

Bulletin de l'Association
des
Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement public

PREMIÈRE PARTIE

I. Documents officiels

Agrégation de Mathématiques (Hommes)

Rapport de M. l'Inspecteur général ROBERT, Président du Jury
(SESSION 1952)

Le Jury était composé de M. ROBERT, inspecteur général de l'Instruction publique, président ; M. MILLoux, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, vice-président ; M. ROGER, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux ; M. CAGNAC, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand ; M. DOLLON, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Louis-le-Grand.

ÉPREUVES ÉCRITES

Elles ont eu lieu les 26, 27, 29 et 31 mai.

Dans le texte du sujet de Mathématiques Élémentaires, figurait une lettre dont la signification n'était pas antérieurement indiquée. La rectification de cette omission, faite le 26 mai, ne put atteindre tous les centres de compositions écrites, ce qui entraîna l'annulation de l'épreuve de Mathématiques Élémentaires. Une nouvelle composition fut effectuée le 18 juin.

Sur cent soixante-neuf candidats inscrits, cent quarante-neuf ont composé le premier jour, cent quarante-cinq le deuxième, cent quarante et un le troisième jour, cent trente-sept le quatrième jour. A l'épreuve de Mathématiques Élémentaires du 18 juin ne prirent plus part que cent trente-cinq candidats.

Le jury, réuni le 7 juillet, a déclaré admissibles les candidats ayant obtenu un total au moins égal à 29 (sur 80) pour l'ensemble des quatre épreuves. La liste des admissibles a compris quarante-six candidats. Ce nombre dépasse de quatre unités celui des admissibles de 1951, année où les notes d'écrit ont été anormalement basses. La comparaison des épreuves avec celles de 1950 montre que le niveau des admissibles est sensiblement le même (7,25 sur 20 comme moyenne inférieure atteinte par les admissibles en 1952 contre 7 en 1950). Toutefois, le nombre des candidats ayant effectivement composé tend à décroître : de cent quatre-vingts en 1950, comme en 1951, il est passé à cent quarante-neuf en 1952 : les concours de recrutement, dont le nombre était deux en 1950, ont été au nombre de quatre en 1952 (agrégation ; certificat d'aptitude à l'enseignement dans les collèges, section mathématiques-physique ; C.A.P.E.S. (ancienne formule) ; concours d'admission aux centres pédago-

giques régionaux). Ceci explique la diminution du nombre des candidats tentant l'agrégation. Mais le pourcentage des admissibles est passé de 30 % (en 1950) à 31 % en 1952 après n'avoir été que de 23 % en 1951.

La liste des admissibles de 1952 a compris sept professeurs des lycées, dix professeurs des collèges, deux professeurs des collèges techniques, deux professeurs (délégués) des écoles normales, deux assistants des Facultés, quatre stagiaires d'enseignement, un adjoint d'enseignement, un instituteur, soit au total vingt-neuf candidats participant à des charges d'enseignement ou de surveillance. Du côté des étudiants, neuf élèves de l'Ecole Normale de la rue d'Ulm, deux auditeurs, quatre élèves de l'Ecole Normale de Saint-Cloud, un ancien élève de cette école en congé pour service militaire, un seul étudiant libre.

Parmi les quarante-six admissibles figuraient quinze admissibles des sessions antérieures.

*
**

Les compositions écrites (1) ont donné lieu aux observations qui suivent :

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES : M. DOLLON

Le problème proposé n'exigeait que des connaissances élémentaires sur les déplacements : il était relativement court et la plupart des candidats ont su exploiter le sujet dans des limites fort honorables. Nous avons même eu la grande satisfaction de trouver une copie ayant complètement traité le sujet, d'une rédaction nette et vigoureuse, où la pensée s'affirme aussi claire que précise. Compte tenu du temps limité, qui exclut la possibilité de faire une étude et une rédaction très détaillées, le jury a estimé que la note maximum pouvait être attribuée à cet excellent travail.

I. — 1° Il semble que la notion de déplacements (V) équivalents (mod. D), c'est-à-dire transformant tout point p de la droite (D) en le même point p' de (D') transformée de (D), ait un peu dérouté une forte fraction des candidats.

Ceux-ci se sont tirés d'affaire en envisageant un vecteur $\overrightarrow{p_1 p_2}$ porté par (D) transformé par le vissage (V) en un vecteur $\overrightarrow{p'_1 p'_2}$ de (D'), l'existence d'une rotation (R) associant ces deux vecteurs est alors classique, mais l'inconvénient de la méthode tient à la disparition des données naturelles du vissage : translation et rotation.

Précisons la réduction canonique d'un déplacement (V₁) équivalent à (V) : à cet effet soient (C) et (C') deux demi-tours d'axes T et T', T étant la perpendiculaire commune AB (A sur Z et B sur D) à l'axe Z de (V) et à (D) :

$$(V) = (C) \cdot (C').$$

Soit (C₁) un demi-tour dont l'axe est une perpendiculaire en B à (D). Le déplacement (V₁) (V)⁻¹ change un point p de (D) en lui-même et, par suite, l'équivalence (mod. D) se traduit par $(V_1)(V)^{-1} = (C_1) \cdot (C)$, entraînant

$$(V_1) = (C_1) \cdot (C').$$

(V₁) se réduit à une rotation si les axes T₁ et T' sont concourants. L'existence et l'unicité de (R) sont ainsi mises en évidence.

Le cas d'exception évident est celui où l'axe Z de (V) et la droite (D) sont parallèles.

L'existence de la rotation (R) met en évidence l'enveloppe des plans médiateurs M(p) des segments pp' .

La proposition inverse exigeait un peu de soin : tout plan passant par l'axe R de la rotation (R) est-il un plan M(p) ? La rotation (R) est déterminée par son axe et son angle $2\alpha_1$. Si l'on se donne un plan arbitraire passant par R ce sera un

(1) Cf. *Bulletin* n° 149.

plan $M(p)$ s'il existe sur D un point p tel que l'angle (R, p) avec $M(p)$ soit égal à $\alpha_1 \pmod{\pi}$; p se trouve ainsi déterminé, réserve faite que D n'est pas parallèle à R (cas exclu). Seul, fait exception, le plan passant par R et perpendiculaire à T' .

2° $(\mathcal{R})$ est donnée ainsi que D ; la réduction canonique de $(\mathcal{R})$ à un produit de deux demi-tours $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}')$ liés au vissage (V) fait apparaître l'axe Z de tous les vissages (V) équivalents à $(\mathcal{R})$.

Prenons comme axe d'un demi-tour $(\mathcal{C}_1)$ la droite T_1 perpendiculaire commune à R et D (A_1 sur R et B sur D), la droite T est une perpendiculaire quelconque à D en B . Dans ces conditions $(V) = (\mathcal{C}) (\mathcal{C}')$ équivalent à $(\mathcal{R})$ (module D).

Par suite T' étant fixe, ainsi que T_1 , l'axe Z de (V) est la perpendiculaire commune à la droite T' , fixe, et à une droite variable T passant par un point fixe B et située, en outre, dans le plan perpendiculaire en B à la droite D . Il est bien connu que la surface, lieu de Z , est un conoïde de Plücker. Il était indiqué de caractériser de façon élémentaire la section de cette surface par le plan perpendiculaire en B à D en la projetant sur un plan perpendiculaire à T' : cette projection est un cercle et l'on retrouve une génération connue du cylindroïde.

Le cas où R a la direction de D était réservé : le lieu des axes Z est alors un plan.

3° Trois points marqués p_1, p_2, p_3 d'une droite D et trois points marqués q_1, q_2, q_3 sur une droite I , sont les données du problème. On propose de chercher les rotations $(\mathcal{R})$ telles que les plans $M(p_1), M(p_2), M(p_3)$ relatifs à p_1, p_2, p_3 , passent par les points q_1, q_2, q_3 respectivement.

L'existence d'une telle rotation étant supposée acquise, on a :

$$(Rp_1, Rq_1) = (Rp_2, Rq_2) = (Rp_3, Rq_3) \pmod{\pi},$$

Rp_1 désigne le plan contenant l'axe R et le point p_1 . Ainsi les axes R sont soumis à deux conditions et forment une congruence.

Si l'on se donne la direction Δ de l'axe R d'une telle rotation, en projetant sur un plan H perpendiculaire à Δ , les projections des droites $p_i q_i$ ($i = 1, 2, 3$) sont tangentes à une conique ayant pour foyer la trace sur H de R . Cette conique, déterminée par cinq tangentes, admet en général deux foyers, exceptionnellement un seul.

De nombreuses fautes sont apparues dans ce paragraphe. La notion de correspondance homographique est trop souvent mal connue : que signifie une phrase de ce genre : « les faisceaux $R(p_1 p_2 p_3)$ et $R(q_1 q_2 q_3)$ sont en correspondance homographique ! ! !... » ?

...une corrélation simple est une homographie... une correspondance involutive de points sur des bases distinctes... les "gerbes" de plans (R, p_1) (R, q_1) sont en correspondance homographique et le lieu de R est une quadrique... » ?

La notion de correspondance homographique entre des êtres algébriques ou géométriques requiert une définition adaptée du birapport de quatre de ces éléments et une démonstration *complète* de la conservation du birapport, faute de quoi les pires erreurs sont à redouter.

4° Trois points marqués p'_1, p'_2, p'_3 sur une droite D' décrivaient trois sphères fixes S_1, S_2, S_3 dont les centres q_1, q_2, q_3 sont alignés. Il fallait montrer que tout point marqué p' sur D' décrit une sphère fixe S' .

L'existence d'une rotation $(\mathcal{R})$ établie au paragraphe précédent montre que les transformés p'_1, p'_2, p'_3 , de p_1, p_2, p_3 , sont sur une droite D' , $p_1 p'_1$... étant sur une sphère de centre q_1 (on ne demandait pas d'étudier les régions des sphères S_i décrites par les points p'_i) ; p et p' étant deux points homologues de D et D' , soit le point q de la droite L défini par l'égalité des birapports

$$(q_1 q_2 q_3 q) = (p'_1 p'_2 p'_3 p') = (p_1 p_2 p_3 p).$$

Si nous projetons sur un axe perpendiculaire à l'axe de la rotation la projection de $p q$ reste tangente à une conique déjà considérée plus haut, ce qui permet d'établir que le plan médiateur $M(p)$ passe par q et que $q p' = q p$.

Ainsi p' appartient à la sphère fixe S de centre q et de rayon pq et cela pour toutes les positions de la tige rectiligne variable $p_1p_2p_3p'$.

Exceptionnellement q peut être à l'infini si l'on a

$$(p_1p_2p_3p) = (q_1q_2q_3\infty) = \frac{q_3q_1}{q_2q_2},$$

pp' est orthogonale à L , et p' décrit le plan « fixe » mené par p et perpendiculaire à L .

II. — 1° On donnait un déplacement hélicoïdal (V) par ses éléments : rotation d'angle 2α autour d'un axe Z et translation parallèle à Z de grandeur algébrique $2h$.

P est un plan donné de l'espace, p un point de P et p' son homologue par (V).

Les plans médiateurs des segments pp' forment une famille à deux paramètres. Si P coupe Z en A [P non perpendiculaire à Z (1)] on remplace (V) par le produit de deux demi-tours ($\mathcal{C}$). ($\mathcal{C}'$), l'axe T de ($\mathcal{C}$) étant la droite de P perpendiculaire en A à Z . L'axe T' de ($\mathcal{C}'$) perce en O le plan Q perpendiculaire à P mené par T ; O est le point par lequel passent les plans médiateurs $M(p)$.

O est d'ailleurs invariant dans l'antidépacement ($\mathcal{Q}$), ($\mathcal{C}$), produit de la symétrie ($\mathcal{Q}$) par rapport au plan Q par le demi-tour, ($\mathcal{C}'$). ($\mathcal{P}$) étant la symétrie par rapport au plan P on a ($\mathcal{C}$) = ($\mathcal{P}$). ($\mathcal{Q}$), et, par suite,

$$(\mathcal{Q}) = (\mathcal{P}) (\mathcal{C}) \quad (\mathcal{Q}) (\mathcal{C}') = (\mathcal{P}) (\mathcal{C}) (\mathcal{C}') = (\mathcal{P}) (V)$$

antidépacement ayant O pour point invariant et équivalent (mod. P) à (V).

O n'existe pas si le plan P est parallèle à Z (ou le contient). L'étude de la correspondance p, p' faite en projetant sur un plan perpendiculaire à Z montre que la droite pp' reste parallèle à un plan fixe et que les plans $M(p)$ sont parallèles à une direction de droite fixe. Restait à montrer que tous les plans passant par O sont des plans médiateurs $M(p)$.

On peut chercher directement le couple p, p' des points tels qu'un plan donné soit médiateur de pp' .

On considère un plan M' passant par O et l'on se propose de trouver un point p dans P tel que le plan donné M' soit le plan médiateur de pp' .

On passe de p à p' par l'antidépacement ($\mathcal{P}$) (V), puisque ($\mathcal{P}$) conserve p . On passe de p' à p par la symétrie ($\mathcal{M}'$) par rapport au plan M' . Donc le produit ($\mathcal{M}'$) ($\mathcal{P}$) (V) fait passer de p' à p . O est invariant dans ($\mathcal{M}'$) ; ($\mathcal{P}$) change O en O'' symétrique de O par rapport à P (ou T). ($\mathcal{C}$) change O'' en O et ($\mathcal{C}'$) laisse O invariant puisque O est sur T' . Donc O est invariant dans le déplacement ($\mathcal{M}'$) ($\mathcal{P}$) (V). ce déplacement est une rotation dont l'axe R passe par O ; p' est le point commun à R et à l'homologue P' de P par (V).

La discussion tient dans l'étude des déplacements ($\mathcal{M}'$) ($\mathcal{P}$) (V) et à la position de l'axe R par rapport au plan P' , ce qui exclut le cas d'un plan M' passant par O et parallèle à l'axe Z de (V).

2° Désormais, on envisage un plan P non parallèle à Z . L'énoncé suggérerait de rapporter la figure à un plan horizontal H , perpendiculaire à l'axe Z de V , z_0 étant la cote de O relativement au plan H .

Il y a correspondance biunivoque entre un point p de P et sa projection orthogonale $\overline{p}$ sur H .

Le plan médiateur $M(p)$ coupe H selon une droite μ , car si $M(p)$ était parallèle à H , pp' serait parallèle à Z , cas exclu (à moins que p n'appartienne à Z).

Si le point $\overline{p}$ décrit une droite du plan H , p décrit une droite D du plan P . Or on a montré dans I, 1° que les plans médiateurs $M(p)$ des points p de D passaient par une droite fixe R : R est l'enveloppe des plans $M(p)$, tels que p appartienne à D , R passant naturellement par O .

(1) Cas facile à étudier.

La trace μ de $M(p)$ sur le plan H passe par la trace φ de la droite R sur H : c'est le point φ à distance finie ou non.

Il apparaît que la correspondance K_1 , point $\bar{w}$, droite μ , semble être une corrélation linéaire. C'est ce qu'on se propose de préciser dans ce dernier paragraphe.

3° A cet effet, le lecteur est prié de faire une épure. Soit pq la perpendiculaire à Z menée de p et que nous choisissons pour axe T du premier demi-tour ($\mathcal{C}$), l'axe T' est tel que $(V) = (\mathcal{C}) (\mathcal{C}')$. Nous bornant à transformer p en p' , s , milieu de pp' , sera sur T' et le plan médiateur de pp' est le plan O , T' dont la trace sur H est parallèle à la droite $z\sigma$, z trace de Z sur H , σ projection de s .

Désignons par O , ω , ω' , les projections de O , p , p' , sur H , par z_0 la cote de O , par k la projection orthogonale de O sur (μ) . En exprimant l'orthogonalité de Ok et pp' , il vient entre les mesures algébriques des deux vecteurs parallèles $\overrightarrow{Ok}$, $\overrightarrow{\sigma\omega'}$ la relation : $\overrightarrow{Ok} \cdot \overrightarrow{\sigma\omega'} = hz_0$.

Évaluant $\overrightarrow{\sigma\omega}$ sur la demi-droite $z\chi$ de sens $z\sigma$ on trouve :

$$\overrightarrow{\sigma\omega'} = \overrightarrow{z\omega'} \sin \alpha = \overrightarrow{z\omega} \cdot \sin \alpha \quad \text{et} \quad \overrightarrow{Ok} \cdot \overrightarrow{z\omega} = \frac{hz_0}{\sin \alpha}.$$

Le passage de $\overrightarrow{z\omega}$ à $\overrightarrow{Ok}$ se fait donc :

1° par une rotation de α autour de Z , puis de $+\frac{\pi}{2}$, $\overrightarrow{z\omega}$ se transforme en un vecteur $\overrightarrow{zv}$ porté par $Y'\gamma$ [tel que $(z\chi, Y'Y) = +\frac{\pi}{2}$], $\overrightarrow{Ok} \cdot \overrightarrow{zv} = \frac{hz_0}{\sin \alpha}$;

2° par la translation $\overrightarrow{z_0}$ suivie de l'inversion (I) de pôle O et de puissance $\frac{hz_0}{\sin \alpha}$ on passe de $\overrightarrow{zv}$ à $\overrightarrow{Ok}$.

En résumé, on passe de $\bar{w}$ à k par un déplacement suivi de l'inversion (I).

Si $hz_0 > 0$ on passe de $\bar{w}$ à μ par un déplacement suivi d'une polarité par rapport à un cercle de centre O et de rayon R , tel que $R^2 = \frac{hz}{\sin \alpha}$.

Si $hz_0 < 0$ on posera $\frac{zh}{\sin \alpha} = -R'^2$ et l'on aura une transformation analogue.

Si $\bar{w}$ décrit une droite de H , μ passe par un point fixe.

Si $\bar{w}$ est en z , μ est rejetée à l'infini (p en A , $zv = z\bar{w} = 0$, ok infini).

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES : M. CAGNAC

Le correcteur doit noter avant tout son impression de découragement à la lecture des copies d'un trop grand nombre de candidats ; si vraiment, « faire des Mathématiques », c'était imiter ce que font ces candidats, les esprits sains, normalement équilibrés, renonceraient à faire des Mathématiques...

Tous les candidats devraient être persuadés que, lorsqu'on leur demande l'équation d'une courbe, cette équation est suffisamment simple pour qu'on puisse la noter en une seule ligne d'écriture normale. Comment ne pas signaler le candidat qui, pour trouver l'équation tangentielle de $\mathcal{C}$, demandée au I, 2°, écrit deux équations (1) et (2) du second degré en x_0 , dont la seconde mesure 46,5 cm. de longueur, et ajoute « on éliminera x_0 entre les équations (1) et (2) ».

Les candidats devraient se douter que si on leur demande d'examiner les questions du problème dans un certain ordre, si on leur propose d'abord l'étude d'un cas particulier, c'est que probablement cet ordre conduit à des calculs de difficulté croissante, et que l'étude du cas particulier peut leur permettre de « roder » la méthode générale qu'ils utiliseront par la suite. Comment ne pas signaler le candidat qui, ayant négligé l'étude du I, 1°, aborde directement celle du I, 2°, pose correctement ce qu'il avait à faire pour trouver $\mathcal{Q}$, introduit des notations auxiliaires, λ , λ_+ , λ_- , μ , μ_+ , μ_- , λ_i , λ_j , μ_i , μ_j , et s'y embourbe tellement qu'au bout de sept pages de

calculs il n'a pas encore terminé. Tous les candidats devraient savoir qu'on exigera d'eux — avant les connaissances en frange du programme et qui, certes, ne sont pas à dédaigner — la connaissance des méthodes les plus élémentaires de la géométrie analytique et l'humble correction matérielle de leurs travaux, correction dont ils devront donner en tout temps l'exemple à leurs élèves. Comment ne pas signaler les trop nombreux candidats qui, cherchant la sécante joignant les points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ de la parabole $C(y^2 - 2px = 0)$, écrivent d'abord $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. On ne leur a donc jamais appris que $x = \frac{y^2}{2p}$ donne une représentation rationnelle de C , que l'équation aux y des points communs avec la droite $\Delta(ux + vy + w = 0)$ s'écrit $u \frac{y^2}{2p} + vy + w = 0$, et que les fonctions symétriques des racines donnent immédiatement u, v, w , en fonction de y_1 et y_2 ?

Comment ne pas signaler le candidat qui, après avoir parlé de cercle harmoniquement circonscrit à la conique C ose écrire des groupements de termes tels que $4X + A\sqrt{AB}Y, 16 + A^2B^2, X^2 + 2p^2X - 2p^4$. On ne lui a donc jamais appris à vérifier l'homogénéité de ses calculs ?

Dans la recherche du lieu des centres des triangles U (ou T), les trois sommets du triangle jouaient évidemment des rôles symétriques. Pourtant 31 candidats ont cherché à placer le centre Ω d'un triangle U en se donnant d'abord arbitrairement, sur C , un sommet M_0 d'un tel triangle. Ils ont ensuite cherché la pente d'un côté de U issu de M_0 : le fait qu'il y ait deux côtés issus de M_0 , jouant des rôles symétriques, une fois M_0 fixé, ne les a pas troublés. Ayant obtenu une équation du troisième degré, la réalité de ses racines ne les a pas tourmentés. Ils ont alors porté dans une direction faisant 30° avec l'une des directions obtenues (dans un sens non précisé), un segment égal à la longueur de la corde interceptée, multipliée par $\frac{1}{\sqrt{3}}$... et ont abandonné leurs calculs plus ou moins tôt, sans rien obtenir.

Vingt-sept candidats ont introduit symétriquement les coordonnées des sommets $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3)$, liées par les relations qui expriment que ces points appartiennent à C ; ils ont exprimé que ce triangle est équilatéral en écrivant $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1$, ou en exprimant que l'orthocentre coïncide avec le centre de gravité. Certains d'entre eux ont pu terminer le I, 1°, aucun d'eux n'a pu aborder utilement le I, 2° : on a introduit des radicaux, on a cherché une représentation paramétrique de C en posant $x = \sqrt{A} \cos \varphi, y = \sqrt{B} \sin \varphi$, puis $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$... que d'héroïsme dépensé en vain dans les relations symétriques de t_1, t_2, t_3 !

Deux méthodes permettaient d'aborder rapidement l'étude proposée du lieu $\mathcal{Q}$ (I, 2°).

1) On pouvait écrire l'équation d'un cercle Γ , de centre $\Omega(\xi, \eta)$; les quatre points communs à C et Γ sont tels que $\Sigma x_i = \frac{4A\xi}{A-B}, \quad \Sigma y_i = \frac{4B\eta}{B-A}$.

Si trois de ces points forment un triangle U ,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3\xi, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 3\eta,$$

et le quatrième point M_4 est donné par $x_4 = \xi \frac{A+3B}{A-B}, \quad y_4 = \eta \frac{B+3A}{B-A}$.

Puisque M_4 est sur C , nécessairement

$$(1) \quad \xi^2 \frac{(A+3B)^2}{A} + \eta^2 \frac{(B+3A)^2}{B} - c^2 = 0.$$

Dix-neuf candidats ont utilisé cette méthode ; treize d'entre eux ont obtenu

l'équation (1) ; mais deux seulement se sont soucié de la réciproque : étant donné un point Ω , réel, sur la conique (1), existe-t-il un triangle U de centre Ω ? Le cercle Γ [$\Omega, \Omega M_1$] est réel ; il recoupe C en trois points $M_1 M_2 M_3$ tels que le centre de gravité coïncide avec le centre du cercle circonscrit ; l'un au moins de ces points, soit M_1 , est réel ; le milieu de $M_2 M_3$ étant l'homothétique de M_1 dans l'homothétie

$(\Omega, -\frac{1}{2})$, la droite, réelle, $M_2 M_3$ coupe Γ , donc C , en deux points réels M_2 et M_3 ;

le triangle $M_1 M_2 M_3$ est équilatéral, réel, et c'est alors seulement qu'on peut affirmer que le lieu $\mathcal{L}$ est la conique représentée par (1), lorsque celle-ci est réelle.

II) On pouvait aussi introduire le rayon R du cercle Γ , désigner par $\theta, \theta + \frac{2\pi}{3}, \theta - \frac{2\pi}{3}$ les angles polaires des vecteurs $\overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega M_2}, \overrightarrow{\Omega M_3}$, joignant Ω aux trois sommets de U . En exprimant que M_1, M_2, M_3 appartiennent à C , on obtient trois relations dont on peut déduire ξ, η, R , en fonction de θ . Cinquante et un candidats ont utilisé cette méthode, vingt et un ont obtenu correctement l'équation (1).

Plus élégamment, trois candidats ont introduit $t = e^{i\theta}$, et ont exprimé que le polynôme du quatrième degré dont les zéros donnent les t des points communs à C et Γ est de la forme $(t^3 - \lambda)(t - \mu)$, ce qui donne très rapidement

$$(2) \quad R^2(A + B) + 2(B\xi^2 + A\eta^2 - AB) = 0$$

$$(3) \quad \cos 3\theta = \frac{4B\xi}{c^2 R}, \quad \sin 3\theta = \frac{4A\eta}{c^2 R} \quad (c^2 > 0).$$

Les relations (3) entraînent

$$(4) \quad R^2 = \frac{16}{c^4} (B^2 \xi^2 + A^2 \eta^2).$$

La comparaison de (2) et de (4) montre que, nécessairement, Ω appartient à la conique (1).

Malheureusement, là encore, on n'a pas songé à la réciproque ; on s'est borné généralement à ajouter membre à membre les trois équations qui expriment que M_1, M_2, M_3 sont sur C , et comme on obtenait une relation entre ξ et η , on en a conclu immédiatement que c'était « l'équation du lieu demandé $\mathcal{L}$ ». Reposons donc la question : Ω étant un point réel de (1), existe-t-il un triangle U de centre Ω ? Ω étant un point réel de (1), (4) donne une valeur réelle pour R , compatible avec (2), d'après (1), et alors les formules (3) donnent à 2π près, l'angle 3θ , c'est-à-dire donnent les angles polaires $\theta, \theta + \frac{2\pi}{3}, \theta - \frac{2\pi}{3}$ des trois rayons de U : le lieu $\mathcal{L}$ cherché est donc la courbe (1) lorsqu'elle est réelle.

L'équation (1) est celle d'une conique propre, sauf dans le cas d'une hyperbole C dont les asymptotes font l'angle de 60° . Si C est dans l'angle aigu des asymptotes, (1) représente deux droites imaginaires, il n'existe pas de triangle U dont les sommets sont à distance finie ; si C est dans l'angle obtus des asymptotes, $\mathcal{L}$ comprend les deux directrices de C .

L'équation tangentielle de $\mathcal{C}$ a été trouvée par cinq candidats ; deux l'ont déduite de l'équation d'un côté

$$x \cos \theta + y \sin \theta + \frac{R}{2} - \xi \cos \theta - \eta \sin \theta = 0,$$

ξ, η, R, θ étant liés par (2) et (3) ; mais ils n'ont pas vu la présence du facteur $Au^2 + Bv^2$ au numérateur et au dénominateur de l'expression qu'ils ont donnée de w^2 . Trois autres l'ont obtenue directement en partant d'une sécante Δ

$$ux + vy + w = 0,$$

en évaluant la distance des deux points M_1 et M_2 communs à Δ et C ,

$$M_1 M_2^2 = \frac{4AB(u^2 + v^2)(Au^2 + Bv^2 - w^2)}{(Au^2 + Bv^2)^2},$$

en cherchant les coordonnées d'un point M_3 sur la médiatrice de M_1M_2

$$(5) \quad \begin{cases} x_3 = -\frac{Auw}{Au^2 + Bv^2} + \rho u \\ y_3 = -\frac{Bvw}{Au^2 + Bv^2} + \rho v \end{cases}$$

à une distance de Δ égale à $M_1M_2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, et en écrivant que M_3 est sur C , ce qui donne

$$(6) \quad (Au^2 + Bv^2 - w^2) [(3B - A)u^2 + (3A - B)v^2]^2 = 12ABw^2 (u^2 + v^2)^2.$$

Toute tangente à la courbe (6) coupant C en deux points réels, l'équation (6) est celle de $\mathcal{C}$.

Il est regrettable qu'une dizaine de candidats, qui avaient abordé les calculs précédents, ont cru que, dans les formules (5), ρ mesurait la distance de M_3 à Δ , et que la faute d'homogénéité, ainsi commise, leur ait totalement échappé par la suite.

Deux candidats seulement ont construit les courbes R et $\mathcal{C}$ du I, 4° ; ils ont oublié l'un et l'autre qu'aux points d'inflexion de R correspondent des rebroussements de $\mathcal{C}$. Mais ils ont su, l'un et l'autre, déduire d'une parabole asymptote à R une parabole asymptote à $\mathcal{C}$.

Trois candidats ont obtenu le lieu K du II, 2°, personne n'a obtenu le lieu $\mathcal{S}$.

Deux copies se détachent nettement des autres, avec les notes 17 et 16 ; les notes dépassant la moyenne sont 14 ; 13 ; 12,5 ; 12 (2 fois) ; 11,5 (4 fois) ; 11 (3 fois). Les notes les plus fréquemment données sont 6 et 1, chacune 13 fois ; la moyenne générale de l'épreuve est 4,99.

COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL : M. MILLOUX

Le problème, d'allure classique, ressort en gros de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Il comporte six paragraphes qui, dans l'ensemble, sont de difficulté graduée. Les deux derniers étaient réservés aux candidats à la fois très bons et très rapides. Quant aux quatre premiers, ils ne recèlent aucun piège vraiment sérieux ; leur but était double : préparer la venue des deux derniers paragraphes, et éprouver les connaissances des candidats sur certaines parties à la fois élémentaires et importantes du programme, telles que : définition et conditions d'existence de l'intégrale d'une fonction réelle continue, tantôt positive, tantôt de signe variable, dans un intervalle infini ; convergence uniforme ; maniement des majorantes, applications du théorème des résidus.

Avant de passer à des considérations d'ordre général, nous allons examiner un à un les six paragraphes, les réactions des candidats (141 ont composé en Analyse), et les erreurs les plus fréquentes. Pour mieux suivre ces observations, le lecteur est prié de se reporter à l'énoncé.

Premier paragraphe. — Un seul candidat a remis copie blanche. Presque tous les autres ont correctement traité les deux premières questions, mais se sont trouvés en général arrêtés par la dernière : limiter inférieurement par une constante numérique positive le module de $\cos(\pi z)$ sur les cercles de centre O et de rayon entier. Beaucoup de candidats ont commis des erreurs ; 20 seulement ont résolu cette question, partie en démontrant *correctement* que le module, considéré sur chaque cercle, est minimum sur l'axe réel, partie par une méthode géométrique intuitive, qui consiste à utiliser le résultat de la deuxième question et à ne considérer que les arcs de cercle situés dans une bande entourant l'axe réel, puis à faire intervenir la périodicité du module pour ne conserver, finalement, que des arcs de cercle issus de O et tendant vers un segment de l'axe imaginaire.

(Signalons une erreur de principe trouvée à de multiples exemplaires : le mini-

mum du module sur le cercle de rayon n est positif, donc la suite des minima est supérieure à une constante positive.

Deuxième paragraphe. — La première question consiste à placer le point X de façon que l'intégrale $I(X, 1, \frac{\pi}{2})$ soit absolument convergente. Presque tous les candidats ont attaqué cette question et trouvé le résultat correct, mais tant de fautes grossières ont été commises que 64 candidats ont 12 ou plus sur 20 pour cette question (le plus fréquemment 18 ou 20). Quelques erreurs seront signalées plus loin. Une faute assez fréquente, puisque commise par 34 candidats, provient de l'utilisation d'une majoration de la fonction à intégrer, sans la minoration en contre-partie : on n'obtient ainsi qu'une condition *suffisante* de convergence, que six candidats seulement ont conservée comme telle, honnêtement et intelligemment. Les 28 autres ont commis la regrettable confusion de transformer la condition suffisante en condition nécessaire et suffisante.

La deuxième question consiste à montrer que le domaine d'absolue convergence de l'intégrale précédente coïncide avec le domaine de convergence. Bien des sottises ont été dites dans cette question, pour laquelle 17 candidats seulement ont 12 ou plus sur 20. Parmi les erreurs commises par 14 candidats, une ou plusieurs fois au cours de ces deux premières questions, signalons :

$f(x)$ étant continue positive, pour que $\int_0^\infty f(x) dx$ existe, il faut, il suffit, ou il faut et il suffit que $f(x)$ tende vers 0 ; que $xf(x)$ tende vers 0. Pour que $\int_0^\infty f(x) \sin x dx$ existe, il faut que $f(x)$ tende vers 0 (la démonstration est magnifique : si la condition n'est pas réalisée, alors $f(x) > k > 0$, et chacun sait que $\int_0^\infty k \sin x dx$ diverge). Pour que $\int_0^\infty e^{-\alpha(x)} dx$ existe, il suffit que $\alpha(x)$ soit positif.

Ne passons pas sous silence de telles sottises : ne prouvent-elles pas qu'un groupe réduit de candidats ne perdrait pas leur temps en suivant à nouveau les cours de Mathématiques Générales ? Enfin, de trop nombreux candidats ont donné des solutions inconsistantes et très longues, alors qu'une simple représentation graphique de la fonction à intégrer les eût renseignés immédiatement.

La troisième question a eu encore moins de succès, malgré un énoncé charitable, où la deuxième formule de la moyenne est évoquée, 13 candidats ont eu 12 ou plus sur 20. Beaucoup de compositions sont très confuses ; 16 candidats commettent une erreur de principe qui, simplifiée, se présente comme suit : si $f(x)$, fonction continue et positive, est équivalente à $g(x)$ pour les grandes valeurs de x , alors les intégrales suivantes sont convergentes ou divergentes en même temps :

$$\int_0^\infty f(x) \sin x dx ; \quad \int_0^\infty g(x) \sin x dx,$$

les candidats ne sont pas tous faibles, aussi, proposons-leur de trouver eux-mêmes un contre-exemple, en utilisant, s'ils le veulent, la sinusoidé amortie classique, et en modifiant quelque peu, pour la seconde fonction, les arches d'ordonnées positives.

Troisième paragraphe. — La première question se présente comme une généralisation de celle du paragraphe précédent. De nombreux candidats l'ont traitée, mais 43 seulement d'entre eux ont 12 ou plus sur 20. On retrouve ici les mêmes erreurs que précédemment.

La deuxième question — calcul effectif de l'intégrale I par la méthode des résidus appliquée à un parallélogramme dont deux côtés s'éloignent indéfiniment — a eu plus ou moins de succès pour sa partie automatique. Avant tout, il s'agissait de démontrer correctement que les intégrales prises sur les côtés qui s'éloignent, tendent vers 0 ; neuf candidats seulement ont su justifier cette propriété fondamentale ; la plupart des autres n'y attachent aucune importance, ou trouvent de curieuses rai-

sons telles que la suivante : « Les deux extrémités du segment sur lequel on intègre s'éloignent sur deux parallèles, ils se rejoignent à l'infini, de sorte que l'intégrale est nulle. » Notons encore, au passage, l'expression : « pôle singulier essentiel ».

La dernière question (convergence de I vers 0) est immédiate sur le résultat ; 12 candidats l'ont réellement résolue.

Quatrième paragraphe. — La première question, bien traitée par neuf candidats, consiste à montrer que l'intégrale $I(X, \lambda, \omega)$ existe quel que soit X lorsque λ (positif ou nul) est inférieur à 1 ; c'est une conséquence immédiate de la majoration du cosinus indiquée dans le premier paragraphe. Beaucoup de candidats ont gâché leur solution en commettant l'erreur de considérer comme équivalents $e^{\alpha(x)}$ et $e^{\beta(x)}$ lorsque $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont équivalents.

Cette dernière erreur se retrouve dans la question suivante (modification des demi-droites d'intégration sans modification de la valeur de I) ; il s'y joint l'essoufflement des candidats, dont six ont 12 ou plus sur 20 pour cette question.

La fin du paragraphe, un peu plus délicate, et pour laquelle on pouvait utiliser partiellement la majoration du début, n'a été réussie que par deux ou trois.

Cinquième paragraphe. — Les 17 candidats qui l'ont abordée n'y ont à peu près rien vu. Cependant, la première partie (étude des coefficients A_n) n'était vraiment pas difficile dans le cas $\lambda < 1$; pour le cas $\lambda = 1$, il fallait remplacer le cosinus hyperbolique du dénominateur par l'exponentielle équivalente qui s'impose, et surtout porter toute son attention à l'erreur commise ; la série entière étudiée se trouvait décomposée en deux séries à rayons de convergence différents. Quant à la justification du développement formel, on y arrive par des considérations d'uniforme convergence ; c'est une des questions les plus délicates du problème.

Sixième paragraphe. — Celui-ci commence par des considérations du même genre, se développe et conduit à la conclusion du problème, dont il met en lumière

l'unité : la fonction $\frac{1}{ch \frac{X}{2}}$ est développable en série de polynômes dans le plan X

coupé suivant deux demi-droites situées sur l'axe imaginaire, et issues des zéros du cosinus hyperbolique les plus proches de l'origine.

Quatre candidats ont abordé ce paragraphe ; deux sont très faibles et cette constatation d'inconscience ne surprendra personne ; un autre est plutôt moyen ; l'échec de ces trois candidats est total. Par contre, après la défaillance générale du paragraphe précédent, le correcteur a eu l'heureuse surprise de trouver une composition où, après un début quelque peu hésitant dans son développement, mais bien tracé, l'essentiel de ce sixième paragraphe a été magistralement traité. Il est regrettable que le reste de la composition soit loin d'être de la même valeur, et qu'il n'ait pas permis de réserver au candidat intéressé la place de premier en Analyse.

Conclusions. — De l'exposé qui vient d'être fait, il résulte clairement qu'à part le cas d'exception précédent, les candidats n'ont pu être jugés que sur les quatre premiers paragraphes, les plus faciles. Le meilleur d'entre eux a eu la note 19. C'est, en quelque sorte, l'unité de mesure. Sa composition est presque partout parfaite. Complète, elle est, de plus, concise, et compte seulement cinq pages et demie de rédaction ; cette remarque peut servir d'avis à ceux de ses concurrents qui ont remis de 15 à 20 pages inconsistantes, où l'on ne trouve rien de précis ni de rigoureux.

Les deux suivants (note : 16) sont moins parfaits que le premier, mais ils présentent de très solides qualités. L'un d'eux est celui qui a résolu le dernier paragraphe.

Puis les notes se dispersent, après deux bonnes compositions (note : 14,5) ; elles s'affaiblissent rapidement : dix candidats ont la moyenne ou davantage ; vingt et un candidats ont 7 ou plus. Ce sont les « isolés ». Ensuite, la masse vient former la courbe en cloche classique, avec maximum pour la note 3. De 4,5 à 6,5 inclus, on

trouve quarante candidats, dont le trentième avec 6, le quarantième avec 5,5, le cinquantième avec 5, le soixantième avec 4,5. De 0 à 4 inclus, quatre-vingts candidats viennent étaler pour la plupart des notions incertaines d'analyse.

Les généreux coefficients adaptés aux différentes questions auraient permis aux candidats ayant correctement traité les deux premiers paragraphes d'avoir 9,5 ; les trois premiers auraient rapporté 13. Il semble que les résultats globaux, qui sont faibles (moyenne générale : 4,6 sur 20) eussent été meilleurs si chaque candidat, mesurant ses forces, avait imposé une juste limite à son ambition, en renonçant au besoin à s'attaquer à des questions délicates, pour traiter avec plus de soin et de rigueur ce qui était à sa portée. Certains, peu nombreux, l'ont compris, et leurs notes s'en ressentent avantageusement.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE : M. ROGER

Le problème proposé comportait trois parties. Presque tous les candidats ont porté leur effort sur la première ; aucun n'a rien donné de valable sur la deuxième, et bien rares sont ceux qui, sur la troisième, ont obtenu des résultats substantiels, encore que trop souvent entâchés d'erreurs.

Dans la première partie, beaucoup de candidats ont vu que la trajectoire du centre C de la roue avant était portée par une droite ; mais pas assez ont donné de ce fait une démonstration rigoureuse. On pouvait, à l'ensemble formé par la roue avant, son essieu et la fourche, appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe CD sur lequel il était monté fou (pour les roues (A) et (B), on a trop souvent oublié que les réactions du châssis avaient, outre une résultante générale passant par le centre correspondant, un moment résultant en ce point). D'où $\psi' + \delta' = C^* = 0$ d'après les conditions initiales, puis $\psi + \delta = C^* = 0$ en choisissant convenablement l'orientation de O_1x_1 . Ensuite, tirant parti de la nullité de la vitesse absolue de la molécule de la roue au contact du sol (roulement sans glissement), on pouvait montrer que le support de la vitesse absolue du centre C gardait une orientation fixe.

Compte tenu de $\psi + \delta = 0$, les conditions de roulement sans glissement pouvaient toutes s'intégrer, ce qui donnait une représentation analytique des trajectoires des points O et G. Trop peu de candidats ont obtenu ces trajectoires par des considérations cinématiques simples : on pouvait démontrer que la vitesse absolue du point O était portée par Ox (soit au moyen de l'axe instantané de rotation du châssis, soit par demi-somme des vitesses des centres A et B) ; d'où la tractrice (courbe aux tangentes égales à b) portant la trajectoire de O et les développantes de chaînette (courbes parallèles à la précédente), portant les trajectoires de A et B.

Pour ce qui est de la discussion du mouvement, pas assez de candidats ont compris que, les résultats précédents étant acquis, l'intégrale des forces vives résolvait entièrement la question. Compte tenu des conditions de roulement sans glissement et de l'intégrale première $\psi + \delta = 0$, elle pouvait se mettre sous la forme :

$$F(\psi) \cdot \psi'^2 = 2 \frac{\Gamma_0}{x} (\cos x \alpha_0 - \cos x \alpha) \text{ où } \alpha = \alpha_0 - \frac{l}{a} (\psi - \psi_0) + \frac{b}{a} L \frac{\sin \psi}{\sin \psi_0}$$

d'où la discussion du mouvement.

Dans la troisième partie, trop rares sont les candidats qui ont vu qu'à partir des conditions de roulement sans glissement et des équations de Lagrange avec multiplicateurs, l'élimination de ces multiplicateurs, des variables linéaires x et y et de l'angle β conduisait d'une manière simple aux équations définissant les variables angulaires ψ , φ et α .

Les fautes dans l'expression de la force vive (au I comme au III) ont été innombrables ; depuis la confusion du centre de gravité G du chariot tout entier avec celui du châssis jusqu'aux oublis les plus grossiers dans les composantes des vecteurs rotations. C'est ainsi qu'au III, α et β ont été trop souvent employés là où il eût fallu $\varphi + \alpha$ et $\varphi + \beta$.

En définitive aucun candidat ne tranchait franchement sur l'ensemble des autres. Ainsi les bonnes notes (un 17, deux 16, deux 15, un 14 1/2, deux 14) ont récompensé des copies dont les auteurs avaient fait preuve de plus ou moins de qualités de fonds et de forme. Puis les notes se sont échelonnées régulièrement (cinq 13, quatre 12 1/2, quatre 12, un 11 1/2, un 11, trois 10 1/2, trois 10) ; au total 29 notes supérieures à la moyenne ; puis 29 jusqu'à 7 1/2, 31 jusqu'à 5 et 48 au-dessous.

EPREUVES ORALES

Elles ont eu lieu au lycée Saint-Louis pour les quarante-six admissibles. L'un d'eux déclara abandonner l'épreuve, le 15 juillet, après avoir pris connaissance du texte de sa première leçon.

Chacun des admissibles avait à traiter une leçon de Mathématiques Élémentaires et une leçon de Mathématiques Spéciales. Voici d'abord la liste de ces quarante-cinq questions : les numéros accompagnant chacun des textes d'« Élémentaires » et de « Spéciales » indiquent le groupement, effectué par le Jury avant le tirage au sort des sujets, des deux leçons exposées par un même candidat.

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

1. Cosmographie : Soleil : mouvement propre apparent sur la sphère céleste. Ecliptique. Année tropique, année sidérale. Heure sidérale ; heure moyenne (Classe de Mathématiques).
2. Géométrie : Une tangente variable à une parabole détermine sur deux tangentes fixes des divisions semblables. Réciproque. Applications (Classe de Mathématiques Supérieures).
3. Définition et signification géométrique de la dérivée d'une fonction pour une valeur donnée de la variable. Application à la détermination des tangentes aux courbes représentatives du trinôme du second degré et de la fonction homographique (Classe de Première C et Moderne).
4. Formules de transformation en produit de la somme ou de la différence de deux sinus et de deux cosinus. Problème inverse. Donner des applications (Classe de Mathématiques).
5. Géométrie : Hyperbole définie par ses asymptotes et un point (classe de Mathématiques Supérieures).
6. Première leçon sur la résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques à une inconnue (l'étude de $a \cos x + b \sin x = c$ n'est pas comprise dans la leçon) (Classe de Mathématiques).
7. Cosmographie : Inégalité des jours et des nuits (Classe de Mathématiques).
8. Conique définie par un foyer, la directrice correspondante et l'excentricité ; tangente en un point ; lieu de la projection orthogonale du foyer sur les tangentes (Classe de Mathématiques).
9. Problèmes du second degré (Les théories relatives au signe du trinôme du second degré, à sa représentation graphique, ont fait l'objet de leçons antérieures) (Classe de Première C et Moderne).
10. Géométrie descriptive et géométrie cotée (les changements de plan, rotations, rabattements, ont été étudiés). Problèmes de distances et d'angles (Classe de Mathématiques).
11. La théorie de l'inversion dans le plan et dans l'espace est supposée faite. Indiquer et traiter des applications (Classe de Mathématiques).
12. Résolution et discussion de l'équation $a \cos x + b \sin x = c$. On traitera complètement un exemple numérique à l'aide d'une table de logarithmes (Classe de Mathématiques).
13. Géométrie (Les notions de pôle et polaire par rapport au cercle sont supposées

connues). Transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle. Applications (Classe de Mathématiques Supérieures).

14. Même sujet que 5.

15. Arithmétique : Définition et propriétés élémentaires des nombres premiers. Application aux diviseurs et aux multiples (Classe de Mathématiques).

16. Trigonométrie : Exercices sur la résolution et la discussion de quelques équations trigonométriques simples à une inconnue (Classe de Mathématiques).

17. Similitude plane directe définie comme produit d'une homothétie et d'un déplacement. Forme canonique (Classe de Mathématiques).

18. Parallélisme des droites et des plans (Classe de Première C et Moderne).

19. Cinématique. Vecteur vitesse et vecteur accélération. Application au cas du mouvement circulaire uniforme (Classe de Mathématiques).

20. Fonction logarithme népérien de x (Lx). Formule $Lab = La + Lb$. Logarithme vulgaire (Classe de Sciences Expérimentales).

21. Statique. Équilibre d'un point matériel pouvant glisser sans frottement ou avec frottement sur un plan ou une sphère. Réaction. Même question pour un point sur une droite ou sur un cercle. Exemples (Classe de Mathématiques).

22. Exemples de fonctions de la forme $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ où les coefficients sont numériques. Représentation graphique (Classe de Mathématiques).

23. Première leçon sur la mesure des grandeurs. On ne traitera que de la notion de fraction ; égalité, inégalité entre fractions ; opérations sur les fractions (Classe de Mathématiques).

24. Droite et plan perpendiculaires (Classe de Première C et Moderne).

25. Géométrie. Surface cylindrique à bases circulaires et surface conique à directrice circulaire. Définitions : section par un plan parallèle au plan de la directrice. Plan tangent (Classe de Première C et Moderne).

26. Volume des parallélépipèdes et des prismes (Classe de Première C et Moderne).

27. Étude des fonctions $\frac{1}{x}, \frac{a}{x}$. Représentation graphique (Classe de Seconde C et Moderne).

28. Algèbre. Étude de la variation et construction de la courbe représentative de deux fonctions à coefficients numériques du type $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ a' n'étant pas nul (Classe de Mathématiques).

29. Combinaisons. Probabilités simples (Classe de Sciences Expérimentales).

30. Géométrie. Problèmes sur la détermination et la construction d'un cercle satisfaisant à des conditions telles que : 1) passer par un point ; 2) être tangent à une droite ; 3) être tangent à un cercle ; 4) être orthogonal à un cercle, etc... (Classe de Mathématiques Supérieures).

31. Exposer les règles d'emploi des logarithmes décimaux et l'usage des tables à cinq décimales (Classe de Mathématiques).

32. Algèbre. Variation du trinôme du second degré ; représentation graphique. Application à la comparaison d'un nombre aux racines d'une équation du second degré (Classe de Première C et Moderne).

33. Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues (Classe de Seconde C et Moderne).

34. Géométrie. Faisceaux linéaires de cercles. Points limites. Faisceaux orthogonaux (on n'emploiera pas les procédés de la géométrie analytique) (Classe de Mathématiques Supérieures).

35. Géométrie cotée. Rabattement d'un plan sur le plan horizontal, angle de deux droites, distance d'un point à une droite (Classe de Première C et Moderne).

36. Géométrie. Centre de rotation de deux figures planes directement égales. Exercices (Classe de Mathématiques Supérieures).

37. Equivalence des deux définitions suivantes : 1° lieu des centres des cercles passant par un point, tangents à un cercle ou à une droite ; 2° lieu des points dont le rapport des distances à un point et à une droite est constant (Classe de Mathématiques).

38. Division harmonique. Faisceau harmonique. Lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant (Classe de Seconde C et Moderne).

39. Géométrie plane. Cercles passant par deux points donnés, tangents à un cercle donné. Intersection d'une droite avec une ellipse et avec une hyperbole définies par un foyer et le cercle directeur ayant pour centre l'autre foyer (Classe de Mathématiques).

40. Exemple de résolution trigonométrique d'un triangle dans un cas non classique ; cet exemple devra comporter une solution géométrique. On ne demande pas d'application numérique (Classe de Mathématiques).

41. L'inversion dans l'espace (Classe de Mathématiques).

42. Inégalités dans les triangles. Perpendiculaire et obliques menées d'un point à une droite (Classe de Seconde C et Moderne).

43. Homothétie dans l'espace ; la translation a été étudiée (Classe de Mathématiques).

44. On considère une conique définie comme lieu des centres des cercles passant par un point et tangents à une droite ou à un cercle. On suppose connues la théorie de la tangente en un point et celle des asymptotes. Problèmes sur les tangentes. Théorèmes de Poncelet (Classe de Mathématiques).

45. Variation de la fonction $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$. Représentation graphique (on suppose étudiée la fonction $\frac{a}{x}$) (Classe de Première C et Moderne).

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

1. Emploi de la dérivée pour l'étude de la variation d'une fonction (Classe de Mathématiques Supérieures).

2. Les premières notions sur les séries étant acquises, exposer les méthodes d'étude de la convergence des séries à termes positifs.

3. Application du calcul des intégrales simples à la rectification des courbes (planes et gauches). Exemples.

4. Séries entières à coefficients réels d'une variable réelle ; intervalle de convergence ; à l'intérieur de l'intervalle de convergence on obtient la dérivée ou une primitive de la fonction définie par la série en dérivant ou en intégrant terme à terme.

5. L'intégration des fractions rationnelles en x , ainsi que des polynômes entiers en $\sin x$ et $\cos x$ ayant été traitée, on exposera les méthodes qui permettent d'intégrer une fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$.

6. Etude des branches infinies des courbes définies, en coordonnées polaires, par une équation $\rho = f(\omega)$. Exemples numériques (Classe de Mathématiques Supérieures).

7. Etude de la fonction logarithmique définie comme une primitive de la fonction $\frac{1}{x}$ (Classe de Mathématiques Supérieures. On rappelle que l'intégrale définie n'est pas au programme de cette classe).

8. Séries à termes quelconques réels ou complexes, séries absolument convergentes. Multiplication des séries absolument convergentes. (L'étude des séries à termes positifs est supposée faite).

9. Mécanique. Mouvement d'un point sous l'action d'une force centrale attractive proportionnelle à la distance.

10. Courbes en coordonnées polaires [$\rho = f(\omega)$] ; détermination de la tangente en un point ; disposition par rapport à cette tangente. Application à des exemples simples (Classe de Mathématiques Supérieures).

11. Mécanique. Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné avec ou sans frottement, la vitesse initiale étant dirigée suivant une ligne de plus grande pente.

12. Géométrie descriptive. Première leçon sur le paraboloïde hyperbolique (l'étude analytique ou géométrique de cette surface est supposée connue).

13. Intégration de $f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, $a \neq 0$, où $f(x, y)$ est une fraction rationnelle.

14. Première leçon sur les équations différentielles du premier ordre. Champ de tangentes, courbes intégrales. Equations à variables séparées, cas simples qui s'y ramènent. (Le cas des équations linéaires ne fait pas partie de la leçon).

15. Enveloppe, définie paramétriquement, d'une droite dont l'équation dépend d'un seul paramètre. Point caractéristique (Classe de Mathématiques Supérieures).

16. Application des quadratures à l'évaluation de l'aire d'une zone de révolution et du volume d'un solide de révolution.

17. Formule de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Série de Taylor.

18. Etude de la fonction $\varphi(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ étant positive et décroissante pour $x \geq x_0$. Exemples. Application aux séries.

19. Première leçon sur les déterminants.

20. Courbe gauche. Tangente, plan osculateur.

21. Systèmes d'équations linéaires. Résolution au moyen des déterminants.

22. Mécanique. Travail, le long d'une trajectoire, pour une loi donnée du mouvement, d'une force pouvant dépendre de la position du point mobile, de sa vitesse et du temps. Cas où l'expression de ce travail se simplifie.

23. Géométrie descriptive. Intersection de deux cônes du second ordre ayant en commun une conique donnée.

24. Géométrie analytique. Génératrices rectilignes des surfaces du second ordre.

25. Intégration des équations différentielles, $y'' + ay' + by = Ae^{mx}$, A, a, b, m constantes réelles ; on ne supposera pas traitée de théorie générale pour les équations d'ordre supérieur au premier.

26. Enveloppe d'une famille de courbes planes représentées par $f(x, y, \lambda) = 0$.

27. Géométrie analytique. Lieux géométriques dans le plan.

28. Courbes gauches ; normales, normale principale. Courbure des courbes gauches.

29. Courbure d'une courbe plane. Développée d'une courbe plane.

30. Intégration d'un polynôme en $\sin x$ et $\cos x$. Application à l'intégration de certaines fonctions rationnelles.

31. Géométrie analytique. Foyers et directrices dans les coniques.

32. Géométrie analytique. Cônes : propriétés principales ; forme de l'équation ; sa recherche.

33. Birapport de quatre points d'une conique et de quatre tangentes à une conique. Divisions homographiques et divisions en involution sur une conique.

34. Extension au domaine complexe des notions de limite d'une suite, convergence d'une série, absolue convergence. Multiplication de deux séries absolument convergentes.

35. Exposer sur des exemples simples les méthodes pratiques de recherche des points doubles d'une courbe plane définie paramétriquement (Classe de Mathématiques Supérieures).

36. Séries absolument convergentes ; multiplication de deux séries absolument convergentes.

37. Théorème de Rolle et formule des accroissements finis ; représentation gra-

phique. Emploi de la dérivée pour l'étude des variations d'une fonction. (On se bornera aux théorèmes généraux, sans traiter aucun exemple).

38. Formes linéaires. Rang d'un système de formes. Notion d'indépendance. On pourra, ou non, supposer acquise la théorie des équations linéaires.

39. Fonction inverse d'une fonction continue monotone. Exemples : $\sqrt[n]{x}$, Arc sin x , Arc cos x , Arc tg x . Représentations graphiques (Classe de Mathématiques Supérieures).

40. Systèmes de vecteurs glissants. Moment résultant. Axe central. (La théorie du moment d'un vecteur par rapport à un point est supposée connue) (Classe de Mathématiques Supérieures).

41. Etude du mouvement rectiligne sous l'action d'une force dépendant seulement de la distance x du point mobile à un point fixe de sa trajectoire ; choisir un exemple où l'on peut pousser jusqu'au bout le calcul de x en fonction du temps, et un exemple où l'intégrale des forces vives permet de déterminer l'allure du mouvement.

42. Surface ; plan tangent ; cas où l'on donne l'équation sous la forme $z=f(x, y)$; cas de la représentation de la surface par $x=f(u, v)$, $y=g(u, v)$, $z=h(u, v)$.

43. L'étude des exposants rationnels est supposée faite. Définition de la fonction a^x pour x réel quelconque. Etude de ses propriétés (on ne parlera pas de la dérivation). On ne considérera pas comme connue la fonction logarithmique et on n'en parlera pas (Classe de Mathématiques Supérieures).

44. Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables. Exemples.

45. Surfaces du second ordre : points conjugués, plan polaire d'un point ; droites conjuguées.

[Les leçons de Mathématiques Spéciales où l'on ne spécifie pas : Classe de Mathématiques Supérieures, devaient être traitées dans la classe de Mathématiques Spéciales].

Il y a peu de leçons élémentaires qui aient présenté des lacunes graves. Cependant ce ne fut pas le cas pour la leçon de cosmographie sur le mouvement apparent du soleil ; les élèves y auraient appris que la ligne des apsides coïncide avec celle des solstices ; n'auraient rien conçu de net sur les trajectoires des deux soleils fictifs qu'il est coutume d'introduire pour la définition du jour solaire moyen. Tout candidat à l'agrégation doit avoir médité et analysé approximativement les inégalités dites « équation du centre » et « réduction à l'équateur » qui expliquent le mouvement du soleil en ascension droite.

Dans la leçon d'Elémentaires n° 2, l'existence d'une parabole tangente à une droite T_1 en un point M_1 , à une droite T_2 en un point M_2 , n'a pas été justifiée. De même l'existence d'une parabole tangente à quatre droites données.

A propos des représentations graphiques en algèbre, peu de candidats s'émeuvent de la possibilité d'adopter des unités différentes pour les deux axes de coordonnées, alors que le professeur de physique profite couramment de cette latitude. Que vaut, dans ces conditions, l'affirmation que la pente d'une droite est la tangente de son inclinaison sur l'axe des x ? Y a-t-il deux sortes d'hyperboles équilatères représentatives de $y = \frac{1}{x}$, selon qu'on adopte ou non la même unité pour l'axe des x et l'axe des y ?

Il nous faut regretter ici que l'effort moderne pour rendre l'enseignement moins dogmatique soit totalement indifférent à la plupart des étudiants préparant l'agrégation et qu'il n'y ait aucune osmose entre le travail qui s'accomplit dans les classes et les efforts de mémoire que ces étudiants considèrent comme nécessaires et suffisants pour apprendre à être en mesure d'enseigner les mathématiques.

En voici un exemple ; dans la leçon de mathématiques élémentaires n° 4, un candidat veut traiter comme application, un peu prématurée, le calcul de simplification

de l'expression $S = \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2} + \dots + \cos \frac{nx}{2}$, (sans signaler d'ailleurs que n est un entier impair).

Au lieu d'employer à cet effet un procédé qui est nettement antinaturel (multiplions les deux membres de l'égalité précédente par $2 \sin \frac{x}{2}$) que ne s'est-il avisé de partir de la formule qu'il avait établie $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$. Il apparaît que si on applique cette formule en prenant pour p et q les termes successifs d'une progression arithmétique, on aura une suite de relations où $2 \sin \frac{p-q}{2}$ jouera le rôle de facteur constant, et où les premiers membres seront les accroissements successifs de la fonction $\sin x$ lorsqu'on donne à x les valeurs successives des termes de la progression arithmétique ; d'où, par addition, une formule donnant $\sin l - \sin a$, a et l étant le premier et le dernier terme de la progression, de raison r . Si donc $\sin \frac{r}{2}$ est non nul, on aperçoit ainsi le moyen de transformer une somme de termes du type $\cos \frac{p+q}{2}$ dont les arguments $\frac{p+q}{2}$ sont, eux aussi, en progression arithmétique.

L'auteur de la leçon sur l'inégalité des jours et des nuits a gravement compromis son succès en faisant un calcul où il supposait que la déclinaison du soleil varie proportionnellement au temps ! C'est tourner trop le dos aux idées de fonctions (non linéaires), de maximum et de minimum, et le jury a sanctionné sévèrement cette faute. Décidément, on ne distingue pas bien l'enseignement de la cosmographie en Mathématiques de celui du même nom en classe de Philosophie, si grossièrement qualitatif et anecdotique parfois.

La leçon sur les problèmes du second degré a été cette année mieux réussie qu'à l'habitude ; mais en conseillant impérieusement de former, dans les discussions, le traditionnel Δ avant toute autre constatation, on fausse un peu les idées des élèves : au delà du second degré, personne ne sait plus l'expression qui jouerait le rôle de Δ ; cependant, on peut avoir à discuter des équations de degré supérieur au second, et l'étudiant en a vu des exemples en Mécanique.

La leçon n° 11 a pour objet d'apprendre à l'élève à utiliser des méthodes de transformation des figures et, ce qui est plus malaisé, à conclure à des propriétés, nouvelles, de figures dont l'examen direct n'est pas commode. c'est-à-dire familier à l'élève. Chaque application a un caractère dualistique à souligner : si, par exemple, en transformant une propriété simpliste comme celle de la relation entre les distances mutuelles de trois points alignés, on obtient une relation entre côtés et diagonales d'un quadrilatère inscriptible — il reste encore à considérer une nouvelle figure où la donnée est un tel quadrilatère *arbitraire*, et à s'assurer que par un processus inverse, le résultat découvert (théorème de Ptolémée) s'applique à cette figure.

Les élèves peuvent avoir l'impression que ce théorème, ne servant que rarement, est une acquisition de pure curiosité. Nous serions heureux qu'une telle impression soit dissipée : il suffirait de signaler qu'à la naissance de la trigonométrie, on évaluait le sinus d'une somme ou différence d'arcs en faisant usage de ce théorème de Ptolémée.

Ce qui a paru mal conçu dans cette leçon, c'est l'énumération, qui n'était qu'une ébauche, de ce que deviennent les figures habituelles dans une inversion quelconque. Cela n'exerce pas le débutant à choisir heureusement l'inversion particulière qui lui permettrait de simplifier un problème donné.

Comme à l'ordinaire, la leçon sur l'équation $a \cos x + b \sin x = c$ a été franchement dogmatique. Il y a deux recettes, celle qui consiste à poser $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, celle

où l'on part de $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$. Mais la nécessité de présenter en fin de leçon une application numérique utilisant les tables a sans doute été la cause de cette présentation abrégée du sujet.

Dans la leçon 14, le candidat s'est illusionné : ce n'est pas la même chose de partir d'une hyperbole donnée élémentairement, et de partir, en sens inverse, d'une équation en axes obliques $XY = C''$. Dans cette seconde éventualité, il faut *mettre en place* une hyperbole qui se confond avec le lieu défini par la dite équation. D'ailleurs l'exemple de la constante nulle est de nature à laisser planer un doute sur la valabilité de cette réciproque.

Dans une leçon sur les nombres premiers, il faut tendre à donner un modèle logique et toute incorrection de langage y prend un fâcheux relief.

Nous avons touché au maximum du vague et du fuligineux dans l'étude du vecteur vitesse et du vecteur accélération (leçon 19). Une notion bien savante et mal précisée, de mouvements équivalents, a paralysé le candidat, rivé à ses notes : il a paru mépriser la clarté de l'exposé traditionnel, ce qui est une prise de position *a priori* fâcheuse pour réussir.

Certes, il y a bien des exposés traditionnels qui sont très perfectibles, et le jury sait à l'occasion apprécier un travail constructif de bonne logique, comme celui accompli par les auteurs de deux excellentes leçons de géométrie de la classe de Première (leçons 18 et 24).

Dans les leçons concernant l'homothétie et la similitude, il est concevable que l'emploi des vecteurs hypnotise un peu trop les candidats, qui envisagent volontiers, à titre de réciproque une proposition du type suivant : « Toute transformation qui associe à *un* vecteur d'une figure un vecteur de la figure transformée (donnant lieu avec le premier à un certain lien, à la fois angulaire et métrique) », est, etc... Il est très important de substituer, dans cet énoncé « *tout* vecteur » à « *un* vecteur », et il serait largement suffisant de se borner à considérer un vecteur tel que $\overrightarrow{AM}$, A étant un point fixe et M pouvant désigner *tout* point de la figure. On oppose souvent à la notion d'homothétie celle de translation, qui, le plus tôt que possible, devrait être annexée à l'homothétie.

Le recours à une démonstration purement vectorielle pour l'alignement des centres d'homothétie dans le produit de deux homothéties est certes un exercice non dénué d'intérêt, mais qui n'éclaircit pas la question autant que la considération des droites invariantes, si directement simple.

Dans une leçon sur le logarithme népérien en sciences expérimentales, que venait faire le théorème de la projection d'une aire plane ? L'emploi des aires est permis à ce stade, mais il n'a rien d'indispensable, et il faut, pour rester dans le climat de cette classe, adoucir l'âpreté de la théorie générale de l'aire limitée par une courbe, l'axe des abscisses, et deux ordonnées ; ce qui n'a guère été fait.

Deux bonnes leçons sur l'étude des fonctions du type $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, et $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, encore que cette dernière n'ait pas été exempte de naïvetés : « $y^2 = 2px$ représente une parabole, parce que x s'exprime par un trinôme du second degré en y . »

La leçon sur les fractions ordinaires mérite d'être soigneusement méditée : si l'origine de l'introduction de ces fractions est la considération de la mesure des grandeurs, la théorie arithmétisée des symboles $\frac{n}{a}$ gagne à conserver une certaine primauté : elle la manifeste dès que la condition d'égalité de deux fractions, établie grâce à une réduction au même dénominateur, apparaît, non seulement comme nécessaire pour l'égalité des grandeurs que ces fractions mesurent, mais aussi comme

suffisante, quelle que soit d'ailleurs la grandeur (non nulle) prise comme unité. Cette considération se retrouve opportune à propos de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et permet d'en saisir sans vérification la raison profonde.

En terminant la théorie des fractions par la notion de division, on oublie trop souvent de signaler qu'une fraction est le quotient de son numérateur par son dénominateur !

Une leçon sur l'emploi des logarithmes (n° 31) a été tout à fait fantaisiste en matière d'approximations, et utilisait l'affirmation que $\text{Log}(1 + \epsilon)$ est équivalent à ϵ , Log désignant un logarithme de base quelconque ! L'explication de l'usage des

symboles $S = \log \frac{\sin x}{x}$, $T = \log \frac{\text{tg } x}{x}$ nécessite absolument une double notation pour

la mesure d'un petit angle en radians (soit x) et sa mesure en centigrades (n_x , par exemple) qui est indiquée dans les tables.

La variation du trinôme du second degré, en Première, ne doit pas reposer sur des théorèmes généraux relatifs à des dérivées qui sont hors programme.

La leçon de Première, sur le rabattement d'un plan sur le plan horizontal a révélé une ignorance stupéfiante de la géométrie cotée ; le candidat se donnant, avant tout autre propos, une charnière et édifiant chaque fois les données des problèmes traités à partir de cette charnière.

Le texte de la leçon 37 indiquait assez clairement qu'il était complètement inutile de parler d'ellipse, d'hyperbole, de parabole, d'intérieur et d'extérieur, et un lourd mélange de toutes ces notions, plein de dogmatisme, a remplacé dans cette leçon l'insistance sur les choses essentielles, malgré la perche tendue charitablement au candidat, dans la rédaction de l'énoncé.

L'étude des cercles tangents à un cercle (C), et passant par deux points A et B, ne devrait laisser aucun doute sur la fixité de l'intersection avec AB de l'axe radical de (C) avec un cercle quelconque passant par AB. La saine méthode consiste à laisser tout d'abord de côté l'hypothèse du contact et à étudier franchement le problème de l'enveloppe de l'axe radical considéré plus haut.

Signalons une excellente leçon sur la résolution d'un triangle dans un cas non classique, où l'auteur ne s'est pas inséré dans une « tradition des cas non classiques », et a accompli un effort méritoire et très éducatif.

Une leçon sur les tangentes à une conique et le théorème de Poncelet a été marquée par trop d'imprécision dans la technique des angles de droites ou de vecteurs, point qui peut sembler secondaire en soi ; mais il est très opportun dans les classes d'exercer les élèves à cette technique, qui a apporté aux anciens exposés de très nets progrès.

Si l'on considère les leçons de Spéciales, qui ont été beaucoup moins réussies que celles d'Elémentaires, elles se rattachent généralement à trois espèces, de caractères assez différents :

1° celles qui comportent une initiation aux notions essentielles de l'analyse, et où les qualités d'analyste du candidat sont évidemment passées au crible (n° 2, 3, 4, 7, 8, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 25, 34, 36, 37, 38, 43, 44) ;

2° celles de pure technique, où ce candidat doit s'affirmer au moins supérieur à un bon élève de Mathématiques Spéciales, classe dont on peut estimer qu'il doit garder un souvenir précis, et où le choix d'exemples intéressants est un élément important de l'appréciation (n° 1, 5, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 22, 23, 26, 27, 30, 32, 35, 39, 41) ;

3° celles touchant à des questions fondamentales de géométrie analytique ou de mécanique qui dépassent le cadre des Spéciales, mais dont tout caractère trop théorique est peu désirable au niveau de l'initiation (n° 11, 20, 24, 28, 29, 31, 33, 40, 42,

45). Ces leçons jouent un rôle intermédiaire entre ceux des leçons du premier et du second groupe. La tendance constante des étudiants à les concevoir comme des leçons du programme de licence n'est pas soutenable : cependant elles permettent de juger, presque autant que celles du premier groupe, l'admissible sur des qualités de fond.

Les lacunes constatées ont concerné toutes ces leçons, de genres fort divers, mais surtout celles où le maître a à faire un choix bien équilibré entre ce qui est théorie et application ; celle-là étant généralement trop poussée aux dépens de celle-ci.

Les meilleures leçons, presque parfaites, ont été faites sur les sujets 24, 19, 45. Toutefois, la leçon sur les déterminants, d'un caractère moderne, a manqué de clarté et de précision sur la distinction en deux espèces des permutations de n objets numérotés de 1 à n , et sur les propriétés élémentaires du « groupe alterné » des substitutions portant sur ces permutations.

Trop peu d'applications instructives dans la leçon relative aux enveloppes, et dans celle relative aux lieux géométriques (dans le plan). Le texte de la leçon relative à $y'' + ay' + by = Ae^{mx}$ a été mal compris, l'auteur l'ayant alourdie de généralités inutiles dont on lui suggérerait de se passer, et n'ayant, par suite, pu la terminer : la partie fondamentale était la théorie des intégrales linéairement indépendantes de l'équation sans second membre, qui a été cependant bien esquissée.

Un lapsus non corrigé dans la leçon sur la courbure d'une courbe plane a fait très pénible impression, le développement de Maclaurin-Young d'une fonction y de x étant écrit sous la forme $y = y_0 + xy'_0 + \frac{x^2 + \varepsilon}{2} y''_0 !$

Dans la leçon 30, à propos des primitives de $\sin^2 x \cos^3 x$, pas de distinction nette des cas où on peut, à la rigueur, se passer de formules de réduction (α, β entiers ; l'un d'eux positif impair ; ou bien $\alpha + \beta$ négatif pair, ou nul) et de ceux où l'intégration par parties s'impose. L'auteur aurait eu le droit de se borner au cas de α, β , tous deux entiers positifs, mais il eût fallu montrer nettement qu'on peut ramener la fonction à un « polynôme trigonométrique »,

$$\sum A_p \cos px + B_p \sin px, \quad p \text{ entier} \geq 0.$$

Dans la leçon 35, le candidat n'a pas vu que le système

$$\begin{cases} P(t_1) R(t_2) - P(t_2) R(t_1) = 0, \\ Q(t_1) R(t_2) - Q(t_2) R(t_1) = 0, \end{cases}$$

employé pour trouver les points doubles (à distance finie) de la courbe unicursale

$$x = \frac{P(t)}{R(t)} \quad y = \frac{Q(t)}{R(t)}$$

a les solutions étrangères du type (τ, τ') τ et τ' étant des racines distinctes de $R(t) = 0$: il s'en est ensuivi des décomptes de géométrie énumérative largement fantaisistes, y compris l'affirmation qu'une courbe unicursale n'a pas généralement de points doubles.

Deux des trois leçons sur la multiplication des séries absolument convergentes ne considéraient pas le tableau des produits $u_i v_j$ qui apporte une clarté indispensable dans l'examen des réductions qu'offre la différence $U_n V_n - W_n$ (notations classiques).

La leçon sur le birapport de quatre points d'une conique, faite sans aucun soin ni effort d'adaptation à un auditoire d'élèves, eût laissé, à nos collègues belges, une impression beaucoup plus lamentable que celle, assez mitigée, qu'ils ont emportée de leur passage à l'Ecole Normale, à l'audition d'une leçon d'un candidat en cours d'année.

Beaucoup de confusion dans la leçon sur les formes linéaires, où le candidat supposait traitée au préalable la discussion des systèmes d'équations linéaires ; ceci aurait dû permettre une présentation impeccable distinguant nettement les conditions nécessaires d'indépendance des conditions suffisantes.

Dans la leçon 37, le théorème de Rolle a été assez bien exposé, mais des imprécisions, des inexactitudes mêmes se sont trouvées dans l'application de la formule des accroissements finis à la recherche du sens de variation d'une fonction ; après

avoir donné une définition correcte du maximum ou minimum relatif, l'auteur a entrepris de prouver qu'il se rattache toujours à un changement du signe de la dérivée. La considération de la fonction $y = x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$, pour $x = 0$, aurait pu le convaincre du contraire.

Chaque année, la leçon sur la convergence des séries entières révèle la persistance d'illusions de débutants sur bien des points. Il est assez grave d'enseigner que la convergence est uniforme à l'intérieur de l'intervalle de convergence $-R, +R$ (on ne peut établir cette uniforme convergence, en toute généralité, que sur le segment $-r, +r$, r étant un nombre positif inférieur à (R)). De plus, le candidat s'est inspiré d'une leçon, tout à fait exceptionnelle celle-là, faite il y a deux ans sur le même sujet, où avait été correctement établie la formule, due à Cauchy :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

[la limite surlignée, dite par Cauchy plus grande des limites, a été depuis dénommée limite supérieure d'indétermination, ou plus brièvement, *limite supérieure* de la suite $|a_n|$]. Mais le candidat n'a pas défini cette notion de manière correcte, et l'usage de celle-ci est apparu au jury comme un masque, dispensant l'auteur de la leçon d'une présentation minutieuse et élémentaire de certains raisonnements ; notamment ceux qui sont relatifs à l'étude de la convergence de la série des dérivées de la série entière.

La leçon sur l'extension, aux valeurs réelles quelconques de x , de la définition de a^x , a encore été bien mauvaise ; on y oublie trop souvent qu'il y a une infinité de manières de définir un nombre irrationnel X (ou même rationnel) par deux ensembles adjacents de rationnels que ce nombre sépare ; il y a donc une infinité de définitions correspondantes de a^x , qu'il est essentiel de comparer et dont on montre la concordance.

Une médiocre leçon a été faite sur les séries à termes positifs, avec imprécision des idées et du langage. Deux fautes graves ont été relevées dans l'énoncé, que le candidat a donné de la règle $n^2 u_n$. Les nuances de l'emploi de $\sqrt[n]{u_n}$ (se rattachant, précisément, à la notion de limite supérieure d'une suite) n'ont pas été exposées.

Les exemples de courbes $\varphi = f(\omega)$ donnés pour illustrer les théories ont été, cette année, plutôt pauvres.

Le mouvement d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance s'étudie simplement sans l'intervention du théorème des aires et du théorème des forces vives. Mais ces théorèmes généraux se trouvent expliquer les propositions traditionnelles d'Apollonius sur les diamètres conjugués de l'ellipse. Le candidat n'a pas été bien inspiré d'admettre comme connus ces théorèmes.

Une leçon sur le glissement d'un point pesant le long d'une ligne de pente d'un plan incliné, bien dominée par son auteur, lui a assuré une grande part de son succès.

La leçon sur la différentielle totale, facile lorsqu'on n'adopte pas le point de vue, relativement récent, des fonctions linéairement différentiables, a été mal reconstituée et contenait l'erreur, classique autrefois : « La différentielle totale d'une fonction est la partie principale de l'accroissement de la fonction. » On ne définit d'ailleurs de telle partie principale, habituellement, que pour une fonction d'une seule variable.

Trop de dogmatisme dans l'exposé de l'obtention de la formule de Taylor. On peut certes la déduire de la formule d'intégration par parties généralisée :

$$\int_a^b uv^{(n)} dx = \left[uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1} u^{(n-1)}v \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)} v dx$$

mais c'est une démonstration élégante découverte après coup dans l'histoire de l'Analyse.

Une leçon d'initiation sur le plan osculateur comporte un choix : il faut croire que celui-ci est bien douloureux pour nos candidats qui ne peuvent se résigner à laisser de côté les vecteurs $V(p)$, $V(q)$, dérivées vectorielles du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport au paramètre t , dont il dépend, quand p et q sont des entiers quelconques. Une présentation n'utilisant que les second et troisième ordres au plus est suffisamment suggestive pour les élèves de Spéciales. En procédant ainsi, le candidat aurait du temps de reste pour étudier la position d'une courbe, dans le voisinage d'un de ses points par rapport au plan osculateur en ce point, pour donner des conditions relatives au cas du plan osculateur constamment stationnaire (cas d'une courbe plane), et enfin pour montrer, s'il a du temps de reste, que pratiquement on peut se libérer de la tyrannie théorique de la considération des dérivées d'ordre supérieur — avec des applications.

**

Bien des notes honorables, dans ces leçons, ont été dues à des qualités pédagogiques, qui ont joué un rôle très loin d'être négligeable. Par contre, les défauts de soin, de présentation, ont été fréquents. Le langage ne fait pas non plus l'objet d'une attention suffisante. En voici, sur des citations, quelques exemples :

« Il faudrait, ici, refaire un calcul en forme. » (Le candidat dispose de deux vastes tableaux noirs).

« L'ascension droite (du Soleil) croît constamment, et, au bout d'un an, reprend la même valeur. »

« Projetons sur Ox le principe de la dynamique. »

« La vérification collera-t-elle (*sic*) ? Oui, elle colle. »

« Comme à l'habitude, les premier, second, troisième, quatrième quadrants se succèdent dans le sens des aiguilles d'une montre. » (Sur la figure la disposition de ces quadrants étant tout à l'opposé).

« Σ_n tend vers pas de limite. »

« α est plus petit que φ . Donc si $\varphi = 0$, α ne peut être que nul. »

« $y = \sqrt{4x + 3} - \alpha x - \beta$ (quand x tend vers $+\infty$), tend vers $-\alpha x$. »

« La courbe est croissante », etc. .

Les notes de l'oral se répartissent ainsi qu'il suit :

Elémentaires : un 19, un 18, un 17, deux 16, cinq 15 ; six 14, quatre 13, trois 12, six 11, trois 10 ; quatre 9, cinq 8, trois 7, un 5. Moyenne de l'ensemble des leçons 12 (moyenne de l'an dernier 12,25).

Spéciales : un 19, six 16, trois 14, trois 13, quatre 12, un 11, cinq 10 ; trois 9, sept 8, cinq 7, six 6, un 3, soit presque autant de notes au-dessous de la moyenne qu'au-dessus. Moyenne de l'ensemble des leçons 10,27 (moyenne de l'an dernier 12,4).

EPREUVES PRATIQUES

Elles ont été effectuées le 16 juillet au Lycée Saint-Louis.

COMPOSITION D'EPURE : *Sujet*. — Les données, exprimées en centimètres, sont rapportées à trois axes rectangulaires $Oxyz$. L'axe Oy est le petit axe de la feuille, orienté positivement vers la droite ; le plan aOy est le plan horizontal de projection, le plan yOz est le plan frontal de projection, le plan xOz est de profil, suivant le grand axe de la feuille ; Ox est orienté positivement vers le bas, Oz vers le haut.

Un hyperboloïde H contient les droites

$K(x=12 ; z=6)$; $K_0(y=-6 ; x+z-12=0)$; $K_1(x=6 ; z-2y-12=0)$

Une surface $\mathcal{C}$ est engendrée par les droites Δ qui rencontrent orthogonalement la droite K et qui s'appuient sur la ligne $\mathcal{G}$ représentée par les équations :

$$y - z + 12 = 0 ; (x - 12)^2 + y^2 = 36.$$

1° Construire la partie non rectiligne $\mathcal{Q}$ de l'intersection des surfaces H et $\mathcal{C}$.
On justifiera brièvement la construction du point M où une droite Δ recoupe H (en dehors du point P où elle s'appuie sur K), ainsi que des points et des tangentes remarquables.

2° La ligne $\mathcal{Q}$ présente un point double apparent en projection horizontale : déterminer ce point, et les tangentes correspondantes.

3° On construira, en justifiant cette construction, la tangente à $\mathcal{Q}$ au point courant M déterminé au § 1°.

4° Deux génératrices, Δ et $\bar{\Delta}$ de $\mathcal{C}$, s'appuient sur K au même point P ; il leur correspond les points M et $\bar{M}$ de $\mathcal{Q}$. Soit $\mathcal{S}$ le solide engendré par la surface du triangle $MP\bar{M}$. Représenter la portion de $\mathcal{S}$ située au-dessus du plan horizontal de cote 6.

OBSERVATIONS (M. CAGNAC). — L'énoncé proposait l'étude de l'intersection d'un hyperboloïde réglé H et d'un conoïde de Plücker $\mathcal{C}$; l'axe de $\mathcal{C}$ était une génératrice K de H , parallèle à la ligne de terre, et, en outre une génératrice G_0 de H appartenait à $\mathcal{C}$, si bien que la ligne $\mathcal{Q}$ qu'on demandait de construire était une cubique gauche ; 11 candidats seulement ont reconnu l'existence de G_0 .

Tous les candidats, à l'exception d'un seul, ont vu qu'en coupant H et $\mathcal{C}$ par un plan Π contenant K , on déterminait une génératrice Δ dans $\mathcal{C}$, une génératrice G dans H , et que le point M commun à Δ et G était un point courant de $\mathcal{Q}$.

La plupart des candidats ont déterminé G par les points où Π coupe les génératrices données K_0 et K_1 : que de maladresses dans ces constructions ! En outre, dès qu'on trace les projections de diverses génératrices G de H , il est élémentaire de contrôler que ces droites sont tangentes au contour apparent en projection de H : hélas ! le correcteur a constaté que cette notion est ignorée de la grosse majorité des candidats : six seulement ont reconnu que le contour apparent en projection horizontale de H est un cercle γ , inscrit dans le carré formé par les projections de K , K_0 , K_1 et G_0 . Dès lors, une génératrice quelconque G s'obtenait aisément en coupant H par un plan vertical tangent à γ , et en marquant les points où ce plan est percé par K et K_1 .

Le cercle γ est la projection d'une section elliptique de H , située dans un plan de bout parallèle au plan $\mathcal{E}$, ce qui justifiait le caractère circulaire de la projection horizontale de $\mathcal{Q}$.

Dans aucune épure, le point à distance finie où $\mathcal{Q}$ s'appuie sur G_0 n'a été déterminé. Le point double apparent a été placé correctement dans quelques épreuves, mais sans justification suffisante ; trois candidats ont reconstitué la génération cissoïdale de la cubique circulaire à partir d'une droite et d'un cercle.

Un seul candidat a construit la tangente au point courant M de $\mathcal{Q}$.

Personne n'a reconnu le paraboloïde hyperbolique engendré par les droites MM .

Les meilleures notes sont 17, 16, 15, 14, 12 (deux fois) et 11 ; la moyenne générale de l'épreuve est 5,82.

COMPOSITION DE CALCUL NUMÉRIQUE : *Sujet*. — On considère un cercle de rayon 1 et un triangle isocèle $A'B'C'$ circonscrit à ce cercle ; $B'C'$ étant la base de ce triangle, on désigne par 2φ l'ouverture de l'angle opposé A' . On projette la figure sur un plan parallèle à $B'C'$. Le cercle se projette suivant une ellipse E d'excentricité e , et le triangle $A'B'C'$, suivant un triangle ABC , isocèle, circonscrit à E , et dont le périmètre est désigné par $2p$.

1° Lorsque φ varie, ce périmètre varie. Il est minimum lorsque l'on a la relation

$$(1) \quad e = \frac{\sqrt{1 - 2 \sin \varphi}}{(1 - \sin \varphi) \cos \varphi}$$

et le minimum est donné par la relation

$$(2) \quad p = \frac{(2 - \sin \varphi) \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi)^2}$$

N.-B. — L'épreuve n'ayant qu'une durée de trois heures, on ne demandait pas de retrouver les formules (1) et (2).

2° Dans la suite du problème, on choisit $e = 0, 1$ et φ de façon que $2p$ soit minimum. Calculer d'abord $\sin \varphi$, en s'aidant d'une représentation graphique, puis $2p$, avec la précision que permet l'usage de la table de logarithmes à cinq décimales.

3° On se propose de calculer les valeurs précédentes avec plus de précision. A cet effet on pose :

$$\sin \varphi = \frac{1}{2} - z.$$

L'équation (1), mise sous forme entière, peut s'écrire (1') $f(z) = u$ où $f(z)$ est un polynôme en z , nul pour $z = 0$, et dont le terme en z a pour coefficient 1. Quant à u , il est égal à une constante numérique u_0 .

La relation (1'), où u est considéré comme une variable complexe, fixe une dépendance entre les deux variables complexes u et z . Démontrer les propriétés suivantes :

a. La fonction $f(z)$ est univalente pour $|z| \leq 3$ [et même un peu au delà] : autrement dit, si elle prend une valeur v en un point z de module au plus égal à 3, elle la prend une fois en ce point, et les autres points z où $f(z) = v$ sont extérieurs au cercle $|z| = 3$.

b. Lorsque z décrit un arc de longueur l ($|z| \leq 3$), le point u décrit un arc de longueur $L < kl$ (k numérique).

c. Lorsque z décrit une fois, dans le sens direct, le cercle $|z| = r$ ($r \leq 3$), le point u décrit une fois, dans le sens direct, une courbe $C(r)$ sans point double, entourant l'origine $u = 0$.

d. Comment se comporte $C(r)$ quand r croît de 0 à 3 ?

e. Si l'on désigne par $g(u)$ la branche de la fonction inverse de $f(z) = u$ qui s'annule pour $u = 0$, cette branche est uniforme et holomorphe dans et sur $C(3)$.

Déduire de ce qui précède une majoration (en fonction de l'indice n) de la dérivée n^{me} de $g(u)$ pour $u = 0$.

4° Au voisinage de l'origine, la fonction $g(u)$ est développable en série entière de la forme $g(u) = u + a_2 u^2 + \dots$. Combien faut-il calculer de termes pour connaître $g(u)$, c'est-à-dire z , à 10^{-9} près ?

Application. — On ne conserve que les deux premiers termes de la série précédente. Calculer une valeur approchée de $\sin \varphi$ basée sur cette approximation, et préciser une limite supérieure de l'erreur commise.

Se servir de cette valeur approchée pour calculer $2p$, en précisant de même une limite supérieure de l'erreur commise.

OBSERVATIONS (M. MILLOUX). — La composition de Calcul numérique comporte quatre parties. La première montre l'origine géométrique du problème ; quoiqu'elle soit très simple, l'énoncé précise les résultats desquels vont dépendre les paragraphes ultérieurs.

La seconde partie consiste essentiellement dans le calcul numérique d'une racine x , d'une certaine équation du quatrième degré, et dans l'application au calcul approché de la longueur géométrique $2p$ de la première partie. Une étude élémentaire très rapide de l'équation permet de situer x au voisinage de $\frac{1}{2}$. Un calcul plus précis,

effectué à l'aide de la table de logarithmes, et en employant des procédés classiques, fournit x à un millième près et même avec une précision plus poussée.

On propose ensuite une méthode basée sur un développement en série, dont avant tout il importe de savoir majorer chaque terme : la troisième partie forme l'armature théorique de cette méthode, par l'emploi de propriétés bien connues de la théorie des fonctions d'une variable complexe ; la quatrième partie est l'application pratique, qui consiste en premier lieu à calculer x avec une grande précision — dans les conditions de l'énoncé on peut garantir plus de 10 décimales exactes. Il reste enfin à calculer la grandeur géométrique $2p$.

Presque tous les candidats se sont arrêtés au voisinage de la fin de la deuxième partie. La barrière théorique de la troisième partie les a stoppés en les dispersant. Deux candidats seulement sont arrivés à trouver x , dans la quatrième partie, avec une bonne précision. Leurs notes s'en ressentent : 19 et 16 sur 20. Quant aux autres, trente-cinq d'entre eux ont obtenu des notes moyennes, entre 7 et 13 (un seul candidat a 13). Enfin, la moyenne générale des quarante-cinq candidats ayant composé en Calcul numérique est 8,75.

Certains candidats à l'Agrégation ont tort de négliger cette épreuve, pourtant très abordable ; leur impréparation est manifeste. Il n'est pas douteux que dans quelques cas, la note obtenue est décisive dans le résultat final de l'Agrégation, malgré le modeste coefficient. Il est à souhaiter qu'à l'avenir, les candidats s'intéressent davantage, en temps utile, au Calcul numérique.

RESULTATS GENERAUX

Pour l'ensemble des épreuves écrites, orales et pratiques, les totaux de notes obtenues par les admissibles varient de 121 à 356 sur 400, soit de 6,05 à 17,8 sur 20.

Le candidat en tête de la liste des admissibles, et qui était déjà classé premier à l'écrit, a réalisé des épreuves d'une rare perfection et est appelé à un bel avenir. Son total de points n'a été dépassé, dans les annales de l'Agrégation, que par le regretté Frédéric Marty, en 1931, et de 3 points seulement.

Le jury a proposé pour l'admission définitive les trente-quatre premiers candidats, avec deux *ex-æquo* en queue de liste. Ces deux derniers candidats, sur la liste des agrégés, ont comme moyenne de toutes les épreuves 8,95 sur 20 (contre 9,1 en 1951). La moyenne générale est 10,64 (10,6 en 1951 ; 11,08 en 1950). Le candidat classé trente-cinquième n'a atteint que 8,5.

Il y a de grandes variations entre le classement de l'admissibilité et le classement final ; en tête, si les premier et quatrième des deux listes concordent, le second de l'écrit passe vingt-troisième du classement final : le huitième et le dix-septième de l'écrit deviennent deuxième (*ex-æquo*) de la liste des agrégés.

Le groupe des trente-quatre nouveaux agrégés comprend neuf élèves de l'Ecole Normale Supérieure de la rue d'Ulm ; deux auditeurs à cette école dont le premier du classement ; un élève — et un ancien élève — de l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud ; deux assistants de Facultés ; douze professeurs de l'Enseignement du Second Degré ; deux professeurs de l'Enseignement technique ; deux professeurs (délégués) des Ecoles Normales d'instituteurs ; deux stagiaires d'enseignement et un étudiant de la Faculté de Lille, classé deuxième.

On compte parmi cette liste onze admissibles à l'un, au moins, des concours précédents.

Sur les douze admissibles non reçus figurent quatre professeurs de lycées et un professeur de collège, un instituteur, un adjoint d'enseignement, trois élèves de Saint-Cloud, deux stagiaires d'enseignement, l'un de seconde, l'autre de première année.

La dispense du Certificat d'aptitude à l'enseignement dans les collèges a été accordée à un seul admissible ; les autres la possédaient déjà, sauf les stagiaires d'enseignement et l'adjoint d'enseignement.

Sur ces douze admissibles non reçus, on compte trois triadmissibles et un biadmissible.

**

Nous regrettons l'an dernier que le niveau des épreuves, affaibli notamment par le niveau de l'écrit, n'ait pas permis un recrutement en agrégés permettant de faire face aux besoins, à ceux de l'Enseignement du Second Degré, en particulier. Cette année, le jury a éprouvé une impression analogue, et regrettait presque que des représentants des Associations, qui ont soutenu la thèse d'un allongement désirable des listes d'agrégés, ne fussent pas présents à l'oral. Il a l'impression d'avoir été aussi loin que le souci du prestige de l'Agrégation le permettait.

Les statistiques justifiant la thèse en question n'ont pas paru tenir compte de l'arrêt des sessions spéciales ou des classements spéciaux accordés à ceux dont les études ont été entravées par la guerre ; de 1945 à 1950, de larges possibilités d'acquiescence licence d'enseignement et diplôme en un temps très court avaient été légitimement accordées, dont ont profité des esprits que les dures circonstances de la guerre avaient mûri. Les jeunes étudiants de 1952, privilégiés par rapport à ces aînés, ne sont cependant pas placés dans des conditions analogues et les comparaisons qui ont été faites touchant le pourcentage des agrégés avant et après 1950 ne sont pas absolument légitimes.

Est-il possible d'améliorer le recrutement ? Certainement l'institution des Centres Pédagogiques régionaux y contribuera, mais il ne faut pas se dissimuler qu'elle reste, dans son rendement touchant l'Agrégation, subordonnée au niveau général des étudiants qui s'orientent vers la licence, en passant par l'année de propédeutique, et cette filière assez longue leur fait fréquemment perdre de vue, sinon oublier, ce qu'est l'Enseignement du Second Degré.

Et, pour les Mathématiques, une proportion importante des sujets les mieux doués a obliqué vers les grandes Ecoles scientifiques. A notre avis, il y aurait là, au moins en ce qui concerne la culture de connaissances, un courant perdu en grande partie pour l'Agrégation.

Que ceux qui ont la charge d'étudier des équivalences possibles ne l'oublient pas, et qu'ils n'objectent pas des insuffisances pédagogiques, qui, actuellement, il faut bien le reconnaître, s'étendent fâcheusement à celles des grandes Ecoles dépendant du Ministère de l'Education Nationale.

De plus, actuellement, il y a de précieuses ressources en nos professeurs eux-mêmes, dont certains n'avaient pas l'idée de préparer l'Agrégation, ou y ont échoué autrefois par malchance, et se sont résignés à ne plus s'y répréparer. Tous les ans, le jury a l'agréable surprise de constater, par exemple, que des titulaires de l'ancien Certificat d'Aptitude à l'Enseignement des Ecoles Normales et Primaires Supérieures se révèlent comme excellents agrégés.

Pour conclure, n'oublions pas qu'un titre plein de prestige comme celui d'agrégé n'est pas suffisant et qu'il reste à ceux qui ont fait la preuve de leur science et de leur travail qu'ils fassent aussi, ultérieurement, la preuve de leur désir de communiquer ce qu'ils savent aux élèves qui leur seront confiés. Nous pouvons, cependant, éprouver à ce sujet un profond optimisme.

P. ROBERT,

Inspecteur général de l'Instruction publique.