplication par -1 . Dans ces conditions, l'égalité $i = \sqrt{-1}$ cesse de revêtir un aspect absurde ou contradictoire. Ce n'est pas en effet dans l'ensemble des nombres relatifs que cette égalité est posée, mais dans l'ensemble des nombres nouveaux qui viennent d'être définis. On comprend alors immédiatement comment ces symboles prétendus imaginaires peuvent intervenir dans des questions concrètes telles que l'étude des courants alternatifs : un mouvement périodique sinusoïdal résultant de la projection d'un mouvement circulaire uniforme, on est conduit tout naturellement à l'introduction d'indicateurs de rotation.

Propriétés des opérations sur les nombres. — Les propriétés commutatives et associatives de l'addition des nombres entiers ne font qu'exprimer les propriétés des collections d'objets. Ces propriétés, ainsi que celles de la multiplication, peuvent s'étendre par raisonnement logique aux autres nombres arithmétiques, algébriques et complexes. On peut aussi regarder ces propriétés comme traduisant les propriétés géométriques des segments rectilignes et des vecteurs. On voit ainsi apparaître une corrélation très étroite entre le domaine numérique et le domaine géométrique que nous allons maintenant examiner.

III. LES ÊTRES GÉOMÉTRIQUES. — Les êtres géométriques fondamentaux sont les points, les lignes, les surfaces, les portions d'espace ou volumes. A partir de ces êtres, les géomètres en considèrent ensuite d'autres plus abstraits, tels que vecteurs, ensembles ponctuels, transformations, groupes, etc..., dont nous ne nous occupons pas.

Points, lignes, surfaces et volumes ont leur origine dans le monde matériel, mais les concepts des mathématiciens résultent d'une abstraction faite à partir des objets naturels. Cette abstraction consiste essentiellement à réduire à zéro les dimensions suffisamment faibles, telles que l'épaisseur d'une feuille, ou d'un fil, ou d'un grain de poussière. En outre, l'expérience ne nous offre que des objets finis ou limités, alors que notre esprit conçoit la ligne droite ou le plan comme infinis. Nous reviendrons plus loin sur cette question de l'infini mathématique, qui a déjà été rencontrée à propos de la suite naturelle des entiers. Les êtres mathématiques dont nous venons de parler sont doués de propriétés qui les distinguent les uns des autres et à partir desquelles le raisonnement permet d'en déduire d'autres. Ainsi la ligne droite est déterminée par deux points, elle partage le plan en deux régions, etc... L'ensemble de ces propriétés constitue les axiomes de la géométrie. Leur énumération complète nous entraînerait beaucoup trop loin. Nous reviendrons plus loin sur cette question de l'axiomatique.

L'origine de ces axiomes et postulats est certainement d'ordre expérimental : ainsi les propriétés de la ligne droite résultent des propriétés d'un fil tendu, d'un rayon lumineux, d'un axe de rotation ou de glissement. Mais, bien entendu, comme les êtres mathématiques n'existent pas dans la nature, mais seulement dans notre esprit, leurs propriétés ne sont vérifiables dans la pratique qu'avec une certaine approximation et dans certaines limites. Ainsi, quand nous disons : « Par deux points il passe une ligne droite et une seule », cet énoncé dépasse infiniment l'expérience,

d'une part, parce que nous ne pouvons pas réaliser physiquement de véritables lignes droites, d'autre part, parce que toute vérification est impossible pour deux points très éloignés. Les axiomes sont donc *suggérés* par l'expérience.

On s'est imaginé, pendant de longs siècles, que ces axiomes constituaient des « vérités éternelles » issues de l'esprit de Dieu, ce Dieu qui géométrise toujours, comme le pensaient les géomètres et les philosophes grecs. C'est ainsi que l'axiome ou postulat d'Euclide relatif aux droites parallèles était regardé comme une vérité indiscutable. Au début du XIX^e siècle, Gauss, qui avait pressenti son véritable caractère, n'osa pas publier ses idées sur ce sujet par peur de provoquer un scandale. Ce ne fut qu'un peu plus tard que plusieurs géomètres édifièrent des géométries non euclidiennes qui niaient l'axiome des parallèles en développant les conséquences de cette négation, où, à aucun moment, aucune contradiction n'apparaissait. La question fut complètement élucidée à la fin du XIX^e siècle et on se convainquit clairement que le postulat d'Euclide était logiquement indépendant des autres axiomes de la ligne droite : sans cet axiome le concept de ligne droite n'est pas entièrement déterminé. En définitive, le rôle des axiomes est maintenant apparu en pleine lumière : bien qu'ils soient d'origine expérimentale, ils ne constituent, ni des vérités physiques, ni des vérités abstraites, mais la *définition* même des êtres auxquels ils s'appliquent.

Toutefois, si l'on se réfère à l'origine expérimentale de ces propriétés et aux possibilités de faire à leur sujet des vérifications relativement précises, on peut envisager la géométrie, non pas comme une science abstraite, mais comme une sorte de théorie physique de l'espace. Le point d'aboutissement actuel de cette façon de voir est la Théorie de la Relativité générale d'Einstein.

Un ensemble fondamental d'axiomes d'origine expérimentale concerne les propriétés du mouvement des figures invariables — on a été amené à poser le postulat de l'existence de figures dites invariables pouvant se déplacer dans l'espace vide. Ce sont ces postulats que l'on admet implicitement au début de la géométrie quand on établit, par exemple, les cas d'égalité des triangles et les propriétés du triangle isocèle. A ce propos, certains mathématiciens ont prétendu que les démonstrations géométriques étaient de véritables expériences que l'on imaginerait sans les effectuer réellement. Cette façon de voir peut convenir à une première initiation géométrique, mais elle doit être ensuite abandonnée : une fois les postulats du mouvement énoncés (avec référence à l'expérience physique), les démonstrations perdent leur caractère expérimental et sont justiciables de la seule logique déductive.

On peut en dire autant des « expériences graphiques » qui peuvent suggérer aux élèves les axiomes de géométrie de situation, et permettre de prévoir certaines propriétés élémentaires. Mais, dès que les figures se compliquent, la vérification devient de plus en plus précaire ; ainsi la figure formée par les six bissectrices d'un triangle, trois à trois concourantes aux centres des quatre cercles, tangents aux trois côtés. Le tracé de ces quatre cercles eux-mêmes et celui du cercle d'Euler, qui doit être tangent aux quatre précédents, alors qu'il passe déjà par neuf points remarquables, soulève des difficultés très sérieuses d'exécution, et c'est même une excellente occasion de montrer la nécessité du raisonnement déductif. Il n'y a donc pas lieu, à mon avis, d'insister comme on le fait souvent sur les connaissances empiriques que possédaient en géométrie les Egyptiens, les Chaldéens et les Hindous, et sur la signification même du mot géométrie. Il ne s'agit pas du tout d'une science expérimentale, mais d'une science déductive née du « miracle grec », qui introduisit entre les faits géométriques une cohérence et un enchaînement logiques.

IV. L'INFINI ET LA CONTINUITÉ. — Nous avons à deux reprises mentionné l'introduction de la notion d'infini. Expérimentalement, il s'agit uniquement de la possibilité de continuer indéfiniment la même opération telle que la répétition d'un signal ou le prolongement d'une ligne droite ou d'une surface plane. La réalité ne nous offre, bien entendu, dans ce domaine, que des possibilités limitées et c'est notre esprit qui se trouve amené à concevoir une continuation indéfinie.

« L'axiome d'Archimède », qui affirme qu'on peut trouver un multiple d'un segment S , qui soit supérieur à tout autre segment S' , est évidemment suggéré par les considérations précédentes, mais on s'est rendu compte que toute vérification expérimentale résultait d'une illusion comme le montre l'exemple célèbre d'Henri Poincaré relatif à des êtres intérieurs à une sphère de rayon fini, mais où la température absolue tend vers 0 au voisinage de la surface limite : les pas qu'ils font en se rapprochant de cette surface diminuant sans cesse, tout se passe pour eux comme s'ils étaient dans un monde infini.

Les développements de la Théorie de la Relativité ont de même conduit à l'idée d'un univers courbe et fini, mais sans frontière dans lequel la lumière décrirait des trajectoires fermées, conception qui s'oppose à notre habitude intuitive d'un espace infini, et pour laquelle nous manquons tout à fait de représentations concrètes.

La notion de continuité est aussi d'origine expérimentale, mais l'expérience ne nous la fournit que par suite d'un manque de finesse de nos perceptions. En réalité nous savons maintenant que toute matière est discontinue et l'hypothèse des quanta étend cette discontinuité à l'énergie elle-même. Par suite, le monde physique est essentiellement discontinu, et cependant notre structure psychologique conduit notre esprit à poser la continuité des êtres géométriques comme une propriété essentielle, constituant « l'axiome de continuité ». Là encore, il y a suggestion de l'expérience, mais non pas vérification expérimentale.

Il est à remarquer d'ailleurs que contraints ainsi à introduire la continuité dans leurs concepts, les mathématiciens ont été amenés, ainsi que nous l'avons déjà signalé à propos des nombres irrationnels, à créer le continu mathématique qui ne réalise que très imparfaitement l'image de la continuité physique, car sur un segment de droite les points d'abscisses rationnelles et irrationnelles apparaissent nécessairement comme des individualités distinctes les unes des autres.

V. LE MONDE DES ÊTRES MATHÉMATIQUES. — Les êtres mathématiques, une fois définis par l'ensemble des axiomes, apparaissent souvent aux mathématiciens comme un univers existant par lui-même en dehors de l'homme et où le mathématicien, tel un explorateur, découvre sans cesse des vérités nouvelles. Telle était notamment l'attitude du mathématicien français Charles Hermite, qui était pénétré d'une sorte de mysticisme religieux devant le monde mathématique. Il y a certainement là beaucoup d'illusions, et les combinaisons des êtres mathématiques entre eux et les êtres nouveaux, dont les mathématiciens se proposent l'étude, sont en réalité des inventions bien plus que des découvertes. L'harmonie incontestable qui se révèle dans ce domaine n'est pas une harmonie préétablie ; en réalité, elle résulte du fait que les combinaisons, qui se sont révélées infécondes, ou les vues intuitives qui se sont révélées inexactes, ont été abandonnées au cours de l'évolution plusieurs fois millénaire de la pensée mathématique ; par suite, ce qui a subsisté, fournit naturellement cette impression d'harmonieuse unité.

Il y a en effet des rapports très étroits entre les diverses parties des mathématiques, même si elles paraissent très éloignées les unes des autres. Notamment, les propriétés des êtres numériques et celles des êtres géométriques sont étroitement liées et apparaissent souvent comme des aspects différents d'une réalité unique. Il n'y a là, en vérité, rien de mystérieux, puisque c'est l'esprit de l'homme qui a inventé et combiné ces divers êtres en passant alternativement d'un point de vue à l'autre. Un exemple remarquable de ces liaisons étroites est fourni par H. Poincaré dans sa conférence sur « l'invention mathématique », où il signale comment lui est apparue brusquement, à la suite d'un travail inconscient, l'analogie profonde entre la géométrie non euclidienne et les fonctions appelées « thétafuchsiennes ».

Ce n'est pas seulement entre les nombres et les figures géométriques qu'apparaissent des liens étroits, mais aussi entre la Physique et les Mathématiques. Tantôt c'est la physique qui précède l'invention mathématique, en posant aux mathémati-

ciens des problèmes dont la solution conduit à de nouvelles inventions : telle fut, par exemple, la théorie des séries trigonométriques, provoquée par l'étude des phénomènes vibratoires. Inversement, certaines théories mathématiques, en apparence purement abstraites et sans application au monde extérieur, trouvent à certains moments leurs applications : ainsi les sections coniques, étudiées par les géomètres grecs de l'antiquité, furent utilisées par Képler dans son étude du mouvement de la planète Mars. De même, Einstein, pour développer sa théorie de la Relativité générale, fut amené à utiliser le calcul différentiel absolu et la théorie des tenseurs inventés antérieurement à toute application.

Dans le domaine de la Physique mathématique, qui, à certains égards, peut être rattachée aux mathématiques pures, il peut arriver souvent que la théorie ait précédé toute expérience. En voici trois exemples particulièrement célèbres : la théorie de Maxwell le conduisit à prévoir l'existence d'ondes électromagnétiques qui furent ensuite réalisées physiquement par Hertz ; la théorie de la Relativité restreinte conduisit Einstein à prévoir la variation de la masse avec la vitesse et l'équivalence de la masse et de l'énergie, ce qui fut ensuite vérifié expérimentalement, et, exemple particulièrement saisissant, la théorie de la Mécanique ondulatoire, créée tout d'abord par Louis de Broglie, comme une simple spéculation mathématique, conduisit à prévoir la diffraction des électrons, qui fut ensuite vérifiée par des physiciens américains et amena l'invention du microscope électronique. Ainsi apparaît constamment un accord étroit entre les spéculations abstraites de l'esprit humain et les résultats physiques.

VI. LES AXIOMES ET L'AXIOMATIQUE. — Nous avons déjà signalé que la véritable définition des êtres mathématiques résidait dans les axiomes dont nous avons indiqué l'origine expérimentale. Il est naturel que dans un souci de clarté et de rigueur logique, toute trace de cette origine soit effacée et que les mathématiciens cherchent à construire un édifice totalement abstrait basé sur l'ensemble des axiomes. Cela nécessite d'abord l'étude de l'ensemble de ces axiomes, de leur indépendance ou de leur dépendance logique ; cette œuvre, qui fut entreprise d'abord par Hilbert, est ce qu'on appelle l'axiomatique.

Dans cette perspective, les mathématiques apparaissent comme un jeu parfaitement logique et parfaitement arbitraire où, suivant la boutade de Bertrand Russel, « on ne sait jamais de quoi l'on parle, ni si ce qu'on dit est vrai ». Mais ce n'est là qu'une apparence dont il convient de ne pas être dupe ; sans les bases expérimentales sous-jacentes, il n'y aurait effectivement là qu'un jeu sans signification et qui ne conduirait d'ailleurs à aucune découverte nouvelle ; cette reconstruction après coup n'est qu'une réflexion rétrospective sur ce qui est déjà inventé et connu.

Il me paraît donc tout à fait regrettable et dangereux que des professeurs, mus par des préoccupations fort louables, mais maladroites, songent à introduire, dès l'Enseignement Secondaire, des exposés axiomatiques. En procédant ainsi, ils risquent de faire complètement méconnaître aux élèves la véritable nature des mathématiques, à les couper de toute leur évolution historique, à laisser ignorer le rôle des mathématiciens créateurs. Conséquence plus grave encore, ils risquent d'amener les élèves à se figurer naïvement que par un jeu purement verbal, on puisse aboutir à des résultats utilisables, en rapport avec la réalité. C'est ainsi que, en toute bonne foi, certains philosophes ont pu croire que les mathématiques reposaient sur « de pures conceptions de l'esprit ».

VII. ÉLÉMENTS PRÉEXISTANTS A L'EXPÉRIENCE. — Dans ce qui précède, nous nous sommes efforcés de montrer que, dans une très large mesure, les mathématiques procédaient d'une donnée expérimentale préalable. Toutefois nous avons mis en garde contre des vues trop simplistes qui feraient des mathématiques une simple science expérimentale. Nous voudrions signaler pour terminer qu'il paraît exister certains domaines où on aperçoit difficilement une origine expérimentale antérieure

au développement mathématique. Nous avons d'ailleurs mentionné déjà plus haut certains exemples de ces faits, tels que les théories de Maxwell, d'Einstein, de de Broglie. Un autre exemple, très digne d'être médité est celui du calcul des probabilités : il semble bien que le concept de probabilité ait été créé par Pascal par une voie purement logique, abstraction faite de toute expérience, et cependant on est bien obligé de constater que la réalité extérieure s'accorde étroitement avec les déductions *a priori* du calcul des probabilités. Ainsi, la fréquence de la répétition d'un phénomène est de plus en plus voisine de la probabilité calculée *a priori* quand le nombre des épreuves devient très grand. On a souvent fait remarquer que les bénéfices faits par les compagnies d'assurances sur la vie, constituent une preuve particulièrement tangible de la validité des raisonnements et des calculs des actuaires. De même, la loi des écarts représentée par la « courbe en cloche » de Gauss se vérifie avec une très grande précision dans des cas extrêmement nombreux ; il est vrai que dans cet exemple, on ne sait trop si cette loi des erreurs résulte de l'expérience ou du raisonnement.

Bien des mathématiciens ont signalé entre la réalité physique et le monde mathématique un « accord mystérieux » suivant l'expression qu'emploie M. Emile Borel dans la préface de son livre sur « les paradoxes de l'Infini ».

Mais, même sans chercher d'autres exemples, une remarque essentielle s'impose à la réflexion. Toute la valeur de l'édifice mathématique repose sur la logique déductive. Cette logique s'impose à notre esprit avec une certitude qui paraît présenter un caractère absolu ; la distinction entre un raisonnement juste et un raisonnement faux est tout à fait indépendante des résultats auxquels ils conduisent, car il est bien connu qu'un raisonnement faux peut conduire à un résultat exact.

Les mathématiciens contemporains ont été amenés à introduire des notions tout à fait générales, celles de transformations, de groupes, d'ensembles, de corps, etc... où la nature des éléments sur lesquels on raisonne n'est pas précisée, mais seulement « les lois de composition » auxquelles ces éléments sont obligés d'obéir. On se trouve transporté ainsi dans un domaine assez surprenant où un raisonnement purement abstrait conduit à des conclusions qui peuvent ensuite être vérifiées dans de nombreux domaines particuliers, par exemple, les propriétés des groupes de substitution et celles de certains groupes de transformations géométriques sont logiquement équivalentes. Ainsi les propriétés des substitutions de quatre lettres ne se distinguent pas logiquement des propriétés des rotations et des symétries qui transforment en lui-même un tétraèdre régulier.

On ne peut donc soutenir que, dans ces domaines, les mathématiques soient une science expérimentale. Quelle est la nature véritable des conclusions auxquelles de telles spéculations aboutissent ? Il semble bien que ce que l'on atteint ainsi ce sont les lois mêmes de notre structure mentale.

Ainsi la question posée par le texte qui nous a servi de point de départ n'est pas entièrement résolue par les considérations qui précèdent et une explication reste à élaborer. Ce n'est plus au mathématicien d'y répondre, mais au philosophe.

Dans quelles directions est-il possible de chercher une explication ? Pour ma part, j'en aperçois deux que je me bornerai à indiquer sommairement.

Si on se place dans l'hypothèse évolutionniste, d'après laquelle l'homme actuel est le produit d'une évolution animale qui s'est poursuivie sur la terre depuis des centaines de millions d'années, notre logique, comme toutes nos facultés intellectuelles et affectives est un produit de cette évolution ayant enregistré les enseignements fournis par le contact avec le milieu extérieur. L'accord constaté entre logique, mathématique et physique, paraît alors perdre son caractère mystérieux. Mais d'autres difficultés beaucoup plus graves, sans doute, apparaissent, car la conception d'une évolution due uniquement au jeu aveugle des lois du hasard et qui cependant manifeste incontestablement un progrès orienté est difficilement pensable.

Reste la conception d'un Dieu créateur et ordonnateur de l'univers. Dans cette hypothèse « l'accord mystérieux » trouve tout naturellement son explication. Mais il n'est pas besoin de faire remarquer qu'un mystère de détail se trouve alors expliqué par un mystère beaucoup plus vaste et que, pour beaucoup d'esprits, la difficulté n'a fait que reculer.

M. WEBER,

professeur honoraire au Lycée Condorcet.