DEUXIÈME PARTIE

Résolution des triangles

Voici quelques réflexions qui m'ont été suggérées par l'intéressant article de notre collègue MAUGUIN, dans le *Bulletin* n° 146.

On établit dans le cours des systèmes de trois relations qui, complétés par des inégalités imposées aux angles, constituent des conditions nécessaires et suffisantes pour que six nombres, a, b, c, A, B, C, soient les côtés et les angles d'un triangle. Pour calculer ces six nombres, il faut donc trois relations supplémentaires. Donc *tout problème de résolution de triangle permet d'écrire ces trois relations.*

Ces relations peuvent être données. C'est ce qui arrive en particulier dans les cas classiques : donner, par exemple a, B et C, c'est donner trois relations : $a = a_0$, $B = B_0$, $C = C_0$ qui constituent trois équations de solution évidente. Dans les cas plus compliqués, on donnera trois relations entre des segments ou des angles déterminés par le triangle (hauteurs, médianes...), et il suffira de les remplacer par leur expression en fonction de a, b, c, A, B, C, pour avoir les trois équations supplémentaires.

Ainsi on aura un système de six équations à six inconnues dont toute solution donnera les côtés et les angles d'un triangle répondant à l'énoncé, à condition que, si l'on a par exemple utilisé le groupe I du cours, cette solution soit formée de nombres tous positifs. Il suffira donc :

1° *De résoudre* ce système.

2° *De discuter* : c'est-à-dire d'exprimer les conditions que doivent vérifier les données pour que :

a) la résolution soit possible ;

b) les solutions trouvées soient positives.

La discussion comporte donc deux parties distinctes, la première étant celle de l'existence des solutions du système, la deuxième celle de la convenance de ces solutions au problème de la détermination d'un triangle. Je ne veux pas dire que ces deux parties doivent être étudiées séparément et successivement : au contraire, comme l'explique très clairement MAUGUIN, elles peuvent s'aider mutuellement. Mais il faut y penser pour ne rien oublier.

C'est d'ailleurs tout : il est bien entendu *inutile* d'exprimer que les angles sont inférieurs à π, que $|b - c| < a < b + c$, etc... Bien plus, certaines autres conditions peuvent être évidentes, mais il est naturellement inutile de les exprimer dans la discussion, ce sont des conséquences des résultats de la discussion telle que nous l'avons exposée. Je m'explique sur un exemple : soit à résoudre un triangle dont on donne b et c, sachant de plus que la hauteur AH est égale au côté a. On voit aisément que $A < \frac{\pi}{2}$: si AH est extérieur au triangle, A est inférieur à un angle d'un triangle rectangle, sinon AH partage le triangle en deux triangles rectangles dont les angles en A sont inférieurs à $\frac{\pi}{4}$ puisque BH et CH sont inférieurs à $AH = a$. Mais cette condition $A < \frac{\pi}{2}$ n'est pas à introduire dans la discussion.

On peut aller plus loin, car on peut dire que les éléments inconnus du triangle, calculés en fonction des données peuvent présenter des maxima ou des minima. Comme ce sont en général des fonctions de plusieurs variables, définies parfois par des équations implicites, leur étude ne sera possible alors qu'en Mathématiques Supérieures. Mais il y a là un problème intéressant à poser, même en Mathématiques Élémentaires, quand on a une fonction d'une seule variable. Signalons que, dans l'exemple déjà choisi, l'angle A peut être déterminé par l'équation linéaire en sin A et cos A : $bc \sin A + 2bc \cos A = b^2 + c^2$ qui ne dépend, comme on pouvait le prévoir, que du rapport $\frac{b}{c}$. On pourra voir, en prenant par exemple pour inconnue auxiliaire $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$, que le maximum de A correspond à $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, et qu'il est atteint quand $b = c$.

R. ROSTOLLAND,

Lycée Marcel-Roby, St-Germain-en-Laye.