Sur certaines transformations trigonométriques

Une des fautes les plus fréquentes et les plus difficiles à corriger chez nos élèves du Second Cycle, consiste à dire ou à écrire $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = a + b + c$. J'en trouve un bel exemple dans un manuel assez répandu :

Montrer que : $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Il faut lire : $\sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7} + \sin^2\frac{6\pi}{7} = \frac{7}{4}$.

Il m'a suggéré la généralisation suivante :

Soit $2n+1$ un entier impair quelconque, et le polygone régulier de $(2n+1)$ côtés inscrit dans le cercle trigonométrique. On démontre facilement que la somme des vecteurs joignant le centre O aux $(2n+1)$ sommets est nulle (par exemple en montrant que cette somme géométrique est portée par deux axes de symétrie distincts de la figure).

On en déduit la somme : $\cos 0 + \cos\dfrac{2\pi}{2n+1} + \dfrac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\dfrac{4n\pi}{2n+1} = 0$

et en tenant compte des symétries :

$$(1) \qquad \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}.$$

Elevons les deux membres au carré ; on obtient, outre la somme des carrés $\sum_1^n \cos^2\dfrac{2\pi}{2n+1}$, des doubles produits tels que :

$$2\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{4\pi}{2n+1} = \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \cos\frac{2\pi}{2n+1}$$

leur nombre est de $\dfrac{(n-1)n}{2}$, ce qui, par la transformation précédente, fournit $(n-1)n$ cosinus d'arcs de la forme $\dfrac{2k\pi}{2n+1}$. En raison des symétries dans le rôle et la position des arcs, on obtient donc : $\dfrac{(n-1)n}{n}$ fois la somme des cosinus de la formule (1), donc : $(n-1)\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{n-1}{2}$.

En résumé, l'élévation de (1) au carré donne :

$$(2) \qquad \sum_1^n \cos^2\frac{2k\pi}{2n+1} - \frac{n-1}{2} = +\frac{1}{4}$$

d'où : (3) $\quad \cos^2\dfrac{2\pi}{2n+1} + \cos^2\dfrac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos^2\dfrac{2n\pi}{2n+1} = \dfrac{2n-1}{4}$

Enfin, en tenant compte de $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, il vient

$$n - \sum_1^n \sin^2\frac{2k\pi}{2n+1} = \frac{2n-1}{4}$$

où : (4) $\quad \sin^2\dfrac{2\pi}{2n+1} + \sin^2\dfrac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \sin^2\dfrac{2n\pi}{2n+1} = \dfrac{2n+1}{4}.$

Ce qui, pour $n = 3$ donne bien : $\quad \sin^2\dfrac{2\pi}{7} + \sin^2\dfrac{4\pi}{7} + \sin^2\dfrac{6\pi}{7} = \dfrac{7}{4}$

et par suite, pour ne pas imiter nos élèves :

$$\sqrt{\sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7} + \sin^2\frac{6\pi}{7}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Louis Renard,
professeur au Lycée Janson-de-Sailly.