

Concours général de Mathématiques pour les classes de Première en 1952

Rapport de M. l'Inspecteur général DESFORGE, Président du Jury

Le Jury était ainsi composé : M. DESFORGE, inspecteur général, président ; Mme DOMANGE, professeur de Mathématiques (classe de Fontenay) au Lycée Fénelon ; Mlle LECONTE, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Fénelon ; M. Charles DURAND, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Buffon ; M. LEBOSSÉ, professeur de Mathématiques au Lycée Claude-Bernard ; M. TATON, professeur de Mathématiques au Lycée de Suresnes.

Le problème proposait d'abord l'étude de quelques propriétés des quadrilatères gauches circonscriptibles, au sens strict, à une sphère, c'est-à-dire tels qu'il existe au moins une sphère tangente à leurs quatre côtés, chacun des points de contact étant à l'intérieur ou à l'une des extrémités du côté sur lequel il se trouve.

Il est presque évident que les longueurs a, b, c, d des côtés successifs AB, BC, CD, DA d'un tel quadrilatère vérifient la relation $a + c = b + d$. La démonstration de cette propriété constituait le début de la première partie du problème ; elle ne présentait aucune difficulté ; cependant certains candidats paraissent hésitants, peinant quelque peu, parfois, pour retrouver, ou pour découvrir, une propriété bien classique des tangentes à une sphère passant par un point.

L'énoncé précisait que cette question liminaire était destinée à préparer l'essentiel de l'étude demandée ensuite, et dont l'aboutissement, après quelques étapes, est une démonstration de la réciproque du résultat précédent.

D'abord, il s'agissait d'établir l'existence de quadrilatères gauches tels que la somme des longueurs de deux côtés opposés soit égale à la somme des longueurs des deux autres. Un mode simple, parmi bien d'autres, de construction de ces quadrilatères (A B C D) était proposé, à partir de quatre segments donnés dont les longueurs a, b, c, d , vérifient la relation (1) $a + c = b + d$, et de deux points donnés A et C : deux points B et D définis comme appartenant l'un aux deux sphères (A, a) et (C, b) ayant respectivement pour centres A et C et pour rayons a et b , l'autre aux deux sphères analogues (A, d) et (C, c), déterminent avec les points A et C les quatre sommets d'un quadrilatère (A B C D) satisfaisant évidemment à la condition que l'on cherche à réaliser pour les longueurs des côtés, ce quadrilatère étant gauche si le point D est choisi hors du plan ABC. Cette construction, qui permet d'obtenir tous les quadrilatères étudiés, est possible si chacun des deux couples de sphères considérés est formé de sphères sécantes, c'est-à-dire si la longueur AC est comprise en même temps entre $|a - b|$ et $(a + b)$, et entre $|c - d|$ et $(c + d)$: en tenant compte de la relation (1), qui peut aussi être écrite sous la forme $a - b = d - c$, ces deux conditions simultanées se réduisent à l'unique condition suivante, d'ailleurs « nécessaire et suffisante » : la distance AC doit être supérieure à $|a - b|$ et inférieure à la plus petite des deux longueurs $(a + b)$ et $(c + d)$.

Faut-il attribuer à cette sorte de « complexe d'infériorité », déjà souvent signalé, que manifestent nombre d'élèves dès qu'il s'agit, si peu que ce soit, d'algèbre, les insuffisances relevées dans bien des compositions à propos de cette petite discussion, pourtant banale ? Cela n'est pas impossible ; ne voit-on pas apparaître dans maintes copies, au sujet des inégalités imposées à la longueur AC, des tentatives de transformations qui s'apparentent nettement à certains calculs plus ou moins habituels lorsqu'on manie des égalités ou des équations, et dont les débutants peuvent croire qu'ils possèdent quelque privilège d'infailibilité, leur application automatique dispensant de toute réflexion ? Notons, entre autres, une faute fréquente qui consiste à remplacer le système des deux inégalités simultanées concernant AC par une inégalité unique obtenue par addition « membre à membre » des relations initiales (heureusement écrites, la plupart du temps, dans le même sens).

Au point de vue géométrique, cette même question a révélé une trop grande proportion de candidats — plus de la moitié — qui semblent ignorer que l'existence d'un cercle commun à deux sphères, dont on connaît les centres et les rayons, n'est acquise que sous une double condition d'inégalité, identique à celle que l'on rencontre dans la recherche d'un triangle ayant pour côtés trois segments donnés. Nombreux sont ceux qui se bornent à exprimer que la distance des centres est inférieure à la somme des rayons.

Après avoir fait préciser les lieux géométriques des sommets B et D de tous les quadrilatères obtenus par la construction précédente, les sommets A et C étant fixes, ainsi que les longueurs a, b, c, d , l'énoncé demandait, afin d'attirer l'attention sur certaines formes de ces quadrilatères, à quelles conditions ces deux lieux sont situés dans un même plan. Beaucoup ont rattaché très normalement cette question au théorème classique sur le lieu géométrique des points dont la différence des carrés des distances à deux points, A et C, est donnée, et ont ainsi obtenu correctement une relation caractérisant ces figures particulières : $b^2 - a^2 = c^2 - d^2$. Mais il convenait d'aller plus loin, en tenant compte de l'hypothèse (1), qui conduisait, par un calcul bien élémentaire, à la condition, toujours caractéristique : $(b - a) \cdot (b - c) = 0$. Ainsi apparaissent les deux solutions :

$a = b$, entraînant $c = d$, correspondant aux quadrilatères admettant comme plan de symétrie le plan médiateur du segment diagonal AC, les cercles lieux de B et D étant alors concentriques et non nécessairement égaux ;

$b = c$, entraînant $a = d$, correspondant, naturellement, aux quadrilatères admettant comme plan de symétrie le plan médiateur du segment diagonal BD, les cercles lieux de B et de D étant alors confondus.

Bien entendu, ces deux solutions algébriquement distinctes, ne définissent géométriquement qu'une seule solution formée par ceux des quadrilatères de la famille étudiée qui admettent un plan de symétrie, ce plan ne pouvant être que le plan médiateur de l'un des segments diagonaux.

Là encore, l'algèbre intervenant quelque peu, discrètement du reste, dans le raisonnement, les obstacles classiques n'ont pas manqué de provoquer des accidents, dont le plus courant fut la disparition de l'une des solutions, par la voie d'une « simplification » pourtant maintes fois interdite.

Pour préparer la mise en place des éléments intervenant ultérieurement dans le problème, une fois démontrée l'existence de quadrilatères gauches dont les côtés vérifient la relation (1), l'on demandait d'établir que les longueurs a, b, c, d , peuvent être rangées dans un ordre facile à définir en remarquant d'abord que l'un des couples de côtés opposés comprend nécessairement les deux côtés extrêmes. Il s'agissait là de propriétés banales : si a désigne la plus petite des quatre longueurs, les relations $b - a = c - d$, $d - a = c - b$, montrent que c est forcément la plus grande, et si l'on suppose alors que b est la plus petite des deux longueurs moyennes, le classement s'établit sous la forme $a \leq b \leq d \leq c$. Malgré sa simplicité, cette question, qui faisait appel au bon sens plus qu'à la virtuosité mathématique, n'a été traitée, ou comprise, que par un petit nombre, et beaucoup ont fourni de sérieux efforts pour n'aboutir qu'à quelques considérations peu convaincantes.

Les questions 3^e et 4^e constituaient l'essentiel de la première partie, puisqu'elles conduisaient, par une succession d'étapes, mettant d'ailleurs en évidence quelques propriétés intéressantes de la figure, à la démonstration de l'existence de sphères tangentes, au sens strict, aux quatre côtés d'un quadrilatère gauche dont les côtés a, b, c, d , vérifient la relation (1).

En se plaçant dans l'hypothèse générale $a < b \leq d$, qui entraîne $d < c$, on étudiait d'abord le groupe de quatre points M, N, P, Q, obtenus à partir d'un point M, arbitrairement choisi sur le plus petit côté AB, et défini par la distance : $AM = u$ ($0 \leq u \leq a$), en partant successivement sur les droites BC, CD, DA, respectivement dans le sens de B vers C, de C vers D, de D vers A, les segments

$BN = BM$, $CP = CN$, $DQ = DP$. Une raison bien évidente, que l'on ne demandait d'ailleurs pas d'indiquer, justifie la prise en considération de tels points, qui sont les seuls pouvant être les points de contact des quatre côtés du quadrilatère avec une sphère « inscrite », s'il en existe une.

Il est facile d'établir que les points N , P , Q , sont effectivement situés sur les segments BC , CD , DA , et non sur leurs prolongements, et que l'on a

$BN = a - u$, $CP = b - a + u = c - d + u$, $DQ = d - u$,
d'où l'on déduit $AM = AQ$.

Dans chacun des cas limites $u = 0$ et $u = a$, le quadrilatère $MNPQ$ est remplacé par un triangle : AN_0P_0 pour $u = 0$, BP_1Q_1 pour $u = a$.

L'observation un peu attentive des constructions ainsi effectuées met en évidence que, quel que soit u , les quatre segments MN , NP , PQ , QM restent parallèles à des droites fixes, qui sont les bissectrices extérieures des quatre angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDA}$, $\widehat{DAB}$ (que l'on désignera en abrégé par les lettres B , C , D , A). En particulier, les deux triangles AN_0P_0 et BP_1Q_1 ont deux couples de côtés parallèles : N_0P_0 et BP_1 parallèles à la bissectrice extérieure de l'angle C , AP_0 et P_1Q_1 parallèles à la bissectrice extérieure de l'angle D . Les plans de ces deux triangles sont donc eux-mêmes parallèles ; comme les côtés AN_0 et BQ_1 , respectivement parallèles aux bissectrices extérieures des angles B et A , sont parallèles à la direction commune des plans des deux triangles, il est établi que les bissectrices extérieures des quatre angles du quadrilatère sont parallèles à une même direction de plans, définie par exemple par l'un des plans V_0 ou V_1 des triangles AN_0P_0 ou BP_1Q_1 . Il en résulte que tout quadrilatère $MNPQ$ est un quadrilatère plan, dont le plan V est parallèle à V_0 .

Il est tout indiqué de poursuivre l'étude des deux triangles AN_0P_0 et BP_1Q_1 : non seulement les segments N_0P_0 et BP_1 sont parallèles, mais, de plus, ils ont la même médiatrice, et, par conséquent, le même plan médiateur, qui est le plan perpendiculaire au plan BCD passant par la bissectrice intérieure de l'angle C ; ce plan sera appelé le plan bissecteur intérieur de l'angle C . De même, les segments AP_0 et P_1Q_1 ont le même plan médiateur, qui est le plan bissecteur intérieur de l'angle D . Ces deux plans médiateurs sont perpendiculaires aux plans V_0 et V_1 , qu'ils coupent respectivement suivant les médiatrices de deux des côtés des triangles AN_0P_0 et BP_1Q_1 . Ces deux plans médiateurs sont donc sécants, leur intersection Z étant, pour chacun des deux triangles, l'axe du cercle qui lui est circonscrit. Les propriétés classiques des trois médiatrices, ou des trois plans médiateurs, des côtés d'un triangle font alors apparaître que la droite Z appartient aussi aux plans médiateurs des segments AN_0 et BQ_1 , c'est-à-dire aux plans bissecteurs intérieurs des angles B et A .

Ayant ainsi découvert que les plans bissecteurs intérieurs des quatre angles A , B , C , D avaient une droite commune Z , on remarque que ces plans sont également les plans médiateurs des segments MN , NP , PQ , QM , pour chacun des quadrilatères plans $MNPQ$. On en déduit qu'il existe un lieu géométrique de points équidistants des quatre sommets M , N , P , Q d'un tel quadrilatère, ce lieu étant la droite Z , bien entendu perpendiculaire au plan V ; en particulier le point ω où Z coupe le plan V est le centre d'un cercle passant par les points M , N , P , Q . Tout quadrilatère $MNPQ$ est donc inscriptible. Le centre ω du cercle qui lui est circonscrit, étant à l'intersection de la droite fixe Z et du plan V , n'est autre que la projection orthogonale sur Z du point M , qui décrit, par hypothèse, le segment AB ; le lieu géométrique du centre ω est donc la projection orthogonale sur la droite Z du segment AB , c'est-à-dire le segment $\omega_0 \omega_1$ de la droite Z compris entre les plans V_0 et V_1 .

L'énoncé signalait incidemment que le quadrilatère plan $MNPQ$ est convexe. Cette affirmation se justifie facilement : deux quelconques des sommets consécutifs de ce quadrilatère, M et Q par exemple, étant des points intérieurs aux segments AB

et AD sont d'un même côté du plan BCD (dans celui des deux « demi-espaces », déterminés par le plan BCD, qui contient le point A), et par conséquent sont, dans le plan V, d'un même côté du support du côté NP (dans celui des deux demi-plans situé par rapport au plan BCD du même côté que le point A) ; le raisonnement étant valable pour les quatre côtés, le quadrilatère MNPQ vérifie bien les conditions de la définition élémentaire d'un polygone convexe.

Poursuivant l'inventaire des propriétés simples résultant de l'examen de la figure, on voit que la droite Z, appartenant à l'un des plans bissecteurs de l'angle A, fait des angles égaux avec les supports des côtés AB et AD ; il en est de même pour les trois autres couples de droites BA et BC, CB et CD, DC et DA. La droite Z fait donc des angles égaux avec les quatre droites AB, BC, CD, DA, ce qui peut s'exprimer, comme le proposait l'énoncé, en disant que les quatre côtés du quadrilatère gauche (A B C D) sont parallèles à quatre génératrices d'un cône de révolution autour de la droite Z. On peut remarquer en passant qu'il s'agit bien d'un véritable cône, la droite Z n'étant ni parallèle, ni perpendiculaire aux côtés de (A B C D).

Le terrain ainsi préparé, de nouvelles propriétés, concernant maintenant les points de la droite Z, sont faciles à mettre en évidence. Exploitant plus complètement le fait que Z est dans le plan bissecteur intérieur de l'angle A, ou, ce qui revient au même, que la projection orthogonale Z_a de Z sur le plan BAD est la droite qui

porte la bissectrice intérieure de cet angle $\widehat{BAD}$, on peut construire les projections orthogonales m et q d'un point quelconque F de Z sur les droites AB et AD en projetant orthogonalement d'abord le point F sur la droite Z_a , puis le point ainsi obtenu F_a sur les droites AB et AD : les points m et q étant symétriques par rapport à Z_a , le segment mq est parallèle à la bissectrice extérieure de l'angle A. Si n et p sont les projections orthogonales de F sur les droites BC et CD, on voit de même que les segments mn , np , pq sont parallèles respectivement aux bissectrices extérieures des angles B, C, D. Les quatre bissectrices extérieures des angles A, B, C, D étant parallèles à un même plan, V_0 par exemple, les quatre points m , n , p , q sont dans un même plan v parallèle à V_0 . Le plan v n'est pas nécessairement l'un des plans V contenant les quadrilatères MNPQ déjà étudiés, car certains des points m , n , p , q peuvent être sur les prolongements des segments AB, BC, CD, DA ; plus précisément, lorsque le point F décrit toute la droite Z, sa projection orthogonale m sur la droite AB décrit cette droite AB tout entière, puisque Z et AB ne sont pas orthogonales — chaque point de AB étant du reste la projection orthogonale d'un point et d'un seul de Z —, et le plan v correspondant prend toutes les positions parallèles à V_0 .

On est ainsi sur la voie de la réciproque de la propriété précédente : un plan quelconque v' perpendiculaire à Z coupe les droites AB, BC, CD, DA en des points m' , n' , p' , q' ; ces points sont-ils les projections orthogonales sur ces droites d'un même point de Z ? Un raisonnement par identification s'établit facilement : le plan perpendiculaire à AB au point m' coupe la droite Z en un point F' ; les projections orthogonales de ce point F' sur les droites BC, CD, DA sont des points n'' , p'' , q'' , qui, d'après les résultats antérieurs, sont situés dans le plan passant par m' et parallèle à V_0 , donc dans le plan v' ; les points n'' , p'' , q'' coïncident par conséquent avec les points n' , p' , q' . La réciproque est donc exacte.

Revenant à un point quelconque F de Z, les distances de F aux droites AB, BC, CD, DA sont les longueurs des segments Fm , Fn , Fp , Fq ; ces segments sont manifestement égaux, puisque F appartient à l'un des plans bissecteurs de chacun des angles A, B, C, D. La sphère (F) ayant pour centre le point F et passant par m , par exemple, passe également par n , p , q ; elle est tangente en ces points aux droites AB, BC, CD, DA.

Pour compléter ces remarques générales, l'énoncé proposait d'établir qu'il existe, parmi les points F, un point particulier F_0 situé dans le même plan v_0 que ses projections orthogonales m_0 , n_0 , p_0 , q_0 sur les droites AB, BC, CD, DA. La recherche

d'un tel point F_0 est équivalente à celle d'un point F de Z , tel que la droite Fm soit perpendiculaire à Z , c'est-à-dire tel que Fm soit perpendiculaire commune aux droites Z et AB . Ces deux droites n'étant pas parallèles, elles admettent une seule perpendiculaire commune, dont le pied sur Z est le point F_0 cherché. Ce point F_0 est le centre du cercle circonscrit au quadrilatère $m_0 n_0 p_0 q_0$; la sphère (F_0) admettant ce cercle comme grand cercle est tangente en ces points m_0, n_0, p_0, q_0 aux quatre droites AB, BC, CD, DA ; elle est, parmi les sphères (F) , celle dont le rayon, égal à la plus courte distance des droites Z et AB (ou BC, CD, DA), est minimum.

Il est maintenant facile d'adapter ces résultats au cas des quadrilatères $MNPQ$. Le plan V d'un tel quadrilatère est une position particulière du plan v , correspondant à un point m confondu avec un point M intérieur au segment AB : les quatre points M, N, P, Q sont donc les projections orthogonales sur AB, BC, CD, DA d'un certain point de Z , soit O , qui est le centre d'une sphère S tangente aux quatre côtés du quadrilatère $(ABCD)$, les points de contact, qui sont justement les points M, N, P, Q , étant intérieurs aux segments AB, BC, CD, DA . Le quadrilatère gauche $(ABCD)$ est donc « circonscriptible », au sens précis défini au début du problème; il existe même une infinité de sphères « inscrites », au sens strict; elles sont obtenues en faisant décrire au point M le segment AB . Le centre O de l'une quelconque de ces sphères est défini comme le point de Z qui se projette orthogonalement en M sur AB ; le lieu géométrique de ces centres est donc le segment de la droite Z compris entre les deux plans perpendiculaires à AB aux deux points A et B .

On peut ajouter que le cercle (ω) circonscrit à un quadrilatère $MNPQ$ appartient à la sphère S tangente en M, N, P, Q aux côtés du quadrilatère $(ABCD)$; le centre ω de ce cercle se déduit du centre O de la sphère S en projetant orthogonalement sur la droite Z le point M projection orthogonale de O sur AB . Les points O et ω ne peuvent être confondus que si le point O coïncide avec le point F_0 défini précédemment; cette coïncidence n'est possible que si le pied m_0 sur la droite AB de la perpendiculaire commune à AB et à Z est un point du segment AB , c'est-à-dire si le plan v_0 est parmi les plans V .

D'autres remarques simples complétaient cette étude: M étant un point intérieur au segment AB , il existe un quadrilatère plan $A_1B_1C_1D_1$ dont les côtés successifs $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$ sont tangents au cercle (ω) correspondant au point M , respectivement aux points M, N, P, Q . Les deux droites distinctes AB et A_1B_1 , tangentes en M à la sphère S correspondant au point M , déterminent le plan tangent en M à cette sphère; de même les plans tangents à S aux points N, P, Q , sont déterminés respectivement par les couples de droites BC et B_1C_1 , CD et C_1D_1 , DA et D_1A_1 . La droite AA_1 est donc la droite d'intersection des plans tangents à S aux points M et Q ; on peut définir de façon analogue les droites BB_1, CC_1, DD_1 , chacune appartenant à deux des quatre plans tangents à S aux points M, N, P, Q . Comme ces points sont situés sur le cercle (ω) de la sphère, les plans tangents en ces points sont tangents au cône, ou au cylindre, circonscrit à la sphère S le long du cercle (ω) ; ces quatre plans tangents ont en commun le sommet σ du cône circonscrit, sommet situé sur l'axe de révolution Z du cône, ou bien (cas du cylindre) sont parallèles à Z . Les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sont, en conséquence, concourantes au point σ de Z , ou bien parallèles à Z ; ce cas particulier du parallélisme ne se rencontre que si le cercle (ω) est un grand cercle de la sphère S , c'est-à-dire lorsque S coïncide avec la sphère (F_0) , ce qui, nous l'avons vu, n'est pas toujours possible.

Cependant, le raisonnement précédent, qui ne fait intervenir que des propriétés des plans tangents à une sphère en des points situés sur un même cercle de la sphère, est encore valable si l'on remplace le plan V et les points M, N, P, Q par l'un quelconque des plans v et les points m, n, p, q correspondants. On est ainsi conduit à considérer le plan v_0 qui contient à la fois le point F_0 et ses projections orthogonales m_0, n_0, p_0, q_0 sur les côtés de $(ABCD)$. Que ce plan soit ou non un plan V , le quadrilatère $a'b'c'd'$, dont les côtés successifs $a'b', b'c', c'd', d'a'$ sont portés par

les tangentes au cercle (ω_0) , circonscrit au quadrilatère $monopogo$, respectivement aux points m_0, n_0, p_0, q_0 , est tel que les droites Aa', Bb', Cc', Dd' sont parallèles à Z , puisque (ω_0) est un grand cercle de la sphère (F_0) . Le quadrilatère $a'b'c'd'$ est donc la projection orthogonale du quadrilatère gauche $(A B C D)$ sur le plan v_0 .

Il en résulte que la projection orthogonale du quadrilatère $ABCD$ sur l'un quelconque des plans V est un quadrilatère $A'B'C'D'$ qui se déduit de $a'b'c'd'$ par la translation parallèle à Z qui transforme le plan v_0 en le plan V . Le quadrilatère $A'B'C'D'$ est circonscriptible au cercle (ω') déduit du cercle (ω_0) , par la même translation.

Comme application des propriétés ainsi obtenues, il était demandé de représenter la projection orthogonale sur l'un des plans V , par exemple sur V_0 , de la figure formée par le quadrilatère $(A B C D)$, par les triangles AN_0P_0 et BP_1Q_1 et par celui des quadrilatères $MNPQ$ dont le plan est équidistant de V_0 et de V_1 , ainsi que par les cercles circonscrits correspondants. Il s'agissait simplement de rassembler sur un schéma clair quelques-uns des résultats précédents, et, en particulier, de mettre en évidence le fait que la projection orthogonale de $(A B C D)$ est un quadrilatère dont les côtés sont tangents à un cercle concentrique aux cercles circonscrits aux quadrilatères $MNPQ$, les points de contact étant eux-mêmes les sommets d'un quadrilatère dont les côtés sont respectivement parallèles aux côtés de $MNPQ$. D'ailleurs, ce quadrilatère des points de contact, déduit du quadrilatère $monopogo$ par une translation parallèle à Z , n'est pas nécessairement convexe, puisque certains des points m_0, n_0, p_0, q_0 peuvent être sur les prolongements des segments AB, BC, CD, DA (le raisonnement fait précédemment pour établir la convexité du quadrilatère $MNPQ$ s'appuie essentiellement sur la position des quatre sommets à l'intérieur des segments $AB, BC, \dots$; il peut facilement être prolongé pour montrer que certains quadrilatères $mnpq$ ne sont pas convexes); il en est de même du quadrilatère-projection $A'B'C'D'$.

Il n'était pas question, naturellement, d'aller plus loin dans cette étude, et, par exemple, de rechercher quels étaient les éléments suffisants pour déterminer complètement la projection demandée, ou bien de décrire toutes les formes possibles de la figure.

Si l'on se place maintenant dans l'hypothèse particulière $a = b \leq d$, qui entraîne $d = c$, les résultats précédents subissent quelques modifications de détail, les démonstrations, parfois plus simples, restant valables. Lorsqu'on suppose $b < d$, les quadrilatères $(A B C D)$ admettent un seul plan de symétrie, qui est le plan médiateur du segment AC . Les quadrilatères $MNPQ$ sont alors des trapèzes isocèles dont les bases MN et PQ sont parallèles à la diagonale AC ; le triangle AN_0P_0 se réduit ici au segment AC , et le cercle circonscrit à ce triangle est remplacé par le cercle passant par A et C et tangent en ces points aux bissectrices extérieures des angles A et C ; le triangle BP_1Q_1 est isocèle; la droite Z est, bien entendu, dans le plan de symétrie du quadrilatère. La projection orthogonale de $(A B C D)$ sur un plan V est un quadrilatère $A'B'C'D'$ circonscriptible admettant comme axe de symétrie la médiatrice du segment $A'C'$. Il est facile, dans ce cas particulier, d'avoir confirmation du fait que la projection orthogonale d'un quadrilatère $(A B C D)$ sur un plan V peut n'être pas convexe: il suffit, par exemple, de prendre, dans un plan W , un triangle isocèle $D'A'C'$ ($D'A' = D'C'$) et un point B , intérieur au triangle, situé sur la médiatrice de $A'C'$, — puis de marquer, sur les côtés $A'D'$ et $C'D'$ les points Q_1 et P_1 tels que $A'Q_1 = A'B = C'B = C'P_1$, — enfin de construire les points de rencontre, A et C , les normales en A' et C' au plan W respectivement avec les droites DQ_1 et DP_1 joignant les points Q_1 et P_1 à un point D arbitrairement choisi sur la normale en D' au plan W ; le quadrilatère $(A B C D)$ ainsi obtenu est bien du type étudié ($a = b, c = d$), le plan W n'est autre que le plan V_1 (triangle BP_1Q_1) de la théorie générale (les triangles ABQ_1 et CBP_1 sont isocèles comme leurs projections orthogonales $A'BQ_1$ et $C'BP_1$ sur W), et la projection de $(A B C D)$ sur ce plan est le quadrilatère non convexe $A'BC'D'$.

Le cas encore plus particulier où $b = d$ (c'est-à-dire $a = b = d = c$) est celui des quadrilatères (A B C D) ayant leurs quatre côtés égaux ; ils admettent deux plans de symétrie rectangulaires, qui sont les plans médiateurs des segments AC et BD, et un axe de symétrie, intersection de ces plans, qui joint les milieux des segments diagonaux et qui se confond avec la droite Z. Les quadrilatères MNPQ sont alors des rectangles et la projection A'B'C'D' est un losange.

Le résumé des principaux résultats obtenus depuis le début était demandé, en conclusion de cette première partie, surtout pour suggérer aux candidats de procéder à une mise au point. L'essentiel était évidemment de faire ressortir que la relation $AB + CD = BC + DA$ caractérise les quadrilatères gauches (A B C D) « circonscriptibles », l'existence de quadrilatères dont les côtés vérifient cette relation étant préalablement établie, — puis d'indiquer que ces quadrilatères admettent une infinité de sphères « inscrites », au sens strict, les centres de ces sphères étant sur une même droite Z, commune aux plans bissecteurs intérieurs des quatre angles A, B, C, D. Les propriétés des points de contact M, N, P, Q, celles des projections de (A B C D) sur un plan perpendiculaire à Z pouvaient ensuite être indiquées. L'étude plus approfondie de certaines de ces propriétés, la recherche de réciproques possibles étaient, bien entendu, hors de propos.

Les réactions des candidats en présence de l'ensemble des questions qui viennent d'être commentées (en cherchant, naturellement, à ne faire intervenir que des notions familières, et des formes de raisonnement accessibles, à des élèves de Première) ont été sensiblement celles que l'on pouvait prévoir. Les premiers résultats, très simples, concernant les triangles AN_0P_0 , BP_1Q_1 sont établis dans la plupart des copies, mais quelques défections se produisent déjà lorsqu'il s'agit de prouver que le quadrilatère MNPQ est plan. Environ la moitié donnent des démonstrations à peu près correctes pour les propriétés des cercles circonscrits aux deux triangles et au quadrilatère MNPQ, mais très rares sont les indications valables relatives à la convexité de ce polygone. L'étude de la droite Z et des points F de cette droite exigeait une observation plus attentive, et aussi une certaine continuité dans l'effort de raisonnement : elle n'est abordée d'une façon suffisante que dans un tiers environ des compositions ; puis la dispersion s'accroît, et les démonstrations exactes des propositions finales, sur les sphères inscrites, sur les quadrilatères-projections de ABCD, se raréfient progressivement, mais leur nombre n'est pourtant pas nul et quelques candidats donnent sur ces points des réponses très acceptables.

En dehors des fautes classiques inévitablement rencontrées tout au long des solutions, il importe de noter une erreur de fond dont la fréquence a paru quelque peu surprenante, à ce niveau, et s'agissant d'élèves choisis parmi les meilleurs, — erreur qui, sous une forme ou sous une autre, rend manifeste l'incompréhension du sens des mots : condition nécessaire, condition suffisante. C'est ainsi que, malgré les précautions prises dans le texte, beaucoup considèrent dès le début la relation $a + c = b + d$ comme définissant une condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit « circonscriptible », alors qu'ils ont simplement démontré qu'elle était nécessairement vérifiée lorsqu'un quadrilatère est « circonscriptible » ; il va sans dire que la construction de la solution des questions suivantes se révèle alors fort laborieuse et se trouve marquée par de fâcheuses contradictions.

Le problème comportait une deuxième partie dont les débuts pouvaient être traités sans le secours des résultats acquis dans la première. Elle avait pour objet l'étude de quelques propriétés des quadrilatères gauches (A B C D) « circonscriptibles », dont deux angles consécutifs, A et B par exemple, sont droits.

Afin de rechercher un mode de construction de tels quadrilatères, il est naturel de partir des données simples : un segment AB, qui sera l'un des côtés, et deux demi-droites AX et BY perpendiculaires à AB, et non parallèles entre elles, qui seront les supports des côtés AD et BC. Si l'on désigne par D et C deux points pris respectivement sur AX et sur BY, la longueur c du segment CD se calcule aisément

en fonction des longueurs $AB = a$, $BC = b$, $AD = d$, et de l'angle θ , compris entre 0 et π , des demi-droites AX et BY ; ce calcul est presque classique, en faisant intervenir la projection orthogonale du segment CD sur un plan perpendiculaire à AB . Il est commode de faire apparaître immédiatement certains éléments géométriques utiles, en menant par exemple par le milieu I de AB les demi-droites Ix et Iy parallèles à AX et BY et de même sens qu'elles ; l'angle $\widehat{xIy}$ a pour valeur θ ; on désignera par It et It' ses bissectrices intérieure et extérieure (It est axe de symétrie pour la figure AB, AX, BY), et par C_0 et D_0 les projections orthogonales de C et D sur le plan xIy .

Ayant ainsi calculé c , la relation (1) $a + c = b + d$ exprime, sous forme nécessaire et suffisante, que le quadrilatère ($ABCD$) est circonscriptible. Un calcul de transformation, ne présentant pas de difficulté malgré la présence d'un radical dans la formule initiale, permet de remplacer la relation (1) par une relation équivalente, indiquée par l'énoncé : $2bd \cos^2 \frac{\theta}{2} = ab + ad$. La condition ainsi écrite

rappelle une formule classique dans la théorie des divisions harmoniques, et la présence des facteurs $(b \cos \frac{\theta}{2})$ et $(d \cos \frac{\theta}{2})$ suggère de faire intervenir les projections orthogonales des segments BC et AD , ou bien IC_0 et ID_0 , sur la bissectrice intérieure It , soient IC' et ID' . En mesurant algébriquement ces projections sur la demi-droite $\overrightarrow{It}$ intérieure à l'angle saillant $\widehat{xIy}$, on a, quels que soient les points C et D sur BX et AY : $\overline{IC'} = b \cos \frac{\theta}{2}$, $\overline{ID'} = d \cos \frac{\theta}{2}$, et la condition caractérisant les

quadrilatères « circonscriptibles » prend la forme équivalente $\frac{1}{IC'} + \frac{1}{ID'} = \frac{2 \cdot \cos \frac{\theta}{2}}{a}$.

Or, quels que soient les points C et D , la droite C_0D_0 coupe en général les bissectrices It et It' en des points G et G' conjugués harmoniques par rapport à C_0, D_0 ; les projections orthogonales de ces points sur It sont G, I, C' et D' qui forment aussi une division harmonique, c'est-à-dire que $\frac{1}{IC'} + \frac{1}{ID'} = \frac{2}{IG}$; cette relation est

encore valable lorsque C_0D_0 est parallèle à It' (le point G' étant rejeté à l'infini), les points C', D' et G étant alors confondus ; elle est donc vérifiée quels que soient C et D .

La condition caractérisant les quadrilatères ($ABCD$) « circonscriptibles » se réduit donc, en définitive, à $IG = \frac{a}{\cos \frac{\theta}{2}}$, ce qui exprime que le point G où la droite

C_0D_0 coupe la bissectrice intérieure It est un point fixe, d'ailleurs facile à construire à partir des données a et θ .

Cette condition est manifestement équivalente à la suivante : la droite CD joignant un point C de BY à un point D de AX rencontre la droite fixe GA parallèle à AB menée par le point G . Cette droite GA peut être définie comme l'intersection des plans perpendiculaires à BY et AX rencontrant respectivement ces demi-droites aux points situés à la distance a des origines B et A .

On voit dès lors un mode de construction simple des quadrilatères étudiés : le sommet C étant arbitrairement choisi sur BY , le quatrième sommet D est le point de rencontre, s'il existe, de la demi-droite AX et du plan (C, GA) ; ou, ce qui revient au même, en faisant intervenir les projections orthogonales C_0 et D_0 de C et D sur Iy et Ix ; le point D_0 est le point de rencontre, s'il existe, de la droite C_0G

et de la demi-droite Ix . La discussion est facile ; il s'agit de déterminer les droites passant par G et coupant à la fois les demi-droites Ix et Iy : les parallèles menées par G à Ix et à Iy coupent respectivement Iy et Ix en des points H_0 et K_0 , tels que

$$IH_0 = IK_0 = \frac{a}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} ; \text{ les demi-droites } H_0y \text{ et } K_0x \text{ définissent les portions de}$$

Iy et de Ix décrites par les points C_0 et D_0 lorsqu'on considère tous les quadrilatères possibles ; les lieux géométriques des sommets C et D sur BY' et AX s'en déduisent immédiatement, par translations parallèles à AB : ce sont des demi-droites HY et KX .

On obtient ainsi une infinité, à un paramètre, de quadrilatères « circonscriptibles » ($ABCD$). On peut remarquer que les longueurs b et d des côtés BC et AD de ces quadrilatères peuvent prendre toutes les valeurs supérieures à la longueur IH_0 , c'est-à-dire à $\frac{a}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}$; il en résulte que le plus petit des quatre côtés d'un tel quadri-

latère n'est pas nécessairement a , il peut être b ou d (on a toujours $a < c$ puisque AB est la perpendiculaire commune à AX et BY) ; mais les côtés b et d sont certainement supérieurs à $\frac{a}{2}$.

A chacun de ces quadrilatères ($ABCD$) sont applicables les résultats trouvés dans la première partie. On déduit de là quelques propriétés simples.

La droite Z correspondant à l'un quelconque de ces quadrilatères peut être définie comme l'intersection des plans bissecteurs intérieurs des angles $\widehat{BAX}$ et $\widehat{ABY}$; ces plans sont indépendants de la position des points C et D ; la droite Z est donc la même pour tous les quadrilatères.

La famille des sphères (F) ayant pour centres les points F de Z et tangentes aux supports des quatre côtés d'un quadrilatère ($ABCD$) est donc également la même pour tous ces quadrilatères, puisque l'une quelconque de ces sphères est complètement définie par son centre F , son rayon étant la distance de F à la droite AB par exemple. Il en est de même pour la famille des plans v contenant les projections orthogonales m, n, p, q des points F de Z sur les supports des quatre côtés. Bien entendu, les sphères S , inscrites « strictement » et les plans V correspondant aux points de contact M, N, P, Q intérieurs aux quatre côtés dépendent du choix des points C et D .

Il résulte de ces remarques que, si l'on considère une sphère (F_1), définie par son centre F_1 sur Z , toutes les droites CD correspondant aux quadrilatères de la famille sont tangentes à (F_1) ; le point de contact p_1 d'une droite CD avec (F_1), point qui n'est pas nécessairement intérieur au segment CD , se trouve toujours sur le cercle γ_1 , section de (F_1) par le plan, perpendiculaire à Z , contenant les projections orthogonales de F_1 sur les trois droites AB, BY, AX .

Il est intéressant maintenant de préciser la position de la droite Z . Les plans bissecteurs intérieurs de $\widehat{BAX}$ et de $\widehat{ABY}$ ont pour traces sur le plan Ixy les perpendiculaires à Ix et à Iy menées par les points Q'_0 et N'_0 de ces demi-droites situés à la distance $\frac{a}{2}$ de I ; ces traces se coupent en un point Ω de la bissectrice intérieure

It de $\widehat{xy}$, qui n'est autre que le milieu du segment IG . Ce point Ω appartient à Z ; ses projections orthogonales sur AX et BY sont les points Q' et N' qui se projettent eux-mêmes orthogonalement sur Ix et Iy aux points Q'_0 et N'_0 ; le plan W déterminé par les points I, Q', N' , projections de Ω sur les droites AB, AX, BY , est donc un plan de la famille v , et la droite Z lui est perpendiculaire. D'autre part, ce plan W coupe le plan Ixy suivant la bissectrice It, car le milieu du segment $Q'N'$, coin-

cidant avec le milieu de $Q'oN'o$ (diagonales d'un parallélogramme), est un point de Ii , distinct de I . Le plan W passe donc par le point Ω , et la droite $I\Omega$ (ou Ii) est la perpendiculaire commune à AB et à Z . Le point Ω est ainsi, pour tous les quadrilatères ($ABCD$), le point F_0 défini dans la première partie, et W est le plan π_0 qui lui correspond.

D'ailleurs, il est facile de voir que ce plan W est un plan de la famille particulière V : les points I , Q' , N' sont en effet intérieurs aux segments AB , AD , BC , quel que soit le quadrilatère ($ABCD$), puisque les longueurs AI , BI , AQ' , BN' , égales à $\frac{a}{2}$ sont toujours inférieures au plus petit des quatre côtés du quadrilatère (que ce soit a , b ou d).

L'angle φ des plans W et Ixy , n'est autre que l'angle aigu de la droite $N'Q'$ avec sa projection $N'oQ'o$ sur Ixy ; il est défini par exemple par la relation

$$\cotg \varphi = \sin \frac{\theta}{2}.$$

La sphère Σ , qui a pour centre Ω , et pour rayon ΩI , c'est-à-dire la sphère ayant pour diamètre le segment IG , est donc, pour tous les quadrilatères ($ABCD$), la sphère (F_0) en même temps qu'une sphère S (d'après les notations de la première partie) ; elle est tangente aux côtés AB , BC , AD aux points I , N' , Q' , et, par conséquent, au côté CD en un point P' qui, d'après les remarques précédentes, est intérieur au segment CD . Le lieu des points P' est porté par le cercle Γ , section de Σ , par le plan W .

Comme Γ est un grand cercle de Σ , tout quadrilatère ($ABCD$) a pour projection orthogonale sur le plan W un quadrilatère $A'B'C'D'$ dont les côtés $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ sont tangents à Γ aux points I , N' , P' , Q' . La figure obtenue dans le plan W peut être précisée : le grand cercle Γ a pour diamètre IG ; le segment $A'B'$ est tangent à Γ en son milieu I , les segments IA' et IB' , inférieurs à $\frac{a}{2}$ (ils sont égaux à $\frac{a}{2} \sin \varphi$), sont inférieurs à *fortiori* au rayon de Γ , qui est égal à $\frac{a}{2 \cos \frac{\theta}{2}}$; les points

de contact N' et Q' des demi-droites $B'Y'$ et $A'X'$ projections orthogonales sur W de BY et AX , sont donc du même côté que I par rapport à la médiatrice du segment IG ; cette médiatrice coupe $B'Y'$ et $A'X'$ aux points H' et K' , projections orthogonales sur W des points H et K , origines des demi-droites HY et KX qui constituent les lieux géométriques des sommets C et D pour tous les quadrilatères ($ABCD$) ; la projection C' de C sur W décrit donc la demi-droite $H'Y'$ et la projection $C'D'$ de CD est portée par la tangente, autre que $B'Y'$ menée par le point C' au cercle Γ ; lorsque le point C' décrit la demi-droite $H'Y'$, le point de contact P' de $C'D'$ avec Γ décrit l'arc $N'_1GQ'_1$ du cercle Γ symétrique de l'arc $N'IQ'$ par rapport au centre Ω (ou par rapport à la médiatrice de IG). Ainsi est précisé le lieu des points de contact P' des côtés CD avec la sphère Σ . On voit également que les projections $A'B'C'D'$ de tous ces quadrilatères ($ABCD$) sur le plan W sont des quadrilatères convexes.

Ce problème comportait de nombreux prolongements, dans des directions que l'on aperçoit sans peine ; mais, qu'ils soient ou non du niveau de la classe de Première, il est inutile d'en parler ici.

La deuxième partie du problème a été abordée par plus d'un tiers des candidats. Le calcul du côté CD a été en général conduit correctement ; quant à la transformation de la formule $a + c = b + d$, si plusieurs l'ont entreprise et menée à bien au point de vue formel, aboutissant à la relation donnée par l'énoncé, nombre d'entre eux n'ont pas songé à mettre en évidence l'équivalence des conditions successivement écrites. L'interprétation géométrique, un peu plus difficile, a été plus rarement

étudiée ; quelques-uns, pour démontrer que le point de rencontre de C_0D_0 avec la bissectrice It est fixe, ont utilisé une expression de la longueur de la bissectrice intérieure d'un angle d'un triangle en fonction de cet angle et des côtés qui le comprennent ; l'idée était loin d'être mauvaise, mais cette expression ne fait pas partie du bagage rudimentaire qu'il est indispensable d'avoir à sa disposition, et les candidats ont parfaitement le droit de l'ignorer ; d'ailleurs, le procédé suggéré par l'énoncé, faisant intervenir la propriété harmonique des deux bissectrices d'un angle, constitue l'un des moyens les plus simples pour calculer les longueurs des bissectrices d'un triangle en fonction des côtés et des angles.

La fin de la deuxième partie, qui faisait surtout appel aux résultats obtenus dans la première, résultats qu'il s'agissait d'adapter à une figure particulière, n'a donné lieu qu'à un petit nombre de réponses correctes, et d'ailleurs incomplètes, la plupart portant sur la construction des quadrilatères (A B C D).

Cent soixante candidats ont pris part à cette épreuve. Puisqu'il s'agit d'un nombre relativement grand la répartition des notes, traduisant elles-mêmes les réactions parfois notablement différentes des membres du jury, avait quelques chances, sinon quelque raison, d'obéir aux lois statistiques considérées comme classiques ; elle n'y a guère manqué, bien qu'il s'agisse d'élèves « sélectionnés » dans les classes de Première des Etablissements publics de l'Union française.

La première correction des compositions, effectuée avec un barème initial défini *a priori* par le jury, a révélé une trentaine de compositions méritant des notes échelonnées entre 7 et 15 sur 20, la grosse majorité étant un peu au-dessous de 10, avec une « tête » très effilée vers les notes les meilleures. Le reste, environ les quatre cinquièmes, obtenait des notes inférieures à 7, avec une condensation très accentuée autour de 5 et 4 ; les copies faibles et très faibles sont relativement rares. Evidemment, la majeure partie des candidats a traité surtout les débuts de la première partie, et assez souvent ceux de la deuxième.

Si l'on essaye de dégager un enseignement de cette expérience, en ce qui concerne la moyenne de nos élèves, il convient sans doute de s'attacher aux constatations les plus fréquentes ; elles ont été mentionnées déjà en commentant la solution du problème. Il semble utile de souligner tout particulièrement :

— en premier lieu, la difficulté que la plupart, même parmi les meilleurs, ont éprouvée pour répondre correctement à la petite question, qui relevait plus du sens commun que des mathématiques, concernant le classement relatif de quatre nombres positifs tels que la somme de deux d'entre eux soit égale à la somme des deux autres (peut-être faut-il chercher une raison de cette défaillance dans le fait qu'il s'agit ici, non d'appliquer quelque « théorème » connu, mais de réfléchir directement sur des données, d'ailleurs bien simples ?) ;

— en second lieu, l'incompréhension, relevée à maintes reprises, et particulièrement accusée à l'occasion d'un problème dont l'énoncé s'efforçait de marquer les étapes afin de ne pas créer de confusions, des mots « condition nécessaire », « condition suffisante » (convient-il d'en rendre partiellement responsable une tendance fréquente à la concision, qui conduit, par exemple, à condenser en une phrase unique une proposition et sa réciproque ? Le gain, apparemment réalisé ainsi, n'est-il pas un peu illusoire ? L'apprentissage des jeunes dans le domaine de la logique élémentaire est souvent malaisé, et certaines formes d'expression, trop ramassées, trop riches en substance, parfois assez conventionnelles, risquent de ne pas être clairement comprises des débutants ; les pertinentes remarques, faites sur ce sujet par M. FOURCHÉ, professeur au Lycée Janson-de-Sailly, à la fin du livre qu'il a publié récemment sur la pédagogie des mathématiques, peuvent trouver ici une illustration. Cependant, les termes : « condition nécessaire », « condition suffisante », « il faut », « il suffit », « propriété caractéristique », sont abondamment utilisés et commentés dès l'initiation, et leur emploi ne devrait plus, après quatre ou cinq années, donner lieu à contre-sens ou à non-sens).

Vingt-neuf compositions ont été retenues pour une seconde lecture ; parmi leurs auteurs on trouve dix-sept élèves de Première C, onze de Première Moderne (dont deux jeunes filles), et un de Première A. Le classement final n'a pas présenté de difficultés ; deux copies, d'ailleurs assez différentes, se détachaient nettement des autres et ont mérité le premier et le second prix ; aux sept suivantes, très honorables, et présentant des qualités diverses, ont été attribués des accessits. Le groupe des neuf lauréats comprend à égalité des élèves de C et de Moderne, le candidat de Première A obtenant un second accessit.

Pour situer approximativement, par des notes, la valeur relative des vingt-neuf travaux d'abord sélectionnés, mais non tous retenus pour une récompense, on peut dire que, les deux premières étant fixées à 15 et 14, les sept suivantes, correspondant aux accessits, s'échelonnent régulièrement de 12 à 10, et que les vingt autres se situent entre 10 et 7.

Dans l'ensemble, sous les réserves déjà indiquées, l'impression est loin d'être mauvaise. Sans doute, en ce qui concerne la forme, les fautes classiques d'orthographe, qu'il est encore permis de relever aujourd'hui, les abréviations osées, les signes plus ou moins bizarres, les rédactions confuses ne sont pas rares, mais plusieurs copies ont révélé des qualités, fort appréciables à ce niveau d'une formation scientifique encore bien neuve, de netteté, d'ordre, de méthode. Et il ne faut pas oublier que, dans cette épreuve, les jeunes candidats se trouvent, pour la première fois, en présence d'un ouvrage de longue haleine, exigeant une continuité de pensée, un effort d'observation et de réflexion, qui ne peuvent guère leur être familiers ; s'ajoutent à cela les difficultés très sérieuses que rencontrent la plupart des débutants en présence d'une figure de géométrie dans l'espace dont ils ont quelque peine, bien souvent, à donner une représentation graphique correcte et suggestive. Si des résultats, somme toute, fort convenables sont ainsi obtenus par un groupe non négligeable de jeunes, il convient d'en attribuer, pour une part importante, le mérite à la qualité de l'enseignement qu'ils ont reçu et à la valeur des maîtres qui les ont formés.

Notons, en terminant, que, sur les neuf élèves de Première qui ont obtenu une nomination en mathématiques au Concours général de 1951 (un accessit attribué, en cours d'année, à un candidat de la France d'Outre-Mer, dont la copie était arrivée tardivement à Paris, avait porté à neuf le nombre des récompenses décernées l'an dernier), cinq se trouvent en 1952 parmi les lauréats les mieux placés des classes de Mathématiques, deux d'entre eux figurant même à la fois sur les palmarès de physique et de mathématiques.

J. DESFORGE,
Inspecteur général de l'Instruction publique.