

Rapport sur la composition de Mathématiques
(classe de Mathématiques)
au Concours général des Lycées, Collèges et Ecoles normales en 1952

Le Jury était composé de MM. ROBERT, Inspecteur général, Président ; CHAZAL, professeur au Lycée Saint-Louis (classe préparatoire à l'Ecole Normale Supérieure) ; Mme DUBOIS-VIOLETTE, professeur au Lycée de Sèvres ; MM. MAGNIER, professeur au Lycée Saint-Louis (Navale) ; RAMIS, professeur au Lycée Jean-Baptiste-Say (Ingénieurs de la Marine) ; RICHE, professeur au Lycée Saint-Louis (classe préparatoire à l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud).

ANALYSE DU SUJET (1)

Deux cercles (C) et (C') d'un même plan (P) ont le même centre O et des rayons R, R', tels que $R > R'$. Deux demi-droites opposées d'origine commune O coupent ces cercles (C) et (C') en A et B : une demi-droite d'origine O distincte des précédentes coupe (C) en E et (C') en F.

Les cercles (S) et (T) décrits respectivement sur AB et EF comme diamètres, sont ainsi tangents à (C) et (C'), mais appartiennent aux deux familles différentes des cercles tangents à (C) et (C').

La partie I du problème était l'étude des points d'intersection des cercles (S) et (T). Paragraphe 1^{er}. — Les triangles BOF, AOE sont isocèles : $OB = OF = R'$.

$OA = OE = R$. Donc BF est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $\widehat{BOF}$, et AE est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $\widehat{AOE}$. Ces bissectrices d'angles adjacents supplémentaires sont perpendiculaires. Les droites BF et AE le sont donc aussi ; leur point de rencontre M est tel que, de ce point, les segments AB et EF sont vus sous des angles droits : *M est donc commun aux cercles (S) et (T).*

Les centres respectifs S et T de ces cercles sont les milieux de AB et EF ; notons que $OS = \frac{R - R'}{2}$, $OT = \frac{R + R'}{2}$ et que les rayons pour (S) et (T) respectivement sont $\frac{R + R'}{2}$ et $\frac{R - R'}{2}$.

Les cercles (T) et (C) tangents en E sont homothétiques par rapport à ce point : les points M et A, alignés avec E, sur ces cercles, sont homothétiques et les rayons $\overrightarrow{TM}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont parallèles (de même sens). De même, les cercles (S) et (C') tangents en B sont homothétiques par rapport au point B, les points M et F, alignés avec B sont homothétiques et les rayons $\overrightarrow{SM}$ et $\overrightarrow{OF}$ sont parallèles (de même sens). *Le quadrilatère OSMT, dont les côtés opposés sont parallèles, est un parallélogramme.* D'ailleurs, on a déjà reconnu que les côtés opposés y sont égaux, ce qui n'eût pas suffi pour obtenir cette conclusion.

Le second point de rencontre N des cercles (S) et (T) est symétrique du premier M par rapport à la droite des centres ST de ces cercles, ou encore homothétique par rapport à M, dans le rapport $+2$, de la projection de M sur ST ; c'est encore la projection de M sur la droite homothétique de ST dans cette homothétie.

Le centre λ de symétrie du parallélogramme OSMT a pour homothétique le point O, car $\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{M\lambda}$. N est la projection de M sur la parallèle à ST menée par O, donc l'angle $\widehat{ONM}$ est droit.

Il n'est pas sans intérêt d'observer que les points M' et M'', diamétralement

(1) Voir le texte Bulletin n° 149, pages 292 et 293.

opposés à M, dans les cercles respectifs (T) et (S), sont situés sur la droite ON, puisque $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MT}$, $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{MS}$.

Elevons en M la perpendiculaire à MN, droite parallèle à NO ; elle se déduit de NO par la translation de vecteur $\overrightarrow{M'M}$, lequel vecteur est double de $\overrightarrow{OS}$; donc cette perpendiculaire coupe la droite AB en un point O' tel que $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OS}$, c'est le symétrique de O par rapport à S, et il est tel que l'angle $\widehat{O'MN}$ est droit.

Le faisceau de quatre droites (OM, ON ; OS, OT) est harmonique, car OT coupe en son milieu T le segment MM' parallèle à OS, dont les extrémités M et M' sont sur les rayons OM, ON. On le verrait aussi en remarquant que OM coupe en son milieu λ le segment ST parallèle à ON.

Paragraphe 2°. — Observons d'abord que M et N sont distincts, sauf si les droites de même direction O'M, ST, ON, viennent à coïncider, ce qui ne se produit que sur la droite AB. M devrait pour cela coïncider avec A ou B et la demi-droite OFE devrait coïncider avec l'une des demi-droites OA et OB ; ce cas a été exclu par l'énoncé.

On peut considérer, dans (P) la similitude directe transformant E en F et A en B. Elle existe et est bien déterminée, car E est distinct de A et F distinct de B. Elle transforme le vecteur $\overrightarrow{EA}$ en le vecteur $\overrightarrow{FB}$ (vecteurs non nuls). L'angle de cette similitude $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{FB})$ est, en valeur absolue de $\frac{\pi}{2}$. Le centre de cette similitude

est le sommet d'un angle droit dont les côtés contiennent chacun un des points homologues E, F ; ce centre est donc situé sur le cercle (T) ; en considérant de même les points homologues A, B, on voit qu'il est aussi situé sur le cercle (S). Ce centre ne peut être que l'un des points M et N. Ce ne peut être M, point commun aux droites homologues EA et FB, que l'on voit être intérieur au segment EA et extérieur au segment homologue FB [M est, comme (T), intérieur à (C) et extérieur à (C')]. Le centre de la similitude directe considérée est donc N.

Les angles $(\overrightarrow{NE}, \overrightarrow{NA})$ et $(\overrightarrow{NF}, \overrightarrow{NB})$ sont homologues, donc ont même mesure à $2k\pi$ près : $(\overrightarrow{NE}, \overrightarrow{NA}) = (\overrightarrow{NF}, \overrightarrow{NB}) \bmod{2\pi}$ (1). D'autre part, le rapport des segments NA et NE est égal au rapport des segments homologues NB et NF :

$$\frac{NA}{NE} = \frac{NB}{NF} \quad (2).$$

De ces deux relations, l'une (1) angulaire, l'autre (2) métrique, résulte que N est aussi le centre d'une nouvelle similitude directe transformant E en A, et F en B, donc transformant le vecteur $\overrightarrow{EF}$ en le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

L'angle de cette nouvelle similitude est $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB})$ à $2k\pi$ près, donc

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{NE}, \overrightarrow{NA}) &= (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB}) \bmod{2\pi} \quad (1'), \\ (\overrightarrow{NF}, \overrightarrow{NB}) &= (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB}) \bmod{2\pi} \quad (1''). \end{aligned}$$

On reconnaît aussitôt que $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA}) \bmod{2\pi}$
et que $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OB}) + \pi \bmod{2\pi}$.

Les relations (1') et (1'') deviennent $(\overrightarrow{NE}, \overrightarrow{NA}) = (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA}) \bmod{2\pi}$,
 $(\overrightarrow{NF}, \overrightarrow{NB}) = (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OB}) + \pi \bmod{2\pi}$

et nous apprennent que les cercles OAE, OBF passent par N. Mais de manière plus précise, O et N sont dans le premier cercle, sur le même arc limité à A et E, et dans le second cercle, sur des arcs différents limités à B et F. Bref, O et N sont du même côté de la droite AE, et de part et d'autre de la droite BF.

O étant situé sur les médiatrices de AE et BF est au milieu de chacun des arcs,

d'extrémités (A, E), et (B, F) qui le contient ; il s'ensuit que la droite NO est bissectrice extérieure en N du triangle NEA et qu'elle est bissectrice intérieure en N du triangle NBF.

Enfin les deux cercles OAEN, OBFN ont comme rayons respectifs en O les médiatrices de AE et BF : ils sont donc *orthogonaux*.

Revenons aux relations : $(\vec{NE}, \vec{NA}) = (\vec{NF}, \vec{NB}) \bmod{2\pi}$ (1)

$$\frac{NA}{NE} = \frac{NB}{NF} \quad (2)$$

pour en donner une nouvelle interprétation. La forme $(\vec{NE}, \vec{NA}) = -(\vec{NB}, \vec{NF})$ indique qu'il existe une symétrie par rapport à une certaine droite (D) passant par N, qui échange les demi-droites (d'origine N) NE et NB, NA et NF, (D) peut être déterminée, à volonté, comme support de la bissectrice de l'angle saillant de NE, NB, ou comme support de la bissectrice de l'angle saillant de NA, NF. La proportion (2) prend la forme $NA.NF = NB.NE$. Désignons par k^2 la valeur commune de ces deux produits, k étant la mesure d'une certaine longueur.

Il résulte de là que l'opération $(\mathcal{C})$, produit de la symétrie d'axe (D) par l'inversion de pôle N et de puissance k^2 échange les points B et E, A et F, d'une façon immédiate.

Cette opération $(\mathcal{C})$ est *réci-proque* : si elle transforme un point m du plan (P) (ou même de l'espace) en un point m' , c'est que le symétrique m_D de m par rapport à D a pour inverse dans l'inversion (N, k^2) le point m' , mais aussi bien le symétrique m'_D de m' par rapport à D a pour homologue dans cette inversion le point m .

Étudions l'effet de $(\mathcal{C})$ sur les droites EF et AB, qui se coupent en O. $(\mathcal{C})$ échange la droite EF avec un certain cercle passant par le pôle N de l'inversion : les homologues de E, F dans $(\mathcal{C})$ étant B, A, c'est le cercle NAB, c'est-à-dire (S). De même $(\mathcal{C})$ échange la droite AB avec le cercle NEF, c'est-à-dire (T).

L'homologue de O par $(\mathcal{C})$ est un point commun à (S) et (T), qui ne peut être N, lequel n'a pas d'homologue à distance finie dans $(\mathcal{C})$: c'est donc M. $(\mathcal{C})$ échange, encore, les points O et M.

Paragraphe 3^e. — On suppose O, A, B fixes dans le plan fixe (P) et la demi-droite OFE variable. (S) reste fixe, (T) est variable.

Le lieu de M est le cercle (S) en entier : car à tout point M_1 de ce cercle (supposé d'abord distinct de A et B) correspondent, un point E intersection de AM_1 (autre que A) avec (C), une demi-droite OE, un point F de (C'), donc un cercle (T) de diamètre EF, puis un point M défini par l'intersection de AE et BF : M est commun à la droite AE et au cercle (S), et est intérieur au segment AE, il s'identifie dès lors avec M_1 , et M_1 est un point du lieu considéré.

Lorsque la demi-droite OFE tend vers OA, ou OB, M tend vers A, ou B, et il convient d'incorporer, à titre limite, les points A et B comme points du lieu, pour que ce lieu soit identique à (S), propriété annoncée.

L'enveloppe de la droite MN s'identifie alors à celle du second côté de l'angle droit $O'MN$, dont le premier côté $O'M$ passe par le point fixe O' et dont le sommet M a pour lieu le cercle (S) : cette enveloppe est donc l'ellipse (ϵ) ayant ce cercle comme cercle principal et O' comme foyer : elle a comme sommets d'axe focal les points A et B, son autre foyer est O (intérieur au segment AB) : son demi-grand

axe est de longueur $\frac{R+R'}{2}$; sa demi-distance focale est $OS = \frac{R-R'}{2}$; son demi-

petit axe a pour longueur $\sqrt{RR'}$, car $\left(\frac{R+R'}{2}\right)^2 = \left(\frac{R-R'}{2}\right)^2 + (\sqrt{RR'})^2$.

Cherchons à caractériser le point de contact H de MN avec l'ellipse (ϵ) : c'est le centre d'un cercle (H) passant par O' et tangent au cercle directeur de (ϵ) , de centre O, au point μ symétrique de O' par rapport à M. H est sur la droite $O\mu$.

M étant le milieu du segment $O\mu$, parallèle à la droite ON, le faisceau de quatre droites (OM, ON ; $O\mu$, OO') est harmonique. Coupons-le par la droite MN, en appelant K le point de rencontre, à distance finie ou à l'infini, de MN avec AB : la division de quatre points (M, N ; H, K) est harmonique. Ainsi H peut être considéré comme le conjugué harmonique de K par rapport à M et N.

Mais on a vu (1°) que le faisceau (OM, ON ; OT, OS) est harmonique. Comme OS n'est autre que OO' le rapprochement de ce résultat avec le précédent montre que les droites $OH\mu$ et OT sont confondues ; H est donc point de rencontre de la droite OFTE avec MN.

L'ellipse (ϵ) est intérieure à son cercle principal (S), donc H est sur le segment MN, dès lors est intérieur, en général, à (T). H est donc aussi intérieur, en général, au segment EF. Quand M est en A ou B, M, N, H sont confondus (cas limites où H vient se confondre avec E ou F).

II^e partie du problème. — 1° Dans l'espace on considère les sphères (σ) et (τ) ayant respectivement (S) et (T) comme grands cercles, et leur cercle (Γ) d'intersection. Ce cercle (Γ) est orthogonal au plan (P) aux points M et N.

Son plan est perpendiculaire à (P) et coupe (P) suivant MN. Il contient donc la perpendiculaire en H au plan (P) : comme H est sur le segment MN, cette perpendiculaire coupe (Γ) en deux points v et v' symétriques par rapport à (P). Ces points sont communs aux sphères (σ) et (τ).

La perpendiculaire $v'Hv$ au plan (P) est aussi contenue dans le plan perpendiculaire à (P) selon EF qui coupe la sphère (τ) selon un grand cercle (Δ) que l'on caractérise en remarquant qu'il est orthogonal à (P) aux points E et F. Sur (T) les cercles (Γ) et (Δ) se coupent aux points v et v' .

Il convient ici de se souvenir que l'ellipse (ϵ) peut être regardée comme projection sur (P) de deux cercles ayant le grand axe AB de (ϵ) comme diamètre commun et par conséquent situés sur la sphère (σ), ayant AB comme diamètre. Ces cercles sont fixes et le point H de (ϵ) est la projection commune (1°) sur (P) de deux points appartenant chacun à l'un de ces cercles. Comme la perpendiculaire en H à (P) ne coupe la sphère (σ) qu'aux deux points v et v' , ceux-ci sont situés chacun sur un de ces cercles fixés. Dénommons (V) celui qui contient v , et (V') celui qui contient v' .

Quand la demi-droite OT tourne autour de O dans (P) [conditions de (I, 3°)] le lieu de H est (ϵ) et ceux de v , v' sont respectivement les grands cercles (V) et (V') de (σ).

De plus, la tangente à (V) en v est projetée sur (P) selon la tangente à (ϵ) en H, qui est MN ; elle est donc contenue dans le plan de (Γ), qui coupe AB au point K défini dans (I, 3°) : sa trace sur (P) est K. (V) est tangente en v à la droite vK .

La tangente en (v) au cercle (Γ) est contenue aussi dans le plan de (Γ). Ces deux tangentes, à (V) et à (Γ), sont à priori situées dans le plan tangent à la sphère (σ) en v , distinct évidemment du plan de (Γ) : cela suffit à établir qu'elles sont confondues. Ainsi, sur la sphère (σ), le grand cercle (V) est tangent au cercle (Γ) en v : il s'ensuit par symétrie que, de même, le grand cercle (V') est tangent au cercle (Γ) en v' .

2° Toujours dans les conditions de (I, 3°) le cercle (Δ) varie par rotation (comme ses traces E et F) sur (P), et son plan, passant par l'axe OZ perpendiculaire à (P) en O [axe commun des cercles (C) et (C')]. Ce cercle (Δ) engendre une surface de révolution d'axe OZ (*tore*). Dans cette partie nous obtiendrons, par voie élémentaire les propriétés de cette surface, dont la conception est intuitive, bien que son étude ne soit pas au programme de la classe. C'est le lieu de (Δ). Désignons-le par (R).

(1) Les projections dont il est question, dans toute cette partie, sont faites orthogonalement sur (P).

v et v' , appartenant à (Δ) , leurs lieux respectifs (V) et (V') sont des lignes appartenant à la surface (R) . (R) a donc en commun avec la sphère (σ) ces deux cercles (V) et (V') .

Remarque : Inversement, tout point commun à la sphère (σ) et à la surface (R) est, par définition de (R) , un point commun à (σ) et à un « cercle générateur » (Δ) de (R) , tel que celui considéré dans (II, 1°) : un tel point est commun à (σ) et à la sphère (τ) ayant (Δ) comme grand cercle, qui coupe (P) suivant un autre grand cercle, de la famille des (T) , soit (T) . Il est donc sur le cercle (Γ) d'intersection de (σ) avec (τ) et se projette sur (P) , en H , point commun aux traces des plans de (σ) et (τ) sur (P) , qui sont EF et MN ; c'est donc un point v ou v' et l'on voit ainsi que la sphère (σ) n'a en commun avec (R) que les points des cercles (V) et (V') .

Au point v commun à (V) et (Δ) , l'angle de ces cercles est défini comme celui de leurs tangentes : la tangente en v à (V) s'identifiant avec la tangente en v à (Γ) , cet angle peut aussi être considéré comme celui des cercles (Γ) et (Δ) , situés sur la même sphère (τ) . Proposons-nous de rechercher cet angle α , qu'il est loisible de supposer aigu.

A cet effet, nous appliquons aux cercles (Γ) et (Δ) l'opération $(\mathcal{C})$ considérée au dernier alinéa de (I, 2°). Observons que $(\mathcal{C})$ étant produit d'une symétrie (ou rotation de deux droits) autour d'une droite D , par une inversion (N, k^2) cette opération conserve les angles, et, d'autre part, qu'elle change un cercle en un cercle, exceptionnellement réduit à une droite si le cercle transformé passe par N ; enfin, que si le cercle transformé est orthogonal au plan (P) , il résulte de la conservation des angles par $(\mathcal{C})$ que sa ligne homologue est un cercle (ou une droite) orthogonale à (P) .

Ceci dit, le cercle (Γ) orthogonal à (P) en M et N est échangé, par $(\mathcal{C})$, avec la droite perpendiculaire à (P) en l'homologue de M par $(\mathcal{C})$ qui est O , comme on l'a vu ; bref (Γ) est transformé en OZ . Le cercle (Δ) orthogonal à (P) en E et F est échangé, par $(\mathcal{C})$, avec le cercle orthogonal à (P) en B et A , toujours d'après (I, 3°).

α est donc l'angle aigu de OZ avec ce cercle (AB) , contenu dans le plan de OZ et AB . On l'obtient par rabattement de ce plan autour de AB comme charnière, sur le plan (P) : c'est l'angle aigu de (S) [rabattement du cercle (AB)] avec la perpendiculaire en O à AB (rabattement de OZ). La figure montre immédiatement que c'est le demi-angle au centre S du cercle (S) pour la corde de ce cercle perpendiculaire

$$\text{en } O \text{ à } AB ; \text{ il est déterminé par la relation } \cos \alpha = \frac{SO}{SA} = \frac{\frac{R - R'}{2}}{\frac{R + R'}{2}} = \frac{R - R'}{R + R'}$$

$$\text{d'où } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{RR'}}{R + R'} \text{ en vertu de la relation déjà signalée}$$

$$\left(\frac{R + R'}{2}\right)^2 = \left(\frac{R - R'}{2}\right)^2 + (\sqrt{RR'})^2$$

α est donc constant quand le cercle (Δ) varie en engendrant (R) : les cercles (V) et (V') coupent tous les cercles (R) sous ce même angle.

On aurait pu l'évaluer aussi en se référant au cas particulier d'un cercle (Δ) de (R) passant par A (H en A) : c'est l'angle aigu de (V) en A avec la perpendiculaire à (P) en A , et par conséquent l'angle du plan du cercle (V) avec OZ .

Vérifions-le cependant, en appelant β l'angle de OZ avec les plans de (V) ou (V') . Son complément est l'angle de (P) avec le plan de (V) , donné, comme il est

bien connu par son cosinus $\frac{B}{A}$ [A et B demi-axes focal et non-focal de l'ellipse (s) ,

projection de (V) sur (P)]. Ainsi

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{B}{A} = \frac{2\sqrt{RR'}}{R + R'} \quad \text{ou} \quad \sin\beta = \frac{2\sqrt{RR'}}{R + R'} = \sin\alpha$$

β , comme α , est aigu : on vérifie bien que $\beta = \alpha$.

III^e partie du problème. — Elle consiste, en premier lieu, à effectuer une inversion particulière de la figure considérée dans la II^e partie, de manière à déduire des résultats de cette dernière, des découvertes touchant la figure transformée.

Mais, et ce point n'a pas été compris assez généralement, cette méthode de recherche ne donne un théorème intéressant qu'autant qu'on puisse caractériser directement la nature de la figure obtenue par une telle inversion, et notamment l'arbitraire des éléments qui peuvent servir à reconstituer une telle figure, considérée en soi, indépendamment de la figure de II.

1^o Sur un cercle (X) du plan (P), de centre O, de rayon $\sqrt{RR'}$, on prend un point fixe arbitraire I. On soumet l'ancienne figure à l'inversion (J) de pôle I et de puissance $2RR'$.

L'inverse dans (J) d'un élément (point, ligne ou surface) désigné dans l'ancienne figure par une lettre, sera désigné par la même lettre affectée de l'indice « 1 ».

L'inverse O_1 du point O, est dans le plan P_1 (P_1 coïncide avec P) à la distance

$$IO_1 \text{ du point I, telle que } IO_1 = \frac{2RR'}{IO} = \frac{2RR'}{\sqrt{RR'}} = 2\sqrt{RR'} = 2IO.$$

Donc O_1 est le symétrique de I par rapport à O.

L'axe (Z) de (C) et (C') a comme inverse le cercle (Z_1) orthogonal au plan (P_1) aux points I et O_1 .

Les points E et F, sur la droite OEF, sont conjugués par rapport au cercle (X), car $\overline{OE} \cdot \overline{OF} = RR' = OI^2$; tous les cercles passant par E, F, sont orthogonaux à (X).

(X) a comme inverse une droite (X_1) de (P_1), perpendiculaire en O à IO ; O étant milieu de IO_1 , (X_1) est la médiatrice du segment IO_1 (dans P_1). Tous les cercles passant par E_1 , F_1 , sont orthogonaux à (X_1) : donc E_1 et F_1 sont symétriques, dans P_1 , par rapport à (X_1).

En particulier le cercle IEF a comme inverse la droite E_1F_1 , perpendiculaire à (X_1).

Le cercle IAB passe par O_1 , car $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = -RR' = -IO^2 = \overline{OI} \cdot \overline{OO_1}$. Son inverse est la droite A_1B_1 de (P_1) et celle-ci passe par O.

Les lignes (C_1) et (C'_1), inverses de (C) et (C'), qui sont les lieux respectifs de E et F dans l'ancienne figure, sont des cercles, car (C) et (C') ne passent pas par I ; ce sont les lieux respectifs de E_1 et F_1 , ils sont donc symétriques par rapport à (X_1) : en particulier (X_1) est l'axe radical de (C_1) et (C'_1) et ces cercles sont de même rayon.

Les droites passant par O sont orthogonales aux cercles (C) et (C') ; par inversion, les cercles passant par I et O_1 sont orthogonaux aux cercles (C_1) et (C'_1) : il en découle que I et O_1 sont les points limites du faisceau de cercles (C_1) et (C'_1).

Comme $R < \sqrt{RR'} < R'$, I est extérieur à (C'), intérieur à (C) : la considération des tangentes, éventuellement menées de I à ces cercles, qui sont aussi tangentes aux cercles inverses (quand elles existent), montre que I est intérieur à (C_1), mais extérieur à (C'_1).

A_1 est un point de (C_1), (B_1) est un point de (C'_1) et on a vu que ces points sont alignés avec O, milieu de IO , et aussi de la ligne des centres de (C_1), (C'_1) ; de tels points sont donc, soit homothétiques dans l'homothétie de centre O transformant (C_1) en (C'_1), qui est une symétrie de centre O, soit inverses dans l'inversion de

pôle O échangeant (C_1) et (C'_1) , inversion qui est négative [O étant extérieur aux cercles (C_1) et (C'_1) non sécants].

Mais le cercle (S) est tangent en A à (C) et en B à (C') d'où résulte que (S_1) est tangent en A_1 à (C_1) et en B_1 à (C'_1) : les rayons de (C_1) et (C'_1) qui aboutissent à A_1 et B_1 passent par le centre de (S_1) et ne peuvent être parallèles pour I arbitraire sur (X), auquel cas (S) ne passe pas par I, c'est-à-dire que (S_1) n'est pas une droite. A_1 et B_1 sont donc échangés par l'inversion de pôle O échangeant (C_1) et (C'_1) .

On aurait pu remarquer aussi que A et B étant dans un même plan passant par (Z), A_1 et B_1 sont sur une même sphère avec le cercle (Z_1) , orthogonal, comme il a été vu, à (P_1) en I et O_1 : cette sphère coupe (P_1) suivant un cercle passant par A_1 , B_1 , I, O_1 : d'où la relation $OA_1 \cdot OB_1 = OI \cdot OO_1 = -2RR'$. Elle est valable pour toute position de AOB dans l'ancienne figure, donc il y a une infinité de couples de points A_1 et B_1 , respectivement situés sur (C_1) et (C'_1) échangés par une inversion négative fixe de pôle O ; ce qui confirme le résultat précédent. On voit, de plus, que cette inversion négative échange aussi les points limites I et O_1 du faisceau de cercles défini par (C_1) et (C'_1) .

Dans les conditions de (I, 3°), (C_1) , (C'_1) , A_1 , B_1 (possédant la disposition précédente) sont fixes : le cercle (Δ_1) est orthogonal à (P_1) en E_1 et F_1 , points symétriques par rapport à l'axe de symétrie (X_1) de (C_1) et (C'_1) ; (Δ_1) est mobile et engendre la surface (R_1) inverse de (R) : (R_1) est le lieu des cercles (Δ_1) de même axe (X_1) et s'appuyant sur (C_1) , par suite sur (C'_1) : il est clair que (R_1) est une surface de révolution d'axe (X_1) engendrée par (C_1) ou (C'_1) tournant autour de (X_1) .

La sphère (σ) , orthogonale à (P), le long de (S), a comme transformée par (J) la sphère (σ_1) orthogonale à (P_1) le long de (S_1) : (σ_1) est tangente à (C_1) en A_1 et à (C'_1) en B_1 .

Le résultat de (II, 2°) sur l'intersection complète de (σ) avec (R) se traduit, par l'inversion (J), de la façon suivante : l'intersection complète de (σ_1) avec (R_1) est formée de deux cercles (V_1) , (V'_1) passant tous deux par A_1 et B_1 : leur symétrie par rapport à (P_1) , qui n'est autre que (P), est évidente et résulte de celle de (V) et (V') par rapport à (P).

D'après l'avant-dernier alinéa de (II, 2°) chacun des cercles (V_1) , (V'_1) coupe tous les parallèles (Δ_1) de (R_1) sous un angle constant α .

2° Dans un plan (P_2) , donnons-nous deux cercles égaux (C_2) , (C'_2) , sans point commun : ils sont symétriques par rapport à leur axe radical (X_2) et cette droite ne les coupe pas. On considère une sphère (Σ) orthogonale à (P_2) et tangente à ces deux cercles. On demandait comment (Σ) coupe la surface (R_2) engendrée par la rotation de (C_2) ou (C'_2) autour de (X_2) ?

Le grand cercle (S_2) , d'intersection de (Σ) avec (P_2) , est aussi tangent à (C_2) et (C'_2) aux points de contact A_2 , B_2 de ces cercles avec la sphère (Σ) : A_2 et B_2 se correspondent, fait bien connu, dans une des inversions échangeant les cercles (C_2) , (C'_2) ; ici l'une de ces inversions, dans le plan (P_2) , se réduit à la symétrie d'axe (X_2) .

Deux éventualités peuvent donc se présenter pour (Σ) , selon que A_2 et B_2 s'échangent dans l'inversion (négative) échangeant (C_2) et (C'_2) ou que A_2 et B_2 sont symétriques par rapport à (X_2) .

Ce dernier cas est banal au point de vue de la question posée : il entraîne que (S_2) et (Σ) ont leur centre sur (X_2) et l'intersection de (Σ) avec la surface (R_2) ne comporte que le parallèle des points A_2 , B_2 , comptant pour deux cercles confondus.

Ecartons ce cas, alors les dispositions de nos données actuelles, notées à l'aide de l'indice 2, sont conformes à celles des éléments de même nom affectés de l'indice 1, et découvertes dans (III, 1°).

Considérons, dans (P_2) , le cercle orthogonal à (S_2) aux points A_2 et B_2 : il est aussi orthogonal à (C_2) et (C'_2) et passe donc par les points limites I, J du système des cercles (C_2) , (C'_2) : A_2 , B_2 , I, J, sont sur ce cercle ; comme la droite A_2B_2 passe par le milieu de la ligne des centres de (C_2) , (C'_2) , pôle de l'inversion négative échangeant ces deux cercles, et que I, J sont symétriques par rapport à ce milieu, les points des deux couples A_2 , B_2 et I, J, *alternent* sur le cercle contenant ces points.

Un raisonnement du même genre s'applique en remplaçant (S_2) par un cercle (T_2) de (P_2) tangent à (C_2) et (C'_2) en deux points respectifs E_2 et F_2 supposés symétriques par rapport à (X_2) : on établit de même que les points E_2 , F_2 , I, J, sont sur un même cercle, mais les couples E_2 , F_2 et I, J, *n'alternent pas* sur celui-ci. Si l'on considère le parallèle (Δ_2) de (R_2) qui passe par E_2 et F_2 , il résulte de là qu'il est sur une sphère orthogonale à (P_2) et contenant le cercle (Z_2) qu'engendre chacun des points I et J dans la révolution autour de (X_2) .

Ceci posé, effectuons une inversion $(\mathcal{I})$ dont le pôle soit un des points limites I du système (C_2) , (C'_2) . Elle conserve le plan (P_2) et transforme (C_2) et (C'_2) en deux cercles (C) et (C') de (P_2) , concentriques, comme il est bien connu ; leur centre commun O est l'inverse par $(\mathcal{I})$ du second point limite J. Le cercle (Z_2) a pour inverse la droite (Z) perpendiculaire à (P_2) en O, qui est donc l'axe commun de (C) et (C') .

L'inverse, dans $(\mathcal{I})$, du cercle (S_2) est un cercle (S) du plan (P_2) , tangent à (C) et (C') , aux inverses respectifs A, B de A_2 , B_2 . A_2 , B_2 , I, J étant sur un même cercle, les points A, B, sont alignés avec O, et, de l'alternance signalée à propos des quatre premiers points, résulte que O est intérieur au segment AB. L'inverse de la sphère (Σ) dans $(\mathcal{I})$ est la sphère (σ) ayant (S) comme grand cercle, et AB pour un de ses diamètres.

L'inverse dans $(\mathcal{I})$ du cercle (Δ_2) est un cercle (Δ) orthogonal à (P_2) aux points E et F inverses respectifs de E_2 et F_2 . En transformant la propriété notée plus haut, à savoir que (Δ_2) et (Z_2) sont sur une même sphère, mais non sécants, nous voyons que le cercle (Δ) et la droite (Z) sont dans un même plan, mais non sécants. Autrement dit, E et F sont alignés avec O, mais O est extérieur au segment EF.

L'inverse de la surface (R_2) , engendrée par (Δ_2) quand E_2 décrit (C_2) , est une surface (R) engendrée par le cercle (Δ) quand E décrit (C) . C'est un tore tel que nous l'avons rencontré dans (II, 2°). Son intersection avec (σ) est formée de deux cercles (V) et (V') passant par A et B, orthogonaux à la droite AOB.

L'inversion $(\mathcal{I})$ permet de déduire de ce résultat la réponse à la question posée : *La sphère (Σ) a en commun avec le tore (R_2) deux cercles (V_2) et (V'_2) passant par les points de contact A_2 , B_2 de (Σ) avec (C_2) et (C'_2) , et orthogonaux en ces points au cercle IA_2JB_2 .*

Observations. — Les fautes relatives à la *géométrie orientée* sont signalées comme au moins aussi nombreuses cette année que les précédentes : aussi le paragraphe 2° de I aura sans aucun doute joué un rôle déterminant dans le triage et dans le classement final des candidats : certains ne conçoivent que l'angle arithmétique, compris entre 0 et π , de deux demi-droites. Mais plus nombreux sont ceux qui abusent de la notation de l'angle orienté de demi-droites : dans une question comme celle de la déformation d'un parallélogramme articulé (I, 1°) elle est inopportune.

Par contre la notion de *transformation* a semblé bien comprise : ainsi l'opération $(\mathcal{G})$ qui, pourtant, n'avait été introduite que dans le plan P en (I, 2°) a été correctement utilisée dans l'espace en (II, 2°) : ce sont plutôt les ressources qu'offrent les propriétés générales de ces transformations qui sont souvent sous-estimées : pour prouver que $(\mathcal{G})$ échange O et M, beaucoup se sont perdus dans la considération de triangles semblables, en s'attachant strictement à la définition première de $(\mathcal{G})$, et

n'ont le plus souvent pas abouti. L'emploi des transformations n'est donc fécond que s'il s'accompagne d'idées générales qui leur soient liées.

L'entrée en matières du problème était accessible à un élève de Quatrième : il nous semble que le Jury doit se montrer fort éclectique, et admettre aussi bien les démonstrations très élémentaires que celles plus savantes utilisant les matières du programme de la classe de Mathématiques. Toujours est-il que trop de concurrents croient qu'un quadrilatère à côtés opposés égaux est un parallélogramme ou signalent que OSTN est un trapèze isocèle sur le vu des figures faites, avec des explications qui permettraient aussi bien de prouver que cette même figure est un parallélogramme. Conseillons à certains candidats de revoir sérieusement les hypothèses de la « réciproque du théorème de Thalès » : il ne permet pas de prouver que trois droites sont parallèles, mais seulement que si les deux premières le sont, la troisième leur est parallèle.

La passivité devant l'énoncé, le recours à l'érudition, sont des critiques portées fréquemment sur les copies de concours ; mais il est réconfortant de se rendre compte qu'elles sont moins opportunes, plus rares, en somme, que dans le passé. En gros, dans I et II, les candidats ont dû suivre fidèlement l'énoncé, mais dans la partie III, celui-ci s'était attaché à être le plus élémentaire possible : il s'est trouvé dans l'étude de la mise en place de la figure inverse de celle de II, que bien des variantes intéressantes ont été considérées dans les copies, qui ne suivent pas trop servilement l'énoncé, et il faut s'en féliciter.

Si quelques candidats ont parlé de l'intersection d'un tore et d'un plan bitangent, ce qui n'entre guère dans la ligne du problème, il n'y a pas lieu de reprocher plus à un candidat de connaître le sens du mot « tore » qu'à un autre de l'ignorer.

Certains connaissaient le fait que la propriété pour deux points d'être inverses ou « symétriques » par rapport à un cercle se conserve par une inversion et ont bien vu, grâce à ce fait, le rôle du cercle X de (III, 1°).

Les fautes et les lourdeurs les plus fréquemment observées, ailleurs que dans les débuts dont il a déjà été question, sont les suivantes :

Dans (I, 3°) on démontre généralement que H est sur la droite EF et non sur le segment EF ; on démontre bien que la droite MN est tangente à une ellipse fixe (ϵ), définie correctement, mais on n'établit pas que l'enveloppe de MN est cette ellipse.

Dans (II, 1°) on affirme qu'il suffit, pour que deux courbes de l'espace soient tangentes, que leurs projections le soient ; ou encore qu'il suffit, pour que deux courbes tracées sur une même sphère soient tangentes, que leurs projections le soient. Imprécision dans les idées, dans le langage ?

Dans (II, 2°) on a été surpris de la faible proportion des copies qui peuvent établir la fixité des plans ABv , ABv' , et par conséquent les lieux de v et v' . Lorsqu'on arrive à ce résultat, c'est avec des lourdeurs : il semble que les élèves n'aient pas associé, à l'idée des deux cercles concentriques à l'ellipse ϵ et se projetant sur son plan selon cette ellipse, l'idée de la sphère de diamètre AB qui les contient.

Dans (III, 1°), pour démontrer l'égalité des cercles (C_1) , (C'_1) on a souvent calculé les rayons de ces cercles, méthode peu élégante, mais naturelle. Il eût été simple de considérer qu'il passe par I (tel que $OI = \sqrt{RR'}$) deux cercles tangents à (C) et (C'), de la même manière que (T), et que ces cercles sont tangents à OI : par l'inversion (J) ils se transforment en deux droites parallèles auxquelles (C_1) et (C'_1) sont tangents, ce qui rend l'égalité de ces cercles intuitive. L'usage fréquent de la transformation par inversion de régions du plan n'est pas des plus heureux, quoique très légitime.

La dernière question (III, 2°) a été traitée de façon superficielle sans qu'on puisse toujours incriminer le manque de temps : la preuve en est qu'un lauréat du Concours a négligé l'étude demandée pour se livrer à des calculs d'angles qui

n'étaient nullement exigés : il a fait preuve d'indépendance vis-à-vis du texte, d'une belle envolée : mais il n'a pas compris ce qui était demandé par l'énoncé et ceci est bien symptomatique du fait suivant :

Les élèves, et des meilleurs, n'attachent pas à l'étude des *synthèses* le même intérêt qu'à celle des *analyses*. On leur a dit que l'étude, ainsi dédaignée d'une synthèse, peut se rattacher à celle de l'analyse correspondante par un simple processus d'*identification*. C'est souvent, mais pas universellement, exact.

Bien rares sont les esprits qui s'attachent à mettre en forme de telles identifications : trop signalent la chose en se gardant d'y apporter la moindre précision.

Telle est bien la lacune essentielle la plus constante de nos jeunes apprentis en Mathématiques, et tous les ans nous devons y insister sans enregistrer à ce sujet le moindre progrès.

La rédaction et la présentation, en général bonnes, ne sont pas encore exemptes de reproches. Si l'un des concurrents n'a pas fait une seule figure, un autre, emporté par son zèle, en a fourni dix-neuf, ce qui peut être nécessaire dans certains problèmes, mais ne l'était sûrement pas dans l'espèce. Dans l'une des meilleures copies, on relève, dans un seul paragraphe, les graphismes suivants : « cercles inscrits », « points décrivant une droite », et ce qui s'explique moins, « points de poncelets ». Par compensation, un correcteur a trouvé dans les compositions d'épure du Concours de l'Ecole Polytechnique, cette perle : « le cercle de Georges de l'hyperboloïde ».

Dans l'ensemble, la composition a été mieux réussie en 1952 qu'en 1951. Si cela est dû, en partie, à la différence de difficulté des sujets, il n'est pas interdit de penser à un relèvement de la valeur du lot des candidats.

A la première lecture des copies, vingt-cinq copies atteignant au moins la note de 11,5 sur 20, ont été retenues pour une seconde lecture. Une très forte accumulation de résultats corés 7,5 est à signaler dans le lot des copies non retenues, qui sont assez honorables, mais leurs auteurs ne sont sans doute pas entraînés à faire des compositions de six heures. Aussi la tâche des correcteurs a-t-elle été fort minutieuse et délicate.

Après un examen non moins difficile des copies retenues par tous les correcteurs, le Jury a difficilement départagé les meilleures et a proposé douze récompenses pour le palmarès de l'épreuve : trois prix, et neuf accessits, comportant pour les premiers, cinquièmes et huitièmes accessits deux *ex-æquo* chaque fois. Les notes sur 20 des premier, deuxième et troisième prix sont 17,56, 16,68 et 16,14. Pour les accessits elles varient de 15 à 11,5.

Ce genre de concours ne permet pas des conclusions très poussées en profondeur, cela tient surtout à la rédaction concise des concurrents qui pose maints problèmes individuels d'interprétation de leurs solutions. Mais lorsqu'un lot élevé de concurrents se montre capable de traiter au moins la moitié du problème, l'impression moyenne, difficile à traduire par des barèmes destinés à un classement comparatif, est certainement hautement satisfaisante, et c'est à nos professeurs qu'il convient d'attribuer cet heureux relèvement du goût qu'ils entretiennent pour les Mathématiques. Nous les en remercions d'autant plus sincèrement que nous n'ignorons pas les grandes difficultés de leur tâche.

L'Inspecteur général, président du Jury,

P. ROBERT.