Rappel Hypg

32e Année. — N° 155 Mars 1953

# Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Publication trimestrielle

Administration : 23, Boulevard Saint-Germain, Paris (5e)

## SOMMAIRE

### PREMIÈRE PARTIE



### DEUXIÈME PARTIE




**Cotisations : 400 fr.** **Abonnements : 800 fr.**

**Expédition des Bulletins : 29, rue d'Ulm, Paris 5e**

Abonnement d'un an au *Bulletin* (prix net) : France ........ **800 fr.**

Prix d'un numéro du *Bulletin* ou d'un *Supplément* (prix net) : France. **200 fr.**

Les membres de l'Association (cotisation : 400 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés.*

Régler par chèque postal en utilisant l'adresse suivante :

**Paris, Cc. 5708-21**

**Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public**

**29, rue d'Ulm, Paris (5e)**

Couverture page II

*Présidents d'Honneur*

Mlle Dionot, M. Delcourt, M. Hennequin

## Bureau :

| | |
|---|---|
| *Président :* | M. Monjallon, 23, boulevard Saint-Germain, Paris (5ᵉ). |
| *Vice-Présidents :* | Mlle Masson, 3, avenue de la Porte-de-Montrouge, Paris (14ᵉ). |
| | M. Biguenet, 41, rue Mad.-Michelis, Neuilly (Seine). |
| | M. Cagnac, 53, rue de Babylone, Paris (7ᵉ). |
| | M. Girault, 5, rue Isabey, Paris (16ᵉ). |
| *Secrétaires :* | M. Benoist, Collège Diderot, 60, bd de La Villette, Paris (19ᵉ). |
| | M. Girard, 37, rue Davioud, Paris (16ᵉ). |
| | M. Rostolland, professeur au Lycée Marcel-Roby, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.). |
| *Trésorier :* | M. Legrand, 3 *bis*, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise). |

## Comité :

*Membres élus*

*Sortants en 1953 :* Mlle Affre (*Fénelon*) ; M. Biguenet (E.N.P. St-Ouen) ; M. Chazal (*Saint-Louis*) ; M. Girard (*Arago*) ; M. Guitton (*Saint-Louis*) ; M. Legrand (Compiègne).

*Sortants en 1954 :* Mlle Barbier (*Victor-Duruy*) ; M. Benoist (*Diderot*) ; M. Girault (*J.-B. Say*) ; M. Jacquemart (*Pasteur*) ; M. Minois (*Lakanal*) ; M. Ruff (*Voltaire*).

*Sortants en 1955 :* M. Cagnac (*Louis-le-Grand*) ; M. Durrande (*St-Louis*) ; M. Huisman (*Montaigne*) ; M. Marvillet (Strasbourg, *Kléber*) ; M. Monjallon (*St-Louis*) ; M. Singier (*St-Louis*).

*Sortants en 1956 :* Mlle Masson (*Marie-Curie*) ; M. Bay (*Condorcet*) ; M. Caralp (*Montaigne*) ; M. Crozes (*Henri-IV*) ; M. Deltheil (Fac. Sc. *Toulouse*) ; M. Pétrus (*Janson*).

*Membres de droit*

Mme Nicoud (Lyon, *Marie-Vidalenc*) ; M. Canonge (Castres) ; M. Duval (*Dorian*) ; M. Poux (Saint-Cloud).

### Rapporteurs

*Classes Nouvelles :* Mlle Masson ; *Enseignement moderne court :* M. Girault ; *Enseignement technique :* M. Biguenet ; *Ecoles Normales :* M. Girault ; *Premier Cycle :* M. Caralp ; *Seconde et Première :* M. Rostolland ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. Favrelle, M. Minois, Mlle Protin (S. Ex.) ; *Mathématiques Supérieures :* M. Durrande ; *Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. Durrande ; *Définitions de mots et notations mathématiques: Axiomatique et Redécouverte:* M. Crozes ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales : M. Edde. — Baccalauréat : M. Favrelle. — Grandes Ecoles : M. Chazal. — *Concours général :* M. Singier ; *Histoire des Mathématiques :* M. Itard ; *Cinéma d'Enseignement :* M. Euvrard ; *Matériel d'Enseignement :* M. Monjallon ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. Walusinski.

### Correspondants

*Aix-Marseille :* M. Bertrand (Marseille, *Thiers*) ; *Besançon :* M. Bouchat (Besançon) ; *Dijon :* M. Euvrard (Dijon) ; *Lille :* M. Favrelle (Lille, *Faidherbe*) ; *Lyon :* M. Thovert (Lyon, *Ampère*) ; *Montpellier :* M. Dussol (Montpellier) ; *Nancy :* M. Mougenot (Nancy, *Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. Renault (Rennes) ; *Strasbourg :* M. Ehrhart (Strasbourg, *Kléber*) ; *Maroc :* M. Queysanne (Casablanca, *Lyautey*) ; *Tunisie :* M. Sauvan (Tunis, *Carnot*).

32e Année — No 155 Mars 1953

**Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public**

# PREMIÈRE PARTIE

## I. Documents officiels

### Agrégation de Mathématiques (Femmes)

### Rapport de M. l'Inspecteur général DESFORGE, Vice-Président du Jury

(SESSION 1952)

Le Jury de l'Agrégation féminine de Mathématiques pour la session de 1952 était composé ainsi : M. VILLAT, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, président ; M. DESFORGE, inspecteur général de l'Instruction publique, vice-président ; Mlle BRULARD, professeur de mathématiques au Lycée Camille-Sée ; Mlle CHARPENTIER, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes ; M. HOCQUENGHEM, professeur au Conservatoire national des Arts et Métiers.

Pour les épreuves pratiques et orales, auxquelles M. VILLAT n'a pu assister, la présidence a été assurée par M. DESFORGE, et M. VILLAT a été remplacé numériquement par M. DUGUÉ, professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

La session du concours a duré du 26 mai, date d'ouverture des épreuves écrites, au 2 août. Les résultats d'admissibilité ont été donnés le lundi 7 juillet. Les épreuves orales et les épreuves pratiques ont eu lieu au Lycée Fénelon, à Paris, à partir du 15 juillet.

Le nombre de candidates inscrites était soixante-dix-huit.

#### EPREUVES ECRITES

Soixante-neuf candidates ont pris part à la première épreuve ; deux d'entre elles ont abandonné le concours après la composition de Mathématiques Elémentaires, et deux autres après la composition de Mathématiques Spéciales.

Pour les soixante-cinq candidates ayant terminé les épreuves écrites, les notes correspondant à l'ensemble des quatre compositions sont échelonnées entre 61 et 11,5, pour un maximum de 80 points, c'est-à-dire, à peu près entre 15 et 3 sur 20. La répartition de ces notes d'ensemble est la suivante : treize sont supérieures à 10 sur 20 ; vingt sont comprises entre 10 et 8 ; treize entre 8 et 6 ; neuf entre 6 et 5 ; quatre entre 5 et 4,5, et six entre 4 et 3. En détaillant davantage, pour le groupe des meilleures, on trouve d'abord une note un peu supérieure à 15 (61 sur 80), qui se détache nettement, la suivante étant très voisine de 13 (52,5 sur 80) ; puis viennent : deux 12,5 ; un 12 ; deux 11,5 ; six notes décroissant régulièrement de 11 à 10 ; une assez forte condensation de sept notes entre 10 et 9,5 ; trois très proches de 9, et de nouveau un lot compact autour de 8,5.

Le Jury a décidé de déclarer admissibles les trente et une premières candidates de ce classement, trois *ex-æquo* se trouvent en fin de liste, avec une moyenne de 8,25 sur 20, qui est pratiquement la même que celle de la dernière admissible des précédents concours (8 en 1949 et en 1951, et 8,5 en 1950). Cependant, le nombre des admissibles est sensiblement supérieur à ceux des années passées : vingt-trois en 1949, vingt-deux en 1950, vingt-cinq en 1951, le nombre des candidates étant toujours sensiblement le même.

La moyenne des notes d'écrit, pour les trente et une candidates admissibles, est exactement égale à celle de l'an dernier, c'est-à-dire 10,1 ; elle est voisine de 5,8 pour les trente-quatre non-admissibles (ayant pris part aux quatre épreuves écrites) ; elle est environ 7,9 pour l'ensemble des soixante-cinq candidates.

Ces résultats sont comparables à ceux des années précédentes ; si les moyennes générales semblent un peu supérieures aux moyennes correspondantes de 1951, il faut sans doute en trouver la cause dans une répartition assez différente des notes faibles et médiocres pour les compositions de Mathématiques Elémentaires et de Mathématiques Spéciales, et dans une diminution marquée des notes tout à fait nulles en analyse et en mécanique. Pour le groupe des admissibles, sensiblement plus nombreux que l'an dernier, le fait que la moyenne s'est conservée, semble montrer une légère amélioration du niveau des compositions ; elle est, à vrai dire, plus apparente que réelle et tient plutôt à quelques réussites individuelles dans telle ou telle épreuve, d'analyse ou de mécanique en particulier. Les comptes rendus plus détaillés des différentes compositions vont donner, sur ces points, des précisions ; ils montreront que les observations présentées dans les rapports antérieurs restent valables, et qu'on ne saurait trop insister auprès des candidates pour qu'elles accomplissent un sérieux effort dans le domaine des Mathématiques Elémentaires et Spéciales, quelque peu délaissé lors de la préparation des certificats de licence, — bien à tort du reste, car l'étude sérieuse de l'analyse et de la mécanique classiques doit naturellement conduire l'apprenti-mathématicien à une réflexion approfondie sur les notions de base et à une mise au point des éléments.

Le groupe des trente et une admissibles comprend onze professeurs titulaires et une déléguée ministérielle en exercice ; un professeur titulaire en congé ; six élèves de l'Ecole Normale Supérieure et trois anciennes élèves ayant accompli une quatrième année à l'Ecole ; deux élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses, dont l'une était déjà titulaire du certificat d'aptitude à l'enseignement dans les collèges ; trois stagiaires d'enseignement, dont une auditrice à l'Ecole Normale Supérieure, et deux étudiantes aux Facultés de Lyon et de Marseille ; quatre étudiantes, dont trois des Facultés de Grenoble, de Nancy et de Strasbourg.

Parmi les soixante-dix-huit candidates inscrites en 1952, dix-sept avaient été admissibles à des sessions antérieures ; douze d'entre elles sont de nouveau admissibles cette année (trois sont même tri-admissibles) : dix professeurs titulaires, une étudiante et une stagiaire d'enseignement.

⁂

Les compositions écrites (1) ont donné lieu aux observations suivantes :

### Composition de Mathématiques Elémentaires (Mlle Brulard)

Le problème de Mathématiques Elémentaires proposait essentiellement, en géométrie plane, l'étude des enveloppes de trois familles de droites, définies à partir de systèmes de cercles, puis, en géométrie dans l'espace, celle des enveloppes de trois familles de plans, définis de façon analogue à partir de systèmes de sphères.

(1) Enoncés publiés au *Bulletin* n° 140, juillet 1952.

Sous certaines conditions, la figure initiale apparaissait comme section plane de la figure de l'espace, et plusieurs des propriétés des coniques de la partie I, assez longues à établir directement, découlaient simplement des propriétés, plus faciles à démontrer, des cônes de la partie II. La partie III demandait de faire ce rapprochement, lorsqu'il était possible.

Voici le détail des observations :

*Partie I.* — Quarante-deux candidates ont trouvé correctement la conique (E) ; presque toutes, profitant du renseignement fourni par l'énoncé, ont cherché le lieu du point H, projection de A sur l'axe radical $\Delta$ ; le produit $\overline{AH}.\overline{MC}$ restant constant, elles ont situé le point H sur le transformé du cercle ($\Gamma$) par la translation $\overrightarrow{MA}$ et par l'inversion dont le pôle est le point A et dont la puissance $h$ est définie par la relation : $2h = K - AM^2 + m^2$. Des calculs classiques dans la théorie de l'inversion permettaient alors de trouver, dans le cas général où la conique (E) existe, la position ou la valeur de ses éléments remarquables ; l'excentricité $e$ est égale à $\frac{M\Gamma}{\rho}$, et la directrice D, associée au foyer A a pour pied sur l'axe focal le point I déterminé par la condition : $\overline{AI}.\overline{M\Gamma} = h$. Peu de candidates ont songé aux cas d'exception, où la puissance $h$, ou bien la distance $M\Gamma$, sont nulles.

Vingt-sept copies seulement signalent la condition d'existence des cercles (C) ; les autres n'ont pas su différencier l'enveloppe ($\varepsilon$) de la conique (E).

La deuxième question a fait perdre beaucoup de temps à de nombreuses candidates, qui ont cru devoir utiliser la translation et l'inversion précédentes, alors qu'elles pouvaient se ramener à l'étude du point d'intersection de deux tangentes à la conique (E) ayant l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

— ou bien la corde joignant leurs points de contact passe par le foyer A,

— ou bien l'angle des droites joignant le foyer A aux deux points de contact a une valeur constante (généralisation du cas précédent),

— ou bien ce même angle a des bissectrices fixes,

— ou bien les bissectrices des angles formés par les deux tangentes elles-mêmes ont des directions fixes.

Si le premier et le troisième de ces cas ont été traités assez fréquemment, le second ne l'a été que dans six copies et le quatrième dans neuf. Les limitations des lieux sont incorrectes en général.

L'enveloppe ($\varepsilon'$) de la polaire du centre C par rapport au cercle (M) se trouvait facilement. Quant à l'enveloppe ($\varepsilon''$), en remarquant que la polaire $\Delta''$ de M par rapport au cercle (C) est l'homothétique, dans l'homothétie (M, 2), de l'axe radical de (C) et du cercle-point M, on la déduit facilement de celle des coniques (E) étudiées au début qui correspond à $m = 0$ ; quinze candidates y ont pensé.

Les trois coniques (E), (E'), (E") ont même excentricité ; leurs axes focaux sont parallèles ; elles se correspondent donc deux à deux par homothétie (ou translation). Le point A, le point M et le symétrique B de M par rapport à A sont respectivement foyers de ces coniques. Les projections orthogonales I et I' des foyers A et M sur les directrices qui leur sont respectivement associées sont définies par les relations : $\overline{AI}.\overline{M\Gamma} = h$, $\quad MI'.M\Gamma = m^2$.

Quant à la projection orthogonale I" du foyer B sur la directrice associée, pour la conique (E"), elle est la transformée dans l'homothétie (M, 2) de la projection orthogonale $I_0$ du foyer A sur la directrice associée $D_0$, pour celle des coniques de la famille (E) qui correspond à $m = 0$ ; la valeur $h_0$ de $h$ relative à cette dernière conique est donnée par l'égalité $2h_0 = K - AM^2 = 2h - m^2$, et le point I" est, en définitive, déterminé par la condition $\overline{BI''}.\overline{M\Gamma} = 2h - m^2$. Les trois vecteurs parallèles $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{MI'}$, $\overrightarrow{BI''}$ sont donc liés par la relation $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{MI'} + \overrightarrow{BI''}$, qui exprime, puisque A est le milieu du segment MB, que les trois points I, I′, I″ sont alignés.

En général, lorsque $h$ est différent de $m^2$, la droite II′I″ et la droite AMB se coupent en un point P tel que $\qquad \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PM}} = \dfrac{h}{m^2}.$

Si aucune des coniques n'est dégénérée, ce qui suppose entre autres $2h \neq m^2$, ce point P est le centre commun de trois homothéties faisant correspondre deux à deux (E), (E′) et (E″) ; les rapports de ces homothéties se calculent aisément à partir des relations précédentes. L'étude des cas particuliers ne présente aucune difficulté.

Trois candidates ont obtenu l'essentiel de ces résultats ; plusieurs sont gênées ou se trompent parce qu'elles n'ont pas défini les éléments remarquables des diverses coniques par des relations faisant intervenir des mesures algébriques.

Ce même défaut est encore une source d'erreurs dans la suite, par exemple lorsqu'il s'agit de déterminer le lieu de A au début de la quatrième question. Dans cette étude, peu de copies indiquent que la conique (E′) est fixe, tandis que les coniques (E″) se répartissent en deux familles, celles d'une même famille étant égales entre elles. Le deuxième paragraphe de cette question était relatif au cas où le rayon $\rho$ est variable, les autres données restant fixes ; les coniques (E) ont alors un foyer fixe, ainsi que la directrice qui lui est associée, il en est de même de (E′) et de (E″). Une copie donne ici des résultats à peu près complets, quatre autres ne contiennent que des indications fragmentaires.

La cinquième question proposait l'étude de l'une des réciproques possibles de la propriété obtenue tout au début du problème. Si l'on se donne une conique (E), l'un de ses foyers A, un cercle (Γ) et un nombre K, il existe au plus deux cercles (M) dont les centres sont situés sur la parallèle à l'axe focal de (E) menée par Γ, à une distance de ce point égale à $\rho . e$, les rayons de ces deux cercles étant assujettis par exemple à la condition $\overline{AI}.\overline{M\Gamma} = h$, c'est-à-dire $K - \overline{AM}^2 + m^2 = 2.\overline{AI}.\overline{M\Gamma}$. Ce point de vue était commode pour prouver que les deux cercles (M) ainsi obtenus, lorsqu'ils existent, répondent effectivement à la question. A part une candidate, qui n'a du reste pas complètement achevé la solution, toutes les autres ont commis des erreurs, et en particulier des erreurs de signes dans les expressions des rayons et n'ont pu traiter correctement la fin de cette première partie.

*Partie II.* — Les trois plans, dont on demande les enveloppes, sont parallèles entre eux, chacun passe par un point fixe facile à mettre en évidence, et tous trois sont perpendiculaires à la droite MC, qui engendre tout ou partie du cône (M) ayant M pour sommet et (Γ) pour base ; chacun de ces trois plans enveloppe donc tout ou partie d'un cône déduit par une certaine translation du cône supplémentaire du cône (M). Sept candidates seulement ont pensé à ces cônes supplémentaires ; d'autres, opérant comme au début de la géométrie plane, ont souvent trouvé les sommets des cônes, mais non les cônes eux-mêmes ; d'autres enfin se sont réfugiées bien prématurément dans le domaine que faisait entrevoir la troisième partie et sur lequel nous aurons l'occasion de revenir.

La deuxième question se traite facilement si l'on remarque que la droite commune aux plans $\Pi_1$ et $\Pi_2$ est la perpendiculaire menée par le point S au plan $MC_1C_2$. Quatre copies résolvent correctement deux ou trois des cas proposés : plusieurs font, là encore, appel à la troisième partie.

Nous n'insisterons pas sur la troisième question, qui n'a pas été valablement abordée.

*Partie III.* — Un grand nombre de candidates considèrent, le plus souvent dès le début de la partie II (gométrie dans l'espace), la section par le plan V de la figure de l'espace ; elles voient ainsi réapparaître les conditions du début du problème ; elles se servent ensuite des deuxième et troisième questions de géométrie plane pour trouver les enveloppes ($\Sigma'$) et ($\Sigma''$) et résoudre la deuxième question de géométrie dans l'espace. Elles ne voient pas toujours que leurs démonstrations ne sont valables que s'il existe un plan parallèle à V (ou confondu avec V) coupant réellement la sphère (M) et certaines des sphères (C), condition qui n'est pas forcément remplie. C'est pourquoi l'énoncé ne proposait qu'à la fin le rapprochement des deux parties du problème, la solution directe de la partie II permettant de retrouver les trois enveloppes de la partie I, leurs propriétés essentielles, leurs correspondances par des homothéties ayant le même centre (les sommets des trois cônes intervenant dans la deuxième partie étant alignés), ainsi que la réciproque proposée par la cinquième question de la partie I.

Comme on le voit, la presque totalité du problème a été abordée, mais de façons très diverses suivant les candidates. L'une d'elles a traité avec beaucoup de précision presque toute la partie I, mais a seulement effleuré la partie « espace » ; une autre, arrêtée dès le début en géométrie plane, a su comprendre la suggestion faite en tête de l'énoncé et a étudié directement la deuxième partie, dont elle a trouvé d'ailleurs les résultats essentiels ; c'est le cas aussi de quelques-unes qui, sérieusement gênées par les premières questions, ont dû se louer de la longueur du texte et des possibilités variées qui leur étaient ouvertes pour commencer ou poursuivre la recherche. Certaines ont partagé leurs efforts entre les deux premières parties, donnant sur plusieurs points des indications correctes, mais trop souvent incomplètes ou insuffisantes. Cette lenteur de la majorité des candidates en présence d'un problème qui était parfaitement accessible, a été déjà mentionnée à propos des concours précédents ; elle reste l'une des critiques dominantes, et il faut, pour une bonne part, l'attribuer à un entraînement insuffisant.

Dans le barème adopté, la partie I correspond sensiblement aux trois cinquièmes du total, les deux cinquièmes restants ayant été attribués aux parties II et III groupées. Les notes, sur 20, obtenues par les soixante-neuf candidates, se répartissent ainsi : un 16, un 14, deux 13,5, un 13, deux 12, un 11,5 et un 11, deux 10,5 et 10, puis onze notes entre 10 et 8, quatorze entre 8 et 6, onze entre 6 et 4, et vingt et une inférieures à 4. La moyenne générale de l'épreuve est très voisine de 6 sur 20, tandis que la moyenne, pour les trente et une admissibles, est un peu supérieure à 8 ; elle s'élève au voisinage de 9,5 pour le groupe des vingt et une reçues. Trois ou quatre des candidates qui avaient un bon classement pour cette composition n'ont pu malheureusement être retenues pour l'admissibilité.

Comme l'an dernier, une copie se détache nettement de l'ensemble. Il convient de remarquer, à ce sujet, que, si les problèmes proposés sont parfois jugés trop longs ou trop difficiles pour la moyenne, l'on trouve presque toujours quelque candidate capable, en six heures, de dominer la majeure partie de la question et de rédiger une solution, non impeccable sans doute, mais prouvant néanmoins la vivacité d'esprit et la solidité des connaissances de son auteur. A l'autre extrémité de la liste, il faut signaler que le nombre des notes très basses, inférieures à 4 ou 5 sur 20, est moindre qu'au précédent concours ; il faut souhaiter que ce fait corresponde à un nombre moins élevé de candidates abordant cette épreuve de Mathématiques Elémentaires sans autres connaissances que des souvenirs plus ou moins confus d'une lointaine classe de Mathématiques.

Cependant, les notes médiocres ou faibles sont encore en nombre excessif ; elles baissent trop souvent le total de certaines candidates qui ont ailleurs des résultats convenables ; on en trouve même chez quelques admissibles qui ont été ainsi rejetées vers la fin de la liste et qui n'ont pas toujours pu regagner, à l'oral, assez de points pour être reçues. Il est donc utile d'insister encore sur la nécessité d'une préparation active à cette épreuve, et d'essayer de convaincre les futures candidates qu'il ne suffit pas de relire, de façon plus ou moins passive, des traités de géométrie, mais qu'il faut y joindre un effort personnel de réflexion en vue de classer leurs idées, de saisir et de dominer les modes de raisonnement, ne serait-ce que pour éviter de s'engager dans des voies trop compliquées ou stériles le long desquelles on gaspille un temps précieux.

### Composition de Mathématiques Spéciales (M. Hocquenghem)

L'énoncé proposait l'étude de quelques propriétés de la surface (S) engendrée par les droites T tangentes communes à trois sphères (A), (B), (C), ayant pour rayon l'unité et pour centres les sommets A, B, C d'un triangle équilatéral dont le côté a pour longueur 2.

Les deux premières questions du problème conduisaient aux équations des droites T ; les quatre autres, indépendantes entre elles, pouvaient être traitées dans un ordre arbitraire. Examinons-les successivement.

1° La projection orthogonale M du milieu O du côté BC sur une droite T est dans le plan $xOz$, médiateur du segment BC. C'est là une propriété immédiate, à la portée d'un élève de Première et pourtant une dizaine de candidates n'ont pu la mettre en évidence ; une bonne partie des autres établit ce résultat par des calculs plus ou moins laborieux, alors qu'il s'agissait, presque évidemment, d'une remarque géométrique destinée à faciliter la mise en équations du problème.

Le calcul conduisait assez rapidement à l'équation cartésienne ou polaire du lieu du point M. La plupart des candidates n'ont vu que la méthode la plus brutale : écrire qu'une droite, donnée par des équations souvent maladroitement choisies, est tangente successivement aux trois sphères, et en déduire la représentation analytique du lieu par élimination de paramètres. Un fait essentiel, souvent négligé, est que par tout point M passent deux droites T symétriques par rapport au plan $xOz$ ; l'utilisation de cette propriété évidente simplifiait beaucoup les calculs.

Ce lieu du point M fait partie d'une conchoïde, par rapport au point O, d'une ellipse ayant un foyer en O ; l'énoncé précisait d'ailleurs que cette ellipse est la section par le plan $xOz$ du cylindre circonscrit aux deux sphères (A) et (B). Beaucoup de candidates paraissent ignorer qu'une telle conchoïde doit, raisonnablement, être étudiée en coordonnées polaires, et se perdent naturellement dans de pénibles calculs en coordonnées cartésienes. D'autres trouvent bien une équation polaire de la courbe, mais se trouvant en présence de deux valeurs pour le rayon vecteur, elles écartent délibérément l'une d'elles sans explication valable, et surtout sans remarquer que ces deux valeurs correspondent à la même courbe. La conchoïde ne convenait pas dans son ensemble, si l'on se limite aux droites T réelles ; cette limitation a été en général négligée.

La construction du lieu de M se ramenait à la construction classique d'une courbe en coordonnées polaires. Les trois points doubles ont été rarement déterminés. De nombreux tracés sont trop fantaisistes, quelques-uns sont exacts, mais négligés.

La section de la surface (S) par le plan $xOz$ comprenait, bien entendu, outre la courbe précédente, deux génératrices T issues du point O.

2° Dans la recherche des équations d'une droite T, mises sous une forme donnée dans l'énoncé et faisant apparaître deux paramètres angulaires liés, $\varphi$ et $\theta$, trop de candidates recommencent des calculs déjà faits sans se rendre compte de la répétition. Il était d'ailleurs facile d'observer que la relation entre $\theta$ et $\varphi$, explicitement indiquée dans le texte, constituait un contrôle des résultats de la première partie Dans quelques copies, on vérifie que les équations données définissent bien une droite T, mais cela ne suffit pas pour établir que l'on obtient ainsi toutes les droites T.

La limitation du champ de variation des paramètres $\theta$ et $\varphi$ ne présentait pas de difficulté. Il convient sans doute d'attribuer à la nervosité de certaines candidates, dans une épreuve de concours, des bévues telles que celle-ci : « à une valeur de cos $\varphi$ ne correspond qu'une seule valeur de $\varphi$ ».

Parmi les positions remarquables de la droite T, on signale en général celles de ces droites qui sont situées dans les plans médiateurs de BC, CA, AB. Mais très peu de candidates pensent aux droites T parallèles au plan $xOy$ et qui forment deux triangles équilatéraux ; aucune ne remarque que les droites T des plans médiateurs de BC, CA, AB forment deux trièdres trirectangles dont les sommets sont les points doubles, autres que O, de la conchoïde lieu de M.

3° Il s'agissait ici de montrer que les déterminations des angles d'une droite T arbitraire avec les trois côtés du triangle ABC pourraient être choisies de façon que la somme de ces angles soit égale à deux droits. L'énoncé n'a pas toujours été compris ; beaucoup n'ont pas lu, sans doute, le mot « quelconque » et ont cru qu'il fallait déterminer des droites T particulières... Aucune des compositions ne contient une démonstration par le calcul, alors qu'il suffisait d'établir que ces angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ vérifiaient une relation telle que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1 = \pm 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$. Une candidate, dont la copie contient, pour le reste, fort peu de chose, a donné une solution géométrique du résultat demandé.

4° La détermination de l'enveloppe des projections des droites T sur le plan $xOz$ a été abordée par beaucoup de candidates, qui ont su trouver une représentation paramétrique de la courbe, mais la construction en est rarement faite avec exactitude, et l'on ne songe guère à la limitation correspondant aux droites T réelles.

Le contour apparent de (S) sur le plan $xOz$ comprend évidemment l'enveloppe précédente, mais également deux points, projections de celles des droites T qui sont perpendiculaires au plan $xOz$. Ces deux points ont été signalés dans une seule composition.

5° En désignant par P la projection orthogonale sur une droite T quelconque du centre de gravité G du triangle ABC, on demandait d'établir une relation entre les puissances $P_A$, $P_B$, $P_C$ du point P par rapport aux sphères (A), (B), (C), puis de montrer que le lieu du point P est tracé sur un tore.

Beaucoup de candidates ont fait, à ce sujet, des calculs compliqués et sans intérêt. Quelques-unes cependant ont remarqué que P est le centre de gravité des points de contact de la droite T avec chacune des trois sphères. On en déduit la relation :

$$\pm \sqrt{P_A} \pm \sqrt{P_B} \pm \sqrt{P_C} = 0$$

ou

$$P_A^2 + P_B^2 + P_C^2 - 2P_B P_C - 2P_C P_A - 2P_A P_B = 0$$

Cette relation est rationnelle par rapport aux coordonnées du point P, et représente une surface contenant le lieu du point P. Il est facile, par un changement d'axes évident, de vérifier que cette surface est un tore. Deux candidates seulement ont obtenu l'équation de cette surface, mais, n'ayant pas songé au changement d'axes, elles n'ont pu établir qu'il s'agissait d'un tore.

6° Cette dernière question n'a été abordée avec succès par personne ; elle ne comportait pourtant aucun calcul et ne demandait qu'un peu de réflexion pour être traitée.

D'une façon générale, ce qui frappe le plus à la lecture des copies, c'est précisément ce manque de réflexion. On a trop souvent l'impression d'une course contre la montre. Ayant obtenu un résultat, beaucoup ne cherchent nullement à en préciser le sens, à en prévoir quelques conséquences, ou même, tout simplement, à améliorer la façon de l'obtenir. Tout ce qui semble importer, c'est d'aligner des calculs, de toucher à toutes les questions, et d'être de temps en temps d'accord avec certaines des indications données par l'énoncé. Cependant, il est bien certain qu'une candidate qui prendrait la peine d'approfondir tel ou tel point acquis, aurait quelque chance de déceler les fils conducteurs conduisant à la solution des questions successives.

Il s'agit là, bien entendu, des bonnes candidates, et non de celles qui tentent leur chance malgré leur ignorance, bien vite manifestée, des connaissances les plus élémentaires (je pense en particulier à l'une d'elles qui, en six heures, a réussi à découvrir que l'équation $ux + vy + wz + h = 0$ représentait une droite).

Parmi les maladresses les plus fréquentes, il convient de signaler celles qui consistent à ne pas voir que $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ est égal à $2+\sqrt{3}$, que les équations polaires $\rho=f(\theta)$ et $\rho=-f(\theta+\pi)$ représentent la même courbe, que les équations

$$\rho=\frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}+1 \quad \text{et} \quad \rho=\frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}-1$$

définissent deux courbes algébriquement distinctes. Et l'on peut souhaiter que des constructions de courbes, telles que celles qui étaient proposées ici, soient faites en un temps très réduit et avec une précision suffisante.

Ce problème, aux contours nettement limités par l'énoncé, paraissait relativement facile et l'on pouvait espérer avoir quelques copies contenant l'essentiel des réponses. Il n'en a rien été. L'idée qu'on ne peut achever un problème d'agrégation serait-elle généralement répandue chez les candidates ? Ce serait une bien fâcheuse attitude d'esprit que d'être persuadé, en commençant une épreuve, qu'on ne pourra la réussir.

La répartition des notes est la suivante : un 14, deux 13, deux 12, deux 11, trois 10, seize comprises entre 10 et 8, dix comprises entre 8 et 6, cinq entre 6 et 4, enfin un lot trop important de vingt-six qui sont inférieures à 4 et parmi lesquelles douze correspondent à des compositions extrêmement faibles. La moyenne générale de l'épreuve est voisine de 5,7 ; elle s'élève à 8,5 pour le groupe des trente et une admissibles et à 9,3 pour celui des vingt et une reçues.

### Composition de Calcul différentiel et intégral (M. Villat)

Le problème d'Analyse proposé se rattachait à l'étude de la détermination d'une courbe gauche, dont les rayons de courbure et de torsion sont donnés en fonction de l'arc $s$. Cette question est susceptible de vastes développements, dont on proposait quelques détails aux candidates.

Pour préparer le terrain, on commençait par demander, étant donnée une équation différentielle du second ordre, linéaire et homogène, de montrer que les carrés de ses solutions satisfont à une équation différentielle du troisième ordre, également linéaire et homogène. La formation de cette équation du troisième ordre était aisée. Etant connues deux solutions X et Y distinctes, de l'équation du second ordre, la solution générale de l'équation du troisième ordre est une fonction linéaire de $X^2$, $Y^2$, $XY$. Il faut une certaine condition, pour qu'une équation du troisième ordre puisse être considérée, comme provenant par ce procédé, d'une équation du second ordre.

Ces propriétés élémentaires ont été trouvées à peu près par toutes les candidates (à de rares exceptions près, en ce qui concerne la solution générale ci-dessus). Aussi ne s'est-il trouvé aucune copie tout à fait mauvaise, ce qui se traduit par le fait qu'aucune note n'est inférieure à 5 (sur 20).

Toujours en vue de préparer la question principale, on demandait d'étudier une équation particulière, donnée, du troisième ordre, et de montrer qu'elle provenait, par le mécanisme indiqué, d'une équation très simple du second ordre. Diverses propriétés appartiennent à cette dernièe équation du second ordre : notamment, elle est immédiatement intégrable, sans quadratures, dès qu'on en connaît *une* intégrale particulière.

Cette partie de la question a été en général bien réussie. Quelques candidates cependant émettent l'idée — et la développent— que deux solutions de l'équation sont distinctes, quand elles ne sont pas identiques (et non pas quand leur rapport n'est pas constant). C'est là méconnaître singulièrement une propriété classique.

C'est dans le paragraphe III qu'intervenait la véritable question. On demandait — une courbe gauche étant envisagée, $R(s)$ et $T(s)$ étant les rayons de courbure et de torsion en fonction de l'arc $s$ — de montrer que le vecteur $\vec{\omega}=\vec{t}+i\vec{b}$ ($\vec{t}$ et $\vec{b}$ étant les vecteurs-unités sur la demi-tangente et sur la binormale) vérifiait justement l'équation du troisième ordre dont on faisait l'étude dans la seconde partie du problème.

Un très grand nombre de candidates ont abordé cette question, et souvent d'une façon acceptable. Mais on doit dire que trop d'entre elles se sont contentées d'une simple vérification, *à posteriori*, en portant $\vec{\omega}$ dans l'équation du troisième ordre déjà connue (par la grâce de l'énoncé, sinon de quelque bon Dieu spécialement actif). Cela a conduit les maladroites à des calculs lourds et peu élégants, alors que, avec un minimum de frais, on pouvait obtenir en quelques lignes une *démonstration* rapide du résultat. Une douzaine de candidates ont cependant réussi à trouver une telle démonstration, ce qui prouve que la chose n'était pas tellement cachée ! C'est ce qui explique les notes très satisfaisantes obenues par les copies classées en tête de liste.

Une discussion devait ensuite intervenir, pour relier la solution générale de l'équation du second ordre, qui donnait la clef du problème, aux courbes dont la construction était demandée. L'énoncé indiquait clairement comment, de deux solutions distinctes X et Y de la dite équation, on pouvait déduire le vecteur $\vec{\omega}$. Les propriétés élémentaires de ce vecteur, — déduites de la définition même du trièdre de Serret-Frenet — imposent que, l'intégrale X étant connue, la seconde intégrale Y soit justement celle que l'on déduit de X sans quadrature, et qui a été étudiée déjà au paragraphe II.

Les courbes cherchées s'en déduisent sans difficulté, et les paramètres qui restent indéterminés en fin de compte sont au nombre de six, qui correspondent à un déplacement dans l'espace : il était clair *à priori*, que les courbes demandées, définies par R et T en fonction de $s$, ne sont définies qu'à un déplacement près.

Quelques candidates — en fait en trop petit nombre — ont réussi cette question avec plus ou moins de clarté dans la détermination des conditions auxquelles sont assujetties les fonctions X et Y.

On demandait ensuite de constater que l'équation du deuxième ordre, étudiée, restait invariable quand on remplaçait la fonction $V = \frac{1}{R} + \frac{i}{T}$, par $V \times e^{ik}$, où $k$ est une constante. Quelles conséquences géométriques résultent de cette propriété ? La question était facile, et a été examinée par peu de candidates (car il s'agissait déjà de la fin du problème).

Pour la même raison, très peu de copies contiennent des résultats concernant le dernier paragraphe de l'énoncé : on demandait de développer les calculs jusqu'aux résultats effectifs, en supposant que $V = 4e^{i\lambda} \times s$ ($\lambda$ est une constante donnée).

Il est assez curieux que presque toutes les candidates qui ont abordé cette question, se soient contentées de former l'équation du troisième ordre en $\vec{\omega}$, sans former l'équation du second ordre, plus simple, dont elle dépend. D'ailleurs, l'une ou l'autre de ces deux équations s'intégraient aisément en prenant $s^2$ pour variable, ce qui était presque évident à première vue ; l'examen du cas où $\lambda$ est nul imposait presque cette variable, puisqu'on tombait alors sur des courbes planes, dont la courbure était proportionnelle à l'arc. Quoi qu'il en soit, il n'y a guère qu'une candidate qui ait eu la notion claire de ces circonstances. Deux candidates ont observé que l'équation obtenue était du type de Fuchs : cette remarque conduisait aussi, quoique d'une manière moins simple, à la solution, mais les candidates en question n'ont pas profité de leur remarque.

En définitive, le problème n'a pas été trop mal traité. Sur soixante-cinq copies remises, trente-neuf ont obtenu une note supérieure ou égale à 10 (sur 20). Voici d'ailleurs le détail des notes : un 19, un 18, un 17,5, deux 17, deux 16, trois 15, deux 14,5, six 14, quatre 13, trois 12,5, trois 12, un 11,5, cinq 11, trois 10,5, deux 10, cinq 9, deux 8,5, sept 8, quatre 7,5, trois 7, deux 6, trois 5. La moyenne de l'épreuve est voisine de 11 pour l'ensemble des candidates, et de 13 pour le groupe des admissibles.

L'épreuve est donc, somme toute, honorable ; mais on souhaiterait que les candidates fassent un emploi plus nettement judicieux et mieux ordonné de leurs connaissances. On aimerait que la plus grande majorité cherche à mieux dominer les questions proposées. Par exemple — songeant ici spécialement au début du paragraphe III de l'énoncé — il faut comprendre que la vérification d'une propriété est tout autre chose qu'une démonstration cohérente de cette même propriété. Les énoncés des théorèmes ne sont pas fournis bénévolement par quelque bon Dieu secourable, et celui qui invente un théorème a d'abord bien autre chose à faire qu'à le vérifier : au moment d'un concours, il est bien certain qu'on ne demande pas aux candidates d'inventer séance tenante tel résultat, mais ne serait-il pas utile et profitable d'essayer de comprendre les raisons des choses, et de s'expliquer la manière dont le résultat demandé a été acquis ? Autrement dit, il y a avantage à essayer des raisonnements aussi éloignés que possible d'un automatisme souvent stérile.

### Composition de Mécanique rationnelle (Mlle Charpentier)

Dès le début de la partie I, le calcul de la force vive constitue déjà un écueil, et, dans quinze copies, la rotation instantanée de la sphère S se réduit à $\varphi'$. Cependant quarante-sept candidates obtiennent un résultat exact et établissent correctement l'équation de liaison exprimant le contact des deux sphères.

Pour la formation des équations du mouvement, on trouve dans la moitié des compositions (environ) un emploi convenable des équations de Lagrange avec multiplicateurs, mais l'intégrale des forces vives est parfois oubliée : on peut noter ici quatre essais infructueux d'élimination des paramètres $\rho$ ou $u$. L'emploi des théorèmes généraux conduit d'ailleurs aussi à la solution, à condition de ne pas oublier les réactions ; cette méthode n'est utilisée avec succès que huit fois. Quelques candidates, ayant déterminé séparément les forces vives des deux sphères, en déduisent deux systèmes d'équations de Lagrange, sans tenir compte du contact imposé aux deux surfaces ; elles ne paraissent pas s'étonner du nombre d'équations obtenues.

Les questions relatives aux paramètres stationnaires, si négligées lors des précédents concours, sont nettement mieux traitées cette année ; les équations sont correctement formées, pour $\theta$, dans trente-quatre copies, et, pour $\rho - u$, dans vingt-huit. Certaines candidates poussent assez loin l'étude de la compatibilité des conditions.

Dans la partie II, on trouve beaucoup de définitions différentes et inexactes de la vitesse de glissement (différence des vitesses des molécules de $S_1$ et de S qui viennent en contact). Parmi les quarante candidates qui ont abordé ce grouge de questions, une vingtaine obtiennent des équations exactes pour le roulement sans glissement, mais neuf seulement remarquent explicitement que la condition de contact, trouvée dans la partie I, forme avec ces équations un système de quatre relations non indépendantes, et sept en déduisent des équations de Lagrange correctes avec trois, et non quatre, multiplicateurs. Dans quelques compositions, on s'efforce d'utiliser les théorèmes généraux, mais sans grand succès.

La relation $\dfrac{v-1}{v+1} = k \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$ a été obtenue dans trois copies, les meilleures du reste ; une autre offre une relation également valable $u^2 - \rho^2 = \dfrac{C}{\sin\theta}$ ; deux autres présentent une relation différentielle entre $v$ et $\theta$, mais l'intégration n'est pas, ou est mal faite. L'emploi de l'intégrale des forces vives n'est sérieusement justifié que par cinq candidates ; celles qui trouvent l'intégrale première fournie par le théorème du moment cinétique appliqué au système entier, par rapport à l'axe $Oz_1$, ne sont guère plus nombreuses.

Dans cinq compositions, on montre que si le rapport $v$ est stationnaire, l'angle $\theta$, puis les dérivées $\alpha'$, $\varphi'$, $\psi'$, restent aussi constants, mais le cas exceptionnel où $v$ est égal à 1 n'est signalé par personne. Le calcul des réactions est à peine ébauché ; quelques résultats partiels sont obtenus à l'aide des théorèmes généraux, certaines copies mentionnent la proportionnalité des multiplicateurs et des composantes de la réaction au point I.

La partie III est bien négligée, surtout par les meilleures, qui n'ont sans doute pas eu le temps de l'aborder. Une dizaine de candidates écrivent, en citant une hypothèse de Newton plus ou moins exacte, quelques équations de choc sans frottement ; d'autres calculent ce qu'elles appellent la « vitesse de pénétration », sans distinguer la composante normale au plan tangent en I et la vitesse de glissement contenue dans ce plan tangent. Quelques essais pour faire intervenir les conditions particulières données aboutissent rarement à des résultats appréciables. On se préoccupe parfois de la direction de la réaction, mais, tandis que pour certaines la composante tangentielle a une direction arbitraire, pour d'autres la réaction apparaît comme colinéaire à la vitesse de pénétration, alors que, seule, sa composante dans le plan tangent est colinéaire à la vitesse de glissement. Bien peu songent à calculer la vitesse de glissement en fonction de la réaction en I et paraissent avoir une idée de la méthode à employer, bien que les calculs ne soient qu'esquissés.

Soixante-cinq candidates ont pris part à cette épreuve. La meilleure composition, cotée 18,5, se distingue par sa clarté, sa netteté, sa précision ; des deux suivantes, qui ont obtenu 17,5, l'une présente à peu près les mêmes résultats que la première, sauf pour l'étude des paramètres stationnaires, et l'autre, moins bonne au début que les précédentes, conduit mieux le calcul de la réaction ; la quatrième, notée 17, a traité une partie importante de la dernière question. On trouve ensuite : un 16, cinq notes entre 14,5 et 12, dix entre 11,5 et 10, dix-sept entre 9,5 et 8, onze entre 7,5 et 6, onze également entre 5,5 et 4, et enfin six entre 3,5 et 1,5. La moyenne de l'épreuve est 8,4 pour l'ensemble des candidates ; elle est un peu inférieure à 11 pour le groupe des admissibles, et devient voisine de 11,7 pour les vingt et une reçues.

## EPREUVES PRATIQUES

Les deux épreuves de géométrie descriptive et de calcul numérique ont donné cette année des résultats comparables. Pour l'une et l'autre les notes vont de 0 à 16, et malgré les répartitions quelque peu différentes, la moyenne générale est la même, environ 8,5, tandis que la moyenne pour le groupe des vingt et une reçues est voisine de 9,5 pour l'épure et de 9 pour le calcul.

Si l'on considère l'ensemble des deux compositions, l'échelonnement change de façon assez nette, les deux notes obtenues par chaque candidate présentant fréquemment un écart appréciable, car les deux épreuves ne mettent pas en jeu les mêmes qualités. La somme des deux notes varie de 6 à 28 sur 40, avec un groupe de vingt-sept, progressant très régulièrement, par point ou demi-point, entre 12 et 28, les quatre autres étant : 9,5 deux fois, puis 6,5 et 6.

Comme d'habitude, ces deux compositions ont joué un rôle appréciable dans le classement des admissibles, et, par conséquent, dans l'établissement de la liste définitive. Elles étaient l'une et l'autre simples et tout à fait accessibles, pour peu que l'on ait pris soin de réfléchir à certains aspects importants des mathématiques, et de traiter, en cherchant à en bien pénétrer le sens, quelques problèmes dont la solution exige la réalisation effective d'une figure ou l'exécution accomplie d'un calcul, mené jusqu'à son achèvement. Dans ces travaux, la part de « technique » est en fait très réduite ; pour y réussir convenablement, la mise en œuvre raisonnée, ordonnée, méthodique, des connaissances classiques constitue l'essentiel.

Les observations qui suivent montrent qu'il est encore nécessaire de renouveler aux futures candidates le conseil de ne pas négliger la préparation — une préparation intelligemment conduite — de ces épreuves.

## Composition de géométrie descriptive (M. Hocquenghem)

### *Enoncé du problème*

La ligne de terre $y'y$, orientée positivement de gauche à droite, est à 16 centimètres du bord inférieur de la feuille. L'axe $Ox$, de bout et orienté positivement vers l'avant, et l'axe $Oz$, vertical et orienté positivement vers le haut, se projettent suivant le grand axe de la feuille. L'unité de longueur est le centimètre.

On considère les six points :

$$S\,(0, -7, +4) \qquad T\,(0, -4, +5)$$

$$A\,(0, -14, 0) \qquad B\,(0, -6, 0) \qquad C\,(0, -10, 0) \qquad O\,(0, 0, 0),$$

et on définit deux cônes : le premier, ayant pour sommet S, passe par le cercle horizontal admettant pour diamètre le segment AB ; le second, ayant pour sommet T, passe par le cercle horizontal admettant pour diamètre le segment CO.

1° Construire l'intersection des deux cônes (point courant et tangente, asymptotes, droite des points doubles apparents en projection horizontale, points ayant pour cotes 0 et 16).

2° Représenter l'ensemble des portions des deux *surfaces* coniques, supposées infiniment minces et opaques, situées en avant du plan frontal $yOz$ et entre les deux plans horizontaux ayant pour cotes 0 et 16 (le dernier de ces plans n'est pas matérialisé).

3° Dans une notice, écrite à l'encre sur les parties libres de la feuille, établir l'existence d'une quadrique de révolution passant par la courbe d'intersection des deux cônes ; expliquer comment on pourrait déterminer l'axe de révolution et la méridienne de cette quadrique ; définir la nature de cette quadrique. (On ne demande pas la représentation de cette quadrique sur l'épure).

***

Cette épure n'offrait aucune difficulté : les deux cones à bases circulaires horizontales admettaient le plan frontal $x = 0$ comme plan de symétrie commun ; la projection frontale de l'intersection se composait donc d'arcs d'une même hyperbole ; c'est là un résultat élémentaire, ignoré cependant par quelques candidates.

Les asymptotes de la projection horizontale ont été déterminées trop souvent par des constructions longues et imprécises. La détermination de la droite des points doubles apparents de cette projection a été en général correctement faite.

Sauf dans les meilleures épures, la ponctuation est assez fantaisiste. On aurait aimé qu'un tracé léger, au crayon de couleur, de quelques génératrices vues permette de bien distinguer les deux surfaces et les deux nappes de chacune d'elles ; il ne faut pas perdre de vue qu'une épure est destinée à représenter une figure de l'espace et qu'il y a toujours avantage à en rendre la lecture plus facile.

L'exécution est en général médiocre et deux ou trois épures seulement offrent un graphique acceptable.

Enfin, la question finale de géométrie pure n'a pas donné lieu à de brillants développements. Quelques candidates justifient péniblement, par des considérations dans le plan de l'infini, l'existence d'une quadrique de révolution dans le faisceau linéaire défini par les deux cônes ; d'autres « déterminent » l'axe de révolution de cette quadrique hypothétique ; aucune ne songe à utiliser le graphique pour définir la nature de la méridienne.

Les notes s'échelonnent entre 16 et 1, avec treize notes au moins égales à 10, les meilleures étant deux 16 et deux 15 ; puis viennent huit notes entre 9 et 6, sept entre 5 et 3, enfin deux 2 et un 1. La moyenne de l'épreuve est 8,5.

COMPOSITION DE CALCUL NUMÉRIQUE (M. DUGUÉ)

*Enoncé du problème*

On considère la série entière en $z$, convergente dans tout le plan :

$$f(z) = 1 + \frac{z}{1\,!} + \frac{z^2}{4\,!} + \ldots + \frac{z^n}{n^2\,!} + \ldots$$

et les huit nombres :

$$\begin{array}{llll} A = f(1) & B = f(10) & C = f(100) & D = f(1.000) \\ A' = f(-1) & B' = f(-10) & C' = f(-100) & D' = f(-1.000) \end{array}$$

1° Calculer la valeur approchée à $\frac{1}{10^6}$ près par défaut de chacun d'eux c'est-à-dire la partie entière, et les six premières décimales de leur représentation décimale). On justifiera les résultats obtenus.

2° Par quelle valeur décimale approchée suffirait-il de remplacer le nombre $\pi$ pour obtenir la valeur approchée de $f(\pi^2)$ à $\frac{1}{10^6}$ près par défaut ? On ne demande pas de calculer $f(\pi^2)$.

⁂

Dans l'ensemble, la composition de calcul présente une amélioration de forme sur les années précédentes ; les calculs sont mieux présentés et les résultats obtenus sont assez clairement mis en évidence.

Un reproche général peut être retenu : la trop grande longueur. Une candidate a cru nécessaire de remplir six pages pour ne donner aucun des résultats numériques demandés ; a-t-elle été surprise d'apprendre que sa note, pour la composition de *calcul numérique*, a été, à très peu près, celle qu'elle aurait eue en remettant une copie blanche ? Ces six pages n'étaient du reste pas dénuées de sens. Malgré l'abondance de commentaires variés, très souvent manque la justification rigoureuse de la précision. Parfois, on invoque la règle de Tannery, que l'on donne comme un procédé empirique dont on ne précise pas les limites d'application, alors que, dans le cas d'une série aussi rapidement convergente que la série étudiée, il est possible d'aller moins loin, et facile de préciser les approximations.

Certaines impropriétés de langage sont fâcheuses. Une candidate, finalement reçue, écrit : « Les trois premières séries convergent à partir du troisième terme ; la dernière, à partir du quatrième. » Souhaitons qu'il s'agisse d'un lapsus, et que jamais sa classe n'entende de propos semblables.

La deuxième question a été abordée dans peu de copies, et traitée avec succès dans moins encore. Une candidate écrit à ce sujet que l'erreur relative commise dans le calcul d'une somme est la somme des erreurs relatives correspondant aux différents termes ; j'espère, malgré tout, qu'elle serait arrivée à calculer correctement une dérivée logarithmique.

Signalons encore, comme dans les concours antérieurs, que quelques candidates font un usage abusif de la table de logarithmes, reculant par exemple devant le calcul du quotient d'un entier par 16, et sans avoir l'air de se rendre compte des erreurs qui s'introduisent ainsi.

Pour cette épreuve, les notes s'échelonnent entre 0,5 et 16 ; les meilleures notes sont deux 16 et un 14,5 ; on trouve ensuite onze notes entre 13 et 9, sept entre 8 et 7, sept entre 5 et 4, puis quatre s'espaçant régulièrement de 3,5 à 0,5. La moyenne est 8,5.

## EPREUVES ORALES

Les deux leçons de « Mathématiques Elémentaires » et de « Mathématiques Spéciales », que chacune des trente et une admissibles a eu à exposer, avaient été, comme d'habitude, associées par le Jury avant le tirage au sort traditionnel. Les sujets proposés ont été les suivants (les numéros entre parenthèses accompagnant chacune des questions d' « Elémentaires » ou de « Spéciales » correspondent au groupement des deux leçons traitées par une même candidate) :

## Leçons de Mathématiques Elémentaires

(1) Etude de la fonction linéaire ; représentation graphique (Classe de Seconde C et Moderne). — (2) Etude de la fonction $y = \frac{a}{x}$, $a$ étant une constante; représentation graphique (Classe de Seconde C et Moderne). — (3) Positions relatives de deux cercles (Classe de Seconde C et Moderne). — (4) Variations du trinôme du second degré, représentation graphique. La candidate rappellera d'abord les notions concernant le sens de variation d'une fonction dans un intervalle. (Classe de Première C et Moderne). — (5) Etude de la fonction homographique ; représentation graphique. Le cas particulier de la fonction $y = \frac{a}{x}$ sera supposé déjà traité (Classe de Première C et Moderne). — (6) Formules donnant le cosinus, le sinus, la tangente de la somme de deux arcs. Applications (Classe de Première C et Moderne). — (7) En fin d'année, dans une classe de Seconde C ou Moderne, traiter, à titre de révision, quelques exemples de problèmes de lieux géométriques. — (8) Droite et plan perpendiculaires (Classe de Première C et Moderne). — (9) Volume de la pyramide (Classe de Première C et Moderne). — (10) Première leçon sur les fractions (Classe de Mathématiques). — (11) Division des nombres entiers (Classe de Mathématiques). — (12) Définition et extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire à une unité près (Classe de Mathématiques). — (13) Première leçon sur les nombres positifs et négatifs (Classe de Mathématiques). — (14) Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. Interprétation graphique (Classe de Mathématiques). — (15) Etude, sur des exemples, d'une fonction de la forme $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$, $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$ étant des constantes et $a$, $a'$ différents de zéro. Représentation graphique (Classe de Mathématiques). — (16) Etude de l'expression $a \cos x + b \sin x$. Résolution et discussion de l'équation $a \cos x + b \sin x = c$ (Classe de Mathématiques). — (17) Dérivées des fonctions circulaires (Classe de Mathématiques). — (18) Mouvement circulaire uniforme ; projections sur un diamètre de la trajectoire. Mouvement rectiligne défini par une équation de la forme $x = a \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\omega t + \beta)$ (Classe de Mathématiques). — (19) Résolution d'un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. Discussion (Classe de Mathématiques). — (20) Cosmographie : inégalité des jours et des nuits aux diverses latitudes (Classe de Mathématiques). — (21) Cosmographie : Eclipses de lune et de soleil (Classe de Mathématiques). — (22) Inégalités entre les éléments d'un trièdre (Classe de Mathématiques). — (23) Traiter quelques exemples de constructions de cercles assujettis à des conditions simples : passer par des points donnés, être tangents à des cercles ou à des droites données, etc... (Classe de Mathématiques). — (24) Tangente en un point d'une hyperbole ; asymptotes. Intersection d'une droite et d'une hyperbole (Classe de Mathématiques). — (25) Equations de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à leurs axes de symétrie. Applications (Classe de Mathématiques). — (26) Sections planes d'un cône de révolution (Classe de Mathématiques). — (27) Plan polaire d'un point, pôle d'un plan, droites conjuguées par rapport à une sphère. — (28) Conditions pour que quatre points soient sur un cercle (leçon de révision). Applications. — (29) Similitude plane. — (30) Symétrie par rapport à un point, symétrie par rapport à un plan. Produits de ces transformations. — (31) Intersection de deux cônes circonscrits à une même sphère. (Ces cinq dernières leçons correspondent au programme de la classe de Mathématiques Supérieures, géométrie pure).

**Leçons de Mathématiques Spéciales**

(1) Géométrie analytique plane : directions principales et axes de symétrie des courbes du second ordre. — (2) Sections circulaires des surfaces du second ordre. — (3) Emploi de la dérivée pour l'étude des variations d'une fonction. Exemples. — (4) Construction des courbes planes définies en coordonnées polaires. Exemples. (Les résultats généraux sur les tangentes, sur la concavité et sur les branches infinies, sont supposés connus). — (5) Première leçon sur l'enveloppe d'une famille de courbes planes. — (6) Mouvement d'un point sous l'action d'une force centrale inversement proportionnelle au carré de la distance ; différentes formes de trajectoires. L'étude détaillée du mouvement ne sera faite que dans le cas des trajectoires paraboliques. — (7) Première leçon sur les séries numériques. — (8) Fonction inverse d'une fonction continue monotone. — (9) Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples. — (10) Courbure d'une courbe gauche. — (11) Géométrie analytique : plan tangent en un point d'une surface. — (12) Géométrie analytique : étude d'une courbe plane, définie en coordonnées cartésiennes, au voisinage de l'un de ses points ; tangente, concavité, inflexion. Exemples. — (13) Etude de l'enveloppe d'une droite définie par l'équation $x \cos u + y \sin u = f(u)$ ; développée ; courbure. Exemples. — (14) Géométrie analytique plane : foyers et directrices des courbes du second ordre. — (15) Produit vectoriel de deux vecteurs : applications en géométrie analytique. — (16) Génératrices rectilignes des surfaces du second ordre. — (17) Diamètres dans les surfaces du second ordre. — (18) Géométrie analytique : exemples de surfaces définies par un mode de génération géométrique simple. — (19) Géométrie analytique plane : divisions homographiques sur une conique. — (20) Première leçon sur l'intégration de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. — (21) Intégration des équations différentielles du premier ordre dans le cas de la séparation des variables ; exemples d'intégration d'équations différentielles du premier ordre se ramenant au cas de la séparation des variables. — (22) Fonction logarithmique. — (23) Première leçon sur les séries entières. — (24) Fonctions homogènes. — (25) Mécanique : changement du repère ; composition des vitesses ; composition des accélérations lorsque le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation. — (26) Changement de variable dans une intégrale définie et dans une intégrale indéfinie. Applications. — (27) Première leçon sur les nombres complexes (Classe de Mathématiques Supérieures). — (28) Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné, avec ou sans frottement, la vitesse initiale étant dirigée suivant une ligne de plus grande pente du plan. — (29) Division des polynômes à une variable. — (30) Première leçon sur la résolution des systèmes d'équations linéaires. — (31) Travail d'une force ; théorème de la force vive pour un point matériel.

(Toutes ces leçons, à l'exception de la leçon numérotée 27, sur les nombres complexes, devaient être traitées dans une classe de Mathématiques Spéciales).

⁂

Déjà, à plusieurs reprises, les rapports sur le concours ont essayé d'analyser le caractère particulier de la « leçon d'agrégation ». Cependant, la transformation récente du Certificat d'aptitude qui assure désormais, avec l'Agrégation, le recrutement des professeurs de l'Enseignement du Second Degré, a mis en valeur une épreuve de nature vraiment pédagogique, formant une partie importante du nouveau C.A.P.E.S., et donnant lieu du reste à une préparation très soigneusement organisée, avec des stages de longue durée dirigés et contrôlés par des maîtres expérimentés. Que cette institution nouvelle puisse un jour remettre en cause, directement ou indirectement, la structure de l'agrégation, c'est là une question qu'il n'y a pas lieu d'aborder ici ; mais il n'est peut-être pas inutile de rappeler, à ce sujet, que l'ensemble des huit épreuves constituant actuellement le concours permet, sans doute possible, de porter un jugement valable sur les candidats et de déceler s'ils possèdent déjà, ou s'ils paraissent capables d'acquérir et de développer en eux la plupart des qualités essentielles que l'on désire trouver chez un professeur ; évidemment, ne peut guère être révélée, sinon par les rapports de stage, ce que serait leur comportement en présence d'enfants ou d'adultes qu'ils auraient à diriger, encore que l'on puisse presque certainement assurer le succès de celui qui sait intéresser ses élèves et leur apporter des éléments d'enrichissement dans le domaine de la pensée et peut-être de l'action. Et, à cet égard, une leçon d'agrégation, malgré sa forme monologuée, malgré l'impassibilité, d'ailleurs nécessaire, de l'auditoire, ne manque pas de donner d'appréciables indications.

On ne saurait donc trop insister sur certaines recommandations, bien qu'elles aient été souvent formulées : une bonne préparation doit aller au delà d'une révision, même très consciencieuse, des connaissances imposées par les programmes, au delà même d'un effort profond et ordonné accompli pour dominer réellement ces connaissances (non seulement les faits et les résultats, mais aussi les méthodes et les principes) ; elle doit s'attacher encore à la recherche des modes d'expression les mieux appropriés qui permettent de transmettre efficacement à d'autres ce que l'on sait et ce que l'on a compris soi-même. Les réflexions, les retours en arrière qu'exige une telle recherche, loyalement conduite, constituent à coup sûr, pour le futur maître, l'un des bénéfices intellectuels les plus appréciables qu'il retirera de son travail ; ce faisant, d'ailleurs, il ne manquera pas de prendre conscience de l'immense domaine qui s'ouvre à lui, et qu'il n'aura jamais fini d'explorer, même dans le modeste cadre de l'Enseignement du Second Degré, pour peu qu'il ait l'esprit curieux et qu'il sente l'intérêt et la grandeur de la tâche à accomplir.

J'illustrerai volontiers ces remarques, assez banales, en prenant justement l'exemple d'une leçon dont le Jury, cette année, a particulièrement apprécié la valeur et la qualité, et qui a été considérée comme la meilleure du concours. Sur le thème classique (mais, je crois, assez communément redouté) de la racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire à une unité près, la candidate a présenté un exposé, dont le fond n'avait du reste rien de « révolutionnaire », mais qui faisait apparaître avec évidence ce travail de réflexion personnelle d'un esprit qui ne peut se contenter d'un enregistrement plus ou moins docile des explications usuelles, mais qui peut saisir, par lui-même, le pourquoi et le comment, et qui, ayant réussi, ayant dominé le problème, a, de plus, fait l'effort de clarification, de mise au point qui conduit à l'expression limpide et logique de la pensée. Ainsi, la « leçon », qui permet évidemment un contrôle des connaissances, peut être, et devrait être, une épreuve révélatrice de la qualité d'esprit et de la personnalité.

A ces observations sur la valeur de l'oral de l'agrégation, et sur une orientation efficace de sa préparation, je crois utile de joindre un conseil : ces dernières années ont vu se développer un mouvement d'intérêt très vif pour les questions pédagogiques ; de nombreux articles, quelques ouvrages, une documentation abondante, ont été publiés sur ces sujets, et la mathématique est parmi les disciplines qui ont été mêlées d'une façon particulièrement active, parfois passionnée, à ces débats ; il importe que les futurs professeurs ne restent pas étrangers à ces préoccupations de leurs aînés ; il convient donc qu'ils cherchent à s'informer, qu'ils apportent même, ne serait-ce que par quelques questions, leur contribution à des recherches toujours actuelles, car le domaine de l'enseignement, largement ouvert sur la vie, se développe et s'enrichit à un rythme qui n'a guère tendance à se ralentir.

Sans entrer dans le détail des critiques particulières qui ont été faites, comme d'habitude, individuellement, à toutes les admissibles, à la fin du concours, je voudrais d'abord signaler, une fois encore, l'erreur que commettent beaucoup trop de candidates, en négligeant les questions de forme, de présentation. Et il ne s'agit pas ici seulement du concours et des éléments non négligeables d'appréciation que constituent les qualités ou les défauts « extérieurs » d'un exposé ; il convient surtout de penser à l'action que tout professeur exerce, qu'il doit avoir l'ambition d'exercer, sur sa classe : il devrait être, il est effectivement très souvent un modèle pour les jeunes disciples dont il a la charge. Or, l'impression première, qui est presque toujours, à cet égard, décisive, ne résulte-t-elle pas, pour une part, non négligeable, de la perception plus ou moins consciente de menus faits ? Pour rester dans notre domaine, n'est-il pas évident qu'un langage toujours correct, sinon parfait, — des notations claires, bien expliquées, — une adaptation aussi complète que possible des mots et de la phrase à l'idée que l'on veut exprimer, — une disposition soigneusement ordonnée des arguments et des preuves, constituent d'abord le témoignage d'une certaine maîtrise intellectuelle, et contribuent beaucoup à créer le climat favorable qui rendra plus accessible et plus attrayant le premier contact avec les formes abstraites et logiques de pensée, que l'enseignement des Mathématiques a pour mission d'assurer. Il importe donc de contrôler ses habitudes, de faire effort pour se débarrasser de celles que l'on reconnaît fâcheuses ou mauvaises, ou qui ont tendance à le devenir, et parfois aussi de soumettre à une critique raisonnable telle locution familière, telle tournure traditionnelle que l'usage a peu à peu imposée, en déformant ou en masquant, quelquefois, le sens et la valeur de l'idée qu'elle prétend exprimer.

En dehors des « lapsus », bien excusables et d'ailleurs toujours excusés quand ils sont évidents, que de phrases et de termes, douteux ou dangereux, seraient à relever dans les leçons entendues cette année, qui n'est d'ailleurs, à cet égard, nullement exceptionnelle ! J'en cite, au hasard, quelques échantillons : « l'addition et le produit sont toujours possibles... » ; « la différence est possible... » ; « on appelle quotient l'opération inverse du produit... » ; « il est très maladroit d'appliquer $bc - ad$... » (il s'agissait, on s'en doute, d'un conseil judicieux donné à propos de la recherche, en pratique, du sens de variation de la fonction homographique $\frac{ax+b}{cx+d}$) ; « deux cercles sont intérieurs... » ; « les branches infinies de la fonction logarithmique... », sans insister sur le classique « plus grand ou égal à... », ni sur « le nombre complexe d'image le point M » (ce qui doit vouloir dire : le nombre complexe dont l'image est le point M). Il faudrait ajouter à cette liste, bien incomplète, celle des notations fâcheuses ou vicieuses : parmi elles, une bonne place doit être réservée au symbole trop fréquemment rencontré, $f(x\,y\,z)$, qui a la prétention de représenter une fonction des trois variables $x$, $y$, $z$, et qui, privé des virgules séparatrices qui lui donnent sa vraie signification, ne peut que produire de regrettables confusions, et il n'est pas inutile de signaler aussi l'erreur commise en employant le symbole $\frac{dx_0}{dt}$, $x_0$ étant déjà défini comme une constante par rapport à la variable $t$, alors que l'on veut parler de la valeur, à un instant fixé $t_0$, de la dérivée $\frac{dx}{dt}$ de la fonction $x$ de $t$.

Sur le fond, sans qu'il soit question de passer en revue les soixante-deux leçons exposées cette année, quelques sujets de réflexion peuvent être proposées, touchant surtout aux principes et aux méthodes.

Les notions de base de l'arithmétique et de l'algèbre font, presque chaque année, l'objet de « premières leçons », qui paraissent d'ailleurs être préparées avec un soin attentif par beaucoup de candidates, car les exposés entendus sur ces sujets portent souvent la marque d'un sérieux effort de recherche et de mise au point. La mode actuelle, fort explicable, est nettement orientée vers les présentations « abstraites », tendant à une construction purement logique à partir de quelques données fondamentales. Qu'il s'agisse des nombres fractionnaires, des nombres positifs et négatifs, des nombres complexes, certaines difficultés d'exposition, tenant à la nature profonde des questions, sont inévitables et risquent, si elles n'ont pas été clairement élucidées, de provoquer quelque confusion, parfois même une fâcheuse obscurité, dans le développement de la théorie. C'est ainsi que la définition des nombres fractionnaires, au moyen d'un couple ordonné de deux entiers, comme celle des nombres « algébriques » au moyen d'un couple ordonné de deux nombres arithmétiques, posent le problème de l'infinité de réprésentations d'un même élément et celui de la forme réduite, et il ne faut pas oublier les justifications d' « unicité » qui sont alors nécessaires à chacune des étapes nouvelles de l'exposé. Le rattachement des êtres déjà connus (nombres entiers, nombres arithmétiques) à l'ensemble nouveau que l'on est en train de construire (nombres fractionnaires, nombres « algébriques », positifs et négatifs) n'est pas toujours heureusement élucidé, très souvent parce que l'on ne montre pas assez nettement que les domaines antérieurement étudiés subsistent avec leurs caractères propres, et que les domaines nouveaux, plus étendus, ne les absorbent pas au point de les faire disparaître.

La leçon présentée cette année sur les nombres positifs et négatifs manifestait un très louable effort de compréhension, malheureusement gâté par une confusion apparue dès la position du problème, due peut-être à un « lapsus » qui n'aurait pas eu grande importance si la rectification et le redressement avaient été opérés en temps utile, mais dont la persistance a singulièrement obscurci l'exposé, l'alourdissant et le compliquant au point de le rendre peu efficace. Cette observation n'entraîne point la condamnation de recherches originales ou de tentatives de renouvellement loin des chemins trop familiers ou que l'on croit tels ; bien au contraire, ces essais, s'ils restent, bien entendu, dans le cadre des exigences pédagogiques imposées normalement par la nature du concours, ne peuvent qu'être encouragés ; il s'agit seulement de recommander aux candidates de bien mesurer leurs forces et d'éprouver, par une sérieuse réflexion critique, le bon équilibre des notions qu'elles comptent mettre en jeu.

En algèbre, une leçon sur la fonction homographique donne l'occasion d'attirer, une fois encore, l'attention sur deux points.

D'une part, l'introduction de la notion de limite dans les classes d'initiation pose évidemment un problème délicat, mais il paraît dangereux de traduire le fait que les valeurs de la fonction $y = \frac{1}{x}$ peuvent devenir inférieures en valeur absolue à tout nombre positif donné en disant que « $y$ prend la valeur $\varepsilon$, $\varepsilon$ étant aussi petit que l'on veut », èt en faisant jouer à ce symbole $\varepsilon$, dans le « tableau des variations », qui prétend résumer les propriétés générales de la fonction, le rôle d'une valeur numérique acquise. Il semble que l'on ouvre ainsi la porte à bien des idées fausses. Sur cette question encore, il est malencontreux de prolonger la définition d'une limite nulle en ajoutant que la fonction tendant vers zéro, « ne prend jamais la valeur zéro » ; sans doute s'agit-il d'une fonction particulière pour laquelle cette propriété accessoire est effectivement vérifiée, mais la restriction paraît s'appliquer en général, et elle est du même ordre, et aussi fausse, que le complément classique, trop souvent donné à la définition d'une asymptote : « ...sans jamais l'atteindre ».

D'autre part, il importe que l'étude d'une fonction, qui est avant tout un problème d'algèbre (ou d'analyse) ne soit pas constamment subordonnée à des considérations, je ne dis pas géométriques, mais graphiques. Ainsi, la notion primordiale d'existence de la fonction, dans le cas de la fonction homographique générale, risque fort de ne plus apparaître nettement, lorsqu'elle est submergée par des calculs de changement d'axes, qui surtout au niveau de la Première, ne sont guère dominés par les débutants. Et cette prédominance du graphique sur les faits algébriques, qui sont pourtant l'essentiel, n'apparaît-elle pas également lorsqu'on affirme que la fonction $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, dans l'hypothèse $ad - bc = 0$, « se décompose en deux fonctions » ; cette affirmation, qui ne peut manquer de troubler l'esprit des élèves encore novices, à qui la notion de fonction vient à peine d'être présentée, correspond du reste à une double faute, car elle sous-entend, plus ou moins nettement, une fâcheuse interprétation de l'idée d'indétermination et une méconnaissance des conditions d'existence du symbole $\frac{A}{B}$ représentant le quotient exact de A par B, en même temps qu'elle établit une très regrettable confusion entre deux problèmes : celui de l'étude de la fonction $y$ de $x$ donnée sous la forme de $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, et celui de l'étude de la relation $y(cx + d) = ax + b$ entre les variables $x$ et $y$.

J'ajouterai encore, à ce propos, que l'introduction de plus en plus fréquente, dans les cours d'algèbre élémentaire, même au niveau de la classe de Troisième, d'applications de la « représentation graphique » des fonctions usuelles qui mettent en jeu, sans nul doute, des notions de géométrie analytique, ne peut être valable et efficace que si les problèmes sont posés sous leur vrai jour, et si leur solution comporte les démarches logiques d'un raisonnement complet, en tous points semblable à ceux que l'on exige avec raison dans la solution d'une question de géométrie élémentaire. Si l'on considère, par exemple, un rectangle variable dont deux côtés sont portés par les axes de coordonnées O$x$, O$y$, et dont la diagonale qui ne passe pas par O, tourne autour d'un point donné A, la détermination du lieu géométrique du sommet opposé à O n'est évidemment pas correctement traitée lorsqu'on se borne à former la relation qui existe entre les coordonnées de tout point vérifiant les conditions imposées ; la distinction entre conditions nécessaires et conditions suffisantes, une réflexion sur l'obligation d'établir une réciproque, peut-être la recherche d'une autre forme plus simple de mise en équation, au sens complet du terme, constitueraient naturellement les éléments d'un excellent exercice, qui mettrait en évidence, en particulier, qu'il n'y a pas deux façons de raisonner, l'une propre à la géométrie, l'autre réservée à l'algèbre.

Ne peut-on pas aussi montrer cette unité élémentaire des Mathématiques lorsqu'on expose, dans les classes de début, les premières notions sur les équations et sur les systèmes d'équations ? Pourquoi, par exemple, ne pas expliquer clairement, lorsque la résolution d'un tel problème a été abordée, pour une raison quelconque, en sous-entendant ou en admettant l'existence d'une solution, que « la vérification » proposée ensuite ne constitue ni une concession faite à je ne sais quelle tradition plus ou moins justifiée, ni une preuve dans une certaine mesure rassurante quant à l'exactitude des calculs, mais qu'elle est en réalité une partie indispensable du raisonnement, puisqu'elle forme la réciproque de propriétés qui ne sont acquises que comme conséquences de l'hypothèse faite au départ ? Et le même déroulement logique de pensée se manifestera aussi facilement, si l'on convient de faire intervenir, dans cette théorie, quelques résultats généraux sur l'équivalence des problèmes de résolution de deux équations ou de deux systèmes.

Avant de quitter le domaine de l'algèbre, je tiens à dire encore combien il importe de ne pas oublier de rappeler les conditions d'existence des êtres que l'on est amené à faire intervenir, et cela, dès le moment où on les introduit. De nouveau, cette année, s'est produit l'accident classique que provoque la méconnaissance de cette règle de bon sens lorsqu'on applique sans précaution le changement d'inconnue $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ à la résolution de l'équation $a\cos x + b\sin x = c$. De même, n'est-il pas prudent, lorsqu'on étudie les formules d'addition des arcs, de préciser les conditions de validité de celles des relations trouvées qui contiennent des tangentes ou des cotangentes ?

En géométrie élémentaire, le hasard du tirage au sort a fait sortir de l'oubli une leçon, qui n'avait pas été exposée depuis plusieurs années, sur les positions relatives de deux cercles, dans la classe de Seconde. La candidate a eu la très louable idée de tenter une étude systématique des régions déterminées dans un plan par deux cercles donnés, et a courageusement abordé une longue discussion qu'elle s'est efforcée de rendre complète ; mais un brusque changement opéré, sans justification, dans le procédé de « balayage » choisi pour caractériser méthodiquement les différentes régions, remplaçant les droites perpendiculaires à la ligne des centres, utilisées d'abord, par des droites pivotant autour du centre de l'un des cercles, a semblé quelque peu déroutant. D'autre part, cette étude doit faire apparaître une correspondance entre des faits géométriques et des faits que l'on peut qualifier d'algébriques, à savoir les relations d'inégalité ou d'égalité entre les mesures des longueurs caractérisant la figure, et il importe que l'on sache nettement quel est le point de vue adopté : partira-t-on d'hypothèses d'ordre géométrique pour en déduire des conséquences algébriques, les réciproques étant étudiées ensuite ? Suivra-t-on la marche inverse ? Le choix doit apparaître clairement ; quel qu'il soit, on sera forcément amené, à un moment du raisonnement, à faire intervenir une raison de « continuité », qui n'est pas toujours explicitement énoncée, et qui revient à admettre que s'il existe sur un cercle un point intérieur et un point extérieur à un autre cercle, les deux courbes admettent au moins un point commun. Il est classique, dans ce problème, d'employer un raisonnement par exclusion pour établir les réciproques du groupe de propriétés obtenues d'abord ; bien entendu, il convient d'en justifier l'exactitude en montrant que la série des hypothèses envisagées et la série des conclusions obtenues dans la première partie de l'étude épuisent, l'une et l'autre, toutes les circonstances possibles. Enfin, l'équivalence de la double inégalité caractérisant deux cercles sécants et de la double inégalité caractérisant les longueurs des trois côtés d'un triangle est importante à signaler, car il s'agit, en fait, du même problème, et cette remarque, une fois comprise, permet une plus grande souplesse dans l'emploi de ces relations, l'encadrement de l'une des longueurs entre la somme et la *valeur absolue* de la différence des deux autres ne faisant plus jouer à la distance des centres le rôle privilégié qu'elle paraît avoir au départ. Je viens de souligner « valeur absolue » ; est-il nécessaire d'insister sur l'importance de ce terme, et sur les erreurs fâcheuses que son omission risque d'entraîner ?

Egalement dans la classe de Seconde, une leçon de révision sur les lieux géométriques a révélé un effort appréciable pour faire pénétrer le sens des modes de recherche et de raisonnement. S'il s'agit, par exemple, d'étudier les points dont la somme des carrés des distances à quatre points donnés a une valeur donnée, il est intéressant de montrer comment la solution peut être obtenue par des transformations successives du problème initial en problèmes équivalents, après avoir bien établi qu'il existe une identité exprimant la somme des carrés des distances d'un point arbitraire M du plan aux quatre points donnés en fonction de la distance de M à un certain point fixe, facile à définir ; mais la succession des idées doit être très attentivement contrôlée, car il arrive souvent qu'une déviation se produit, et que se glisse, sans qu'on y prenne garde, au milieu de l'enchaînement, jusque-là impeccable, de conditions strictement nécessaires et suffisantes, une hypothèse plus ou moins clandestine qui réduit de moitié la portée des conclusions. D'ailleurs, il n'est pas inutile, ne serait-ce que pour faire comprendre aux débutants ce qu'est normalement un travail de recherche, de dire qu'il s'agit là plus fréquemment d'un mode d'exposition d'une solution déjà trouvée que d'une méthode de découverte.

Les problèmes de lieux géométriques, comme les problèmes de constructions donnent souvent l'occasion de faire comprendre comment une exploitation méthodique des données, jointe à une analyse suffisamment poussée des propriétés mises en évidence par l'analyse des conditions nécessaires, permet la plupart du temps de simplifier, et de rendre plus accessible l'étude de la « réciproque ».

Est-il nécessaire de rappeler combien il faut faire attention à l'élaboration des raisonnements qui font intervenir certains éléments d'une figure que l'on croit générale, alors qu'elle est particulière ? Ainsi, la projection orthogonale du sommet d'un trièdre sur un plan coupant les arêtes en trois points situés à la même distance du sommet peut se trouver aussi bien à l'extérieur qu'à l'intérieur du triangle formé par ces trois points, et la démonstration des inégalités entre les faces d'un trièdre ne peut être complète si elle s'appuie sur la considération de cette figure, mais en examinant seulement l'un des deux cas généraux, sans même indiquer qu'il y a d'autres possibilités. Une observation analogue s'applique à l'étude de l'intersection de deux cônes circonscrits à une même sphère, lorsqu'on fait reposer le raisonnement sur des relations qui ne sont exactes que pour telle ou telle disposition particulière des données, et, bien évidemment, dans ce problème, la multiplicité des cas possibles rend fort douteuse la validité d'une solution bâtie sur des remarques fragmentaires, qu'il faudrait au moins tenter d'étayer par quelque appel aux propriétés générales de certaines transformations.

Pour les leçons de Mathématiques Spéciales, auxquelles s'appliquent bien entendu plusieurs des remarques précédentes, je retiendrai quelques observations.

Lorsqu'on expose l'emploi de la dérivée pour étudier les variations d'une fonction, il est tout indiqué de faire apparaître, à partir des exemples traités, que, d'une part, le sens de variation de certaines fonctions, dans certains intervalles, peut parfois être trouvé sans recourir à la dérivée, et que, d'autre part, c'est le signe de la dérivée qu'il importe de connaître d'abord, ce qui entraîne fréquemment de notables simplifications dans la conduite des calculs. Et si l'on rencontre, au cours d'un exemple, la fonction $\frac{1}{1+x^2}$, il est bien superflu d'en prendre la dérivée lorsqu'on a seulement besoin de savoir si elle est croissante ou décroissante.

La présentation de la fonction inverse d'une fonction monotone continue a souvent donné lieu à des critiques ; il faut ici faire grande attention dans le choix des symboles et des notations, choix qui a une importance particulière, car l'une des difficultés de l'exposé est de bien mettre en évidence, à chaque instant, le rôle précis de chacune des deux variables liées.

Dans une leçon sur le changement de variable dans les intégrales indéfinies et définies, la partie théorique contenait de bonnes indications, notamment sur l'interprétation du symbole $dx$ figurant sous le « signe somme » ; c'est là un point important, trop souvent omis ou négligé. Il est naturellement indispensable d'attirer l'attention sur les conditions d'existence et de continuité des fonctions que l'on met en jeu, et sur les précautions à prendre pour le calcul des limites dans le cas d'une intégrale définie. Et l'on aimerait que les exemples choisis soient traités avec la maîtrise qui permettrait de les proposer comme modèles...

L'intégration des équations différentielles du premier ordre dans le cas de la séparation des variables est un sujet simple, en apparence. Cependant, il est rare que soit clairement expliqué pourquoi la résolution se ramène à deux quadratures. La plupart du temps, les démonstrations, quand elles sont amorcées, tournent assez rapidement à l'escamotage. Sans doute le point délicat est-il de bien poser, au départ, le problème et de faire saisir la signification exacte des notations. Quant aux premières applications qui peuvent être choisies pour illustrer cette théorie, beaucoup peuvent se rattacher immédiatement à des faits géométriques simples, qu'il est bon de signaler, en faisant ressortir l'appui mutuel que se prêtent alors les considérations géométriques et les considérations algébriques (familles de courbes planes déduites de l'une d'elles par les translations parallèles à une direction donnée, ou par les homothéties ayant un centre donné...).

La démonstration de l'unicité de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples, a donné lieu à une faute qui n'est pas rare : ayant montré par la méthode classique des divisions successives que l'on peut obtenir une certaine décomposition, on affirme que celle-ci est unique puisqu'elle a été obtenue par une suite d'opérations ne comportant chacune qu'un résultat unique. Cette raison pourrait jouer valablement si quelque précaution était prise, dès le début, pour bien poser le problème, en prenant soin de distinguer entre « nécessaire » et « suffisant » ; une fois de plus, c'est cette méconnaissance ou cette confusion qui crée l'erreur ou le doute.

En géométrie analytique, l'étude d'une courbe plane au voisinage d'un point a été présentée très correctement, mais en utilisant à peu près uniquement une définition paramétrique générale et le développement de Taylor ; il ne serait pas mauvais, pourtant, que le cas d'une courbe définie par une équation résolue, telle que $y = f(x)$, soit mentionné, ne serait-ce que pour faire observer que le sens de variation de la dérivée première donne des renseignements intéressants sur la forme de la courbe, sans qu'il soit toujours indispensable de recourir à la dérivée seconde.

La construction d'une courbe en coordonnées polaires est en général très mal exposée ; c'est sans doute une question délicate, mais elle n'exige, au fond, pour être correctement présentée, qu'un peu d'ordre et de méthode, une fois bien comprises les particularités que présente la correspondance entre les points d'un plan et les couples de nombres formés par leurs coordonnées polaires, angles polaires et rayons vecteurs. Souvent d'ailleurs les défauts de la théorie sont aggravés par les maladresses ou les erreurs qui ne sont pas rares dans l'étude des exemples pourtant choisis par la candidate elle-même. Et n'est-il pas fâcheux de voir étudier le sens de variation de sin $\frac{\theta}{3}$ au moyen de la dérivée, ou bien de voir intervenir la formule classique qui donne tg V pour déterminer une tangente au pôle.

Dans un exposé sur l'enveloppe d'une famille de courbes planes, il est certain que la première préoccupation doit être de donner une définition précise et complète de l'enveloppe, afin de faire apparaître dès le début les étapes que l'on aura à parcourir dans l'étude, qu'elle soit géométrique ou analytique. La leçon entendue cette année, un peu déficiente sur ce point, montrait, dans l'ensemble, une compréhension correcte du problème. Un détail mérite peut-être d'être signalé : les résultats généraux concernant cette théorie sont évidemment valables en axes obliques, et il n'est pas indiqué de faire intervenir, ou d'avoir l'air de faire intervenir, au cours de la solution, une condition d'orthogonalité de deux directions qui peut sans complication être remplacée par une condition de parallélisme.

Une leçon sur le plan tangent en un point d'une surface était pleine d'intentions louables, utilisant assez correctement la notion de fonction différentiable et s'efforçant de relier ce mode de présentation à celui qui fait appel à la dérivation des fonctions composées. Cependant, d'assez grosses maladresses dans les raisonnements et les calculs, une certaine confusion aussi dans l'expression, n'ont pas permis de classer cet exposé parmi les tout premiers. Les théories mises en cause ici sont assez délicates, et il est indispensable que les résultats en soient rappelés avec précision, et que l'on montre clairement la liaison entre les faits géométriques et leur représentation analytique.

Dans l'étude de la courbure d'une courbe dans l'espace, un certain flottement dans les définitions et dans le choix des notations, n'a pas permis de comprendre s'il s'agissait, ou non, d'un élément orienté. Et il paraît utile de lier à cette théorie la recherche de la position du centre de courbure par rapport aux plans tangents, ainsi que la notion de cercle de courbure.

Il a déjà été question, à différentes reprises, des directions principales dans les courbes et les surfaces du second ordre, mais l'expérience montre qu'il n'est pas inutile de revenir sur ce point : pour que la notion apparaisse dans toute sa généralité, il convient de présenter une direction principale comme une direction conjuguée de la direction qui lui est perpendiculaire (dans le plan) ou de toutes les directions qui lui sont perpendiculaires (dans l'espace) ; si l'on inverse les deux termes : conjugué et perpendiculaire, on aboutit à une complication évidente, puisqu'une direction peut être conjuguée de toutes les directions du plan, ou de l'espace ; il sera alors nécessaire de couper en deux la définition, au détriment de la clarté. A plus forte raison n'est-il pas indiqué de parler de direction perpendiculaire à son diamètre conjugué ou à son plan diamétral conjugué... D'ailleurs la recherche analytique des directions principales, lorsqu'elle est conduite avec soin, fait bien apparaître la différence des rôles que jouent les deux idées d'orthogonalité et de conjugaison.

La théorie des diamètres des surfaces du second ordre est en elle-même suffisamment longue pour qu'il soit inutile de la faire précéder par une étude à peu près complète des centres et des plans diamétraux ; s'il s'agit, ce qui est très louable, d'établir l'analogie des méthodes et des calculs, il suffit évidemment de la signaler avec netteté ; quant aux résultats sur les centres et les plans diamétraux, rien n'est plus simple que de les rappeler au moment voulu.

Dans une étude des foyers des coniques, il est bon de ne pas omettre l'une des propriétés caractéristiques les plus importantes au point de vue analytique : celle qui concerne l'expression de la distance d'un point quelconque de la courbe à un foyer, en fonction des coordonnées cartésiennes du point considéré.

En mécanique, à propos du changement du repère et de la composition des vitesses, un mode de présentation assez souvent utilisé paraît toujours assez inquiétant : ayant écrit d'abord, avec des notations qui n'ont pas besoin d'être expliquées, la relation vectorielle

$$(1) \qquad \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM},$$

on la transforme immédiatement, et sans donner d'explication, en faisant apparaître les vecteurs-unités $i$, $j$, $k$, du trièdre mobile, pour obtenir la relation

$$(2) \qquad \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k},$$

et c'est cette seconde relation qui, toujours sans commentaires, est soumise à la dérivation par rapport au temps, alors que l'auditeur novice, s'il n'a pas encore bien saisi la signification de la dérivation vectorielle et le rôle que joue le système de référence, pourrait penser que la dérivation aurait pu être effectuée aussi bien à partir de la relation (1). D'autre part, la notion de trajectoire d'entraînement, qui cherche à s'insérer entre la notion de mouvement d'entraînement, qui est le mouvement d'un solide, et celle de vitesse d'entraînement, qui est la vitesse d'un point, n'est-elle pas un peu dangereuse (je ne parle pas de son utilité, qui paraît douteuse) ?

Enfin, une leçon sur le travail a paru dès le début conçue d'une façon fâcheuse, par l'absence à peu près totale d'une définition claire, et par la mise en jeu, malheureusement assez classique, de certains tours de « passe-passe », où l'on voit apparaître des différentielles qui représentent d'abord de « petits » déplacements, de « petits » intervalles de temps, et qui prennent ensuite une signification algébrique normale, tantôt brusquement, sans précaution, tantôt après un hasardeux passage à la limite au cours duquel tendent vers zéro des « quantités » qui ressuscitent peu après pour tenir une place non négligeable dans la suite des opérations.

***

L'appréciation chiffrée des épreuves orales donne une indication intéressante sur la physionomie du concours, et fournit quelques éléments de comparaison avec les années antérieures.

En Mathématiques Elémentaires, un excellent exposé d'arithmétique, dont il a été déjà question, se détache nettement de l'ensemble et a mérité la note 19. On trouve ensuite quelques leçons très honorables (deux 16, un 15, un 14), puis un lot important de notes échelonnées entre 13 et 10 (13, six fois ; 12,5 ou 12, sept fois ; 11,5 ou 11, six fois ; 10, deux fois), et, pour terminer, deux 9 et trois 8. La moyenne pour l'ensemble des leçons est 12 ; elle est assez nettement supérieure à celle de 1951 (11,25), et ce résultat est manifestement dû au groupe de tête, puisque, l'an dernier, la note la plus élevée était 15. Il semble ainsi que l'on puisse parler d'un progrès pour cette épreuve, dont il est inutile de rappeler l'importance ; puisse cette constatation encourager les futures candidates et faire que leur attention se porte tout particulièrement sur les difficiles problèmes que pose l'enseignement des éléments, aussi bien en algèbre qu'en géométrie.

En Mathématiques Spéciales, les deux meilleures notes, un 18,5 et un 18, ont été méritées par deux exposés, l'un d'algèbre, sur la division des polynômes, l'autre de mécanique, sur le mouvement d'un point pesant sur un plan incliné. Viennent ensuite un 16, un 15 et deux 14, puis dix-sept notes échelonnées de 13,5 à 10 (13,5 ou 13, trois fois ; 12,5 ou 12, cinq fois ; 11, quatre fois ; 10, cinq fois), cinq notes comprises entre 9 et 7 (9, trois fois ; 8 ou 7, deux fois), et, enfin, deux 5 et un 4. La moyenne générale est voisine de 11,2, un peu supérieure à celle de 1951 (11 environ). Là encore, un léger progrès est à signaler par rapport aux années précédentes, et particulièrement par rapport à 1950 (moyenne 10,6).

La moyenne générale des leçons, pour l'ensemble des trente et une admissibles, est donc voisine de 11,6.

## RESULTATS GENERAUX

La somme de toutes les notes obtenues aux épreuves écrites, pratiques et orales par chacune des trente et une admissibles, varie de 259,5 à 149,5, pour un maximum de 400 ; c'est-à-dire que la moyenne générale de chacune de ces candidates est comprise entre 13 et 7,5 sur 20, tandis que la moyenne générale pour l'ensemble des admissibles est 10,7 sur 20.

Le classement des épreuves écrites a été notablement modifié par les épreuves pratiques et par les épreuves orales. Ces dernières ont été en particulier défavorables à la candidate qui était de loin la première à l'écrit, avec une moyenne de 15 sur 20, mais qui a pu cependant obtenir la seconde place au classement final. Si les trois premières places de la liste définitive ont été gardées, dans l'ensemble, par les trois premières classées de la liste d'admissibilité, les trois suivantes ont été prises, par contre, par des candidates qui figuraient dans la deuxième moitié du classement des épreuves écrites, grâce aux leçons, l'une d'Elémentaires, les deux autres de Spéciales, dont il a été fait mention précédemment.

Le Jury a proposé, pour l'admission définitive, les vingt et une candidates classées en tête, avec deux *ex-æquo* en fin de liste. Les notes d'ensemble des vingt et une nouvelles agrégées sont échelonnées de 13 à 10,2 sur 20, la moyenne générale étant 11,6 (cette moyenne étant 8,8 pour les dix admissibles non reçues). Il est intéressant d'indiquer les moyennes générales correspondant aux trois groupes d'épreuves écrites, pratiques et orales : elles sont respectivement 10,8, 9,3, 12,7 pour les vingt et une reçues, et 8,7, 7, 9,2 pour les dix admissibles non reçues.

La promotion des agrégées de 1952 comprend six élèves de l'Ecole Normale Supérieure et deux anciennes élèves ayant accompli une quatrième année à l'Ecole ; une élève de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses ; deux étudiantes venant respectivement des Facultés de Paris et de Grenoble ; deux stagiaires d'enseignement, l'une en service à Lyon, l'autre auditrice à l'Ecole Normale Supérieure ; sept professeurs titulaires en exercice et un professeur titulaire en congé. Huit d'entre elles avaient été admissibles à des concours antérieurs.

Parmi les dix admissibles non reçues, l'une, élève à l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses, était déjà titulaire du Certificat d'aptitude à l'enseignement dans les Collèges (C.A.E.C.), et quatre étaient professeurs titulaires en exercice : trois d'entre elles, admissibles à des sessions précédentes, gagnaient ainsi le titre de bi-admissibles à l'agrégation, la quatrième, déjà bi-admissible, obtenait une troisième admissibilité. Pour les autres, la nouvelle réglementation des concours de recrutement permettait cette année de proposer les candidates admissibles non reçues, soit pour le bénéfice de l'équivalence du Certificat d'aptitude à l'enseignement dans les Collèges (C.A.E.C.), dont la dernière session avait lieu précisément en 1952, soit pour la dispense de la totalité ou d'une partie des épreuves de la première partie du nouveau Certificat d'aptitude au professorat de l'Enseignement du Second Degré (C.A.P.E.S., deuxième formule) institué en 1952. Enfin, la dispense des épreuves théoriques, écrites et orales, formant la deuxième partie du Certificat d'aptitude au professorat de l'Enseignement du Second Degré (C.A.P.E.S., première formule), instituée en 1950, était automatiquement accordée aux stagiaires d'enseignement, candidates à ce certificat, lorsqu'elles devenaient admissibles à l'agrégation, pourvu qu'elles aient été préalablement reçues à l'épreuve pratique constituant la première partie de ce C.A.P.E.S.

C'est le bénéfice de cette dernière disposition qui a été appliqué à l'une des admissibles, stagiaire d'enseignement à Marseille, devenue ainsi titulaire du C.A.P.E.S.

Le Jury a accordé l'équivalence du Certificat d'aptitude à l'enseignement dans les Collèges (C.A.E.C.) aux quatre autres candidates admissibles non reçues : une ancienne élève de l'Ecole Normale Supérieure ayant accompli une quatrième année à l'Ecole ; deux étudiantes, l'une de la Faculté de Strasbourg, l'autre de la Faculté de Nancy, et une déléguée ministérielle en exercice.

***

Le nombre des chaires vacantes dans les établissements du Second Degré de la Métropole et de l'Union française permettait cette année, compte tenu des candidates qui étaient régulièrement autorisées à ne pas prendre de poste en cas de succès, un certain allongement des listes d'admissibilité et d'admission. Grâce au niveau satisfaisant des épreuves, le Jury a pu ainsi déclarer admissibles trente et une candidates au lieu de vingt-six en 1951, et en proposer vingt et une pour le titre d'agrégée, soit six de plus que l'année précédente.

Les indications statistiques données dans ce rapport montrent que cet accroissement n'a pas été fait au détriment de la qualité, puisque les notes moyennes ont été, dans l'ensemble, très comparables à celles des concours antérieurs, certaines de ces moyennes présentant même parfois une curieuse identité (par exemple, les moyennes générales concernant toutes les épreuves, d'une part pour le groupe des candidates reçues, d'autre part pour le groupe des candidates admissibles non reçues).

Je pense qu'il convient de signaler avec satisfaction la proportion importante de professeurs titulaires qui, cette année encore, ont obtenu au concours, soit le succès définitif, soit un demi-succès qui est bien loin d'être négligeable, même au point de vue strictement « matériel », puisque la bi-admissibilité, déjà acquise par plusieurs, en voie d'acquisition par d'autres, confère maintenant un avantage de carrière certain. Mais là n'est pas l'essentiel, et ce qu'il faut louer, ce qu'il convient d'encourager pour l'avenir, c'est la volonté de perfectionnement et d'enrichissement dont font preuve ces candidates en préparant, dans des conditions parfois très pénibles — beaucoup ayant la charge d'un lourd service d'enseignement qu'elles accomplissent l'année durant avec toute leur conscience —, les épreuves d'un concours difficile dont certaines sont bien éloignées de leurs préoccupations professionnelles quotidiennes.

Est-il nécessaire de dire que ces remarques ne cherchent point du tout à diminuer ou à faire sous-estimer la valeur et le mérite des autres candidates, normaliennes et étudiantes ? Les résultats de chaque année montrent bien la qualité et l'efficacité du travail qu'elles accomplissent, sous la direction de leurs maîtres, pour aborder le concours dans de bonnes conditions, et les bénéfices certains qu'elles en retirent pour leur formation scientifique et professionnelle.

Et je pense donner à ce rapport la meilleure des conclusions en souhaitant que l'agrégation continue, dans l'avenir, à révéler, à côté de quelques talents exceptionnels, ce fonds solide de qualités intellectuelles et morales qui est l'une des valeurs essentielles de notre corps universitaire.

*L'Inspecteur général, vice-président du Jury,*
J. DESFORGE.

## Rapport sur la composition de Mathématiques (classe de Mathématiques) au Concours général des Lycées, Collèges et Ecoles normales en 1952

Le Jury était composé de MM. Robert, Inspecteur général, Président ; Chazal, professeur au Lycee Saint-Louis (classe préparatoire à l'Ecole Normale Supérieure) : Mme Dubois-Violette, professeur au Lycée de Sèvres ; MM. Magnier, professeur au Lycée Saint-Louis (Navale) ; Ramis, professeur au Lycée Jean-Baptiste-Say (Ingénieurs de la Marine) ; Riche, professeur au Lycée Saint-Louis (classe préparatoire à l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud).

### ANALYSE DU SUJET (1)

Deux cercles (C) et (C') d'un même plan (P) ont le même centre O et des rayons R, R', tels que $R > R'$. Deux demi-droites opposées d'origine commune O coupent ces cercles (C) et (C') en A et B : une demi-droite d'origine O distincte des précédentes coupe (C) en E et (C') en F.

Les cercles (S) et (T) décrits respectivement sur AB et EF comme diamètres, sont ainsi tangents à (C) et (C'), mais appartiennent aux deux familles différentes des cercles tangents à (C) et (C').

*La partie I du problème était l'étude des points d'intersection des cercles* (S) *et* (T). *Paragraphe 1°*. — Les triangles BOF, AOE sont isocèles : $OB = OF = R'$. $OA = OE = R$. Donc BF est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $\widehat{BOF}$, et AE est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $\widehat{AOE}$. Ces bissectrices d'angles adjacents supplémentaires sont perpendiculaires. Les droites BF et AE le sont donc aussi ; leur point de rencontre M est tel que, de ce point, les segments AB et EF sont vus sous des angles droits ; M *est donc commun aux cercles* (S) *et* (T).

Les centres respectifs S et T de ces cercles sont les milieux de AB et EF ; notons que $OS = \dfrac{R - R'}{2}$, $OT = \dfrac{R + R'}{2}$ et que les rayons pour (S) et (T) respectivement sont $\dfrac{R + R'}{2}$ et $\dfrac{R - R'}{2}$.

Les cercles (T) et (C) tangents en E sont homothétiques par rapport à ce point : les points M et A, alignés avec E, sur ces cercles, sont homothétiques et les rayons $\overrightarrow{TM}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont parallèles (de même sens). De même, les cercles (S) et (C') tangents en B sont homothétiques par rapport au point B, les points M et F, alignés avec B sont homothétiques et les rayons $\overrightarrow{SM}$ et $\overrightarrow{OF}$ sont parallèles (de même sens). *Le quadrilatère* OSMT, dont les côtés opposés sont parallèles, *est un parallélogramme.* D'ailleurs, on a déjà reconnu que les côtés opposés y sont égaux, ce qui n'eût pas suffi pour obtenir cette conclusion.

Le second point de rencontre N des cercles (S) et (T) est symétrique du premier M par rapport à la droite des centres ST de ces cercles, ou encore homothétique par rapport à M, dans le rapport $+2$, de la projection de M sur ST ; c'est encore la projection de M sur la droite homothétique de ST dans cette homothétie.

Le centre $\lambda$ de symétrie du parallélogramme OSMT a pour homothétique le point O, car $\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{M\lambda}$. N est la projection de M sur la parallèle à ST menée par O, donc *l'angle* $\widehat{ONM}$ *est droit.*

Il n'est pas sans intérêt d'observer que les points M' et M", diamétralement

(1) Voir le texte *Bulletin* n° 149, pages 292 et 293.

opposés à M, dans les cercles respectifs (T) et (S), sont situés sur la droite ON, puisque $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MT}$, $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{MS}$.

Elevons en M la perpendiculaire à MN, droite parallèle à NO ; elle se déduit de NO par la translation de vecteur $\overrightarrow{M'M}$, lequel vecteur est double de $\overrightarrow{OS}$ ; donc cette perpendiculaire coupe la droite AB en un point O′ tel que $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OS}$, c'est le symétrique de O par rapport à S, et il est tel que *l'angle* $\widehat{O'MN}$ *est droit.*

Le faisceau de *quatre droites* (OM, ON ; OS, OT) est *harmonique,* car OT coupe en son milieu T le segment MM′ parallèle à OS, dont les extrémités M et M′ sont sur les rayons OM, ON. On le verrait aussi en remarquant que OM coupe en son milieu $\lambda$ le segment ST parallèle à ON.

*Paragraphe 2°.* — Observons d'abord que M et N sont distincts, sauf si les droites de même direction O′M, ST, ON, viennent à coïncider, ce qui ne se produit que sur la droite AB. M devrait pour cela coïncider avec A ou B et la demi-droite OFE devrait coïncider avec l'une des demi-droites OA et OB ; ce cas a été exclu par l'énoncé.

On peut considérer, dans (P) la similitude directe transformant E en F et A en B. Elle existe et est bien déterminée, car E est distinct de A et F distinct de B. Elle transforme le vecteur $\overrightarrow{EA}$ en le vecteur $\overrightarrow{FB}$ (vecteurs non nuls). L'angle de cette similitude $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{FB})$ est, en valeur absolue de $\frac{\pi}{2}$. Le centre de cette similitude est le sommet d'un angle droit dont les côtés contiennent chacun un des points homologues E, F ; ce centre est donc situé sur le cercle (T) ; en considérant de même les points homologues A, B, on voit qu'il est aussi situé sur le cercle (S). Ce centre ne peut être que l'un des points M et N. Ce ne peut être M, point commun aux droites homologues EA et FB, que l'on voit être intérieur au segment EA et extérieur au segment homologue FB [M est, comme (T), intérieur à (C) et extérieur à (C′)]. *Le centre de la similitude directe considérée est donc* N.

Les angles $(\overrightarrow{NE}, \overrightarrow{NA})$ et $(\overrightarrow{NF}, \overrightarrow{NB})$ sont homologues, donc ont même mesure à $2k\pi$ près : $(\overrightarrow{NE}, \overrightarrow{NA}) = (\overrightarrow{NF}, \overrightarrow{NB})$ mod. $2\pi$ (1). D'autre part, le rapport des segments NA et NE est égal au rapport des segments homologues NB et NF :

$$\frac{NA}{NE} = \frac{NB}{NF} \quad (2).$$

De ces deux relations, l'une (1) angulaire, l'autre (2) métrique, résulte que N est aussi le centre d'une nouvelle similitude directe transformant E en A, et F en B, donc transformant le vecteur $\overrightarrow{EF}$ en le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

L'angle de cette nouvelle similitude est $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB})$ à $2k\pi$ près, donc

$$(\overrightarrow{NE}, \overrightarrow{NA}) = (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB}) \quad \text{mod. } 2\pi \quad (1'),$$

$$(\overrightarrow{NF}, \overrightarrow{NB}) = (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB}) \quad \text{mod. } 2\pi \quad (1'').$$

On reconnaît aussitôt que $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA})$ mod. $2\pi$

et que $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OB}) + \pi$ mod. $2\pi$.

Les relations (1′) et (1″) deviennent $(\overrightarrow{NE}, \overrightarrow{NA}) = (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA})$ (mod. $2\pi$),

$$(\overrightarrow{NF}, \overrightarrow{NB}) = (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OB}) + \pi \quad (\text{mod. } 2\pi)$$

et nous apprennent que *les cercles* OAE, OBF *passent par* N. Mais de manière plus précise, O et N sont dans le premier cercle, sur le même arc limité à A et E, et dans le second cercle, sur des arcs différents limités à B et F. Bref, O et N sont du même côté de la droite AE, et de part et d'autre de la droite BF.

O étant situé sur les médiatrices de AE et BF est au milieu de chacun des arcs, d'extrémités (A, E), et (B, F) qui le contient ; il s'ensuit que la droite NO est bissectrice extérieure en N du triangle NEA et qu'elle est bissectrice intérieure en N du triangle NBF.

Enfin les deux cercles OAEN, OBFN ont comme rayons respectifs en O les médiatrices de AE et BF : ils sont donc *orthogonaux*.

Revenons aux relations : $(\overrightarrow{NE}, \overrightarrow{NA}) = (\overrightarrow{NF}, \overrightarrow{NB})$ mod. $2\pi$ (1)

$$\frac{NA}{NE} = \frac{NB}{NF} \qquad (2)$$

pour en donner une nouvelle interprétation. La forme $(\overrightarrow{NE}, \overrightarrow{NA}) = -(\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NF})$ indique qu'il existe une symétrie par rapport à une certaine droite (D) passant par N, qui échange les demi-droites (d'origine N) NE et NB, NA et NF, (D) peut être déterminée, à volonté, comme support de la bissectrice de l'angle saillant de NE, NB, ou comme support de la bissectrice de l'angle saillant de NA, NF. La proportion (2) prend la forme $NA.NF = NB.NE$. Désignons par $k^2$ la valeur commune de ces deux produits, $k$ étant la mesure d'une certaine longueur.

Il résulte de là que l'opération ($\mathcal{C}$), produit de la symétrie d'axe (D) par l'inversion de pôle N et de puissance $k^2$ *échange les points* B *et* E, A *et* F, d'une façon immédiate.

Cette opération ($\mathcal{C}$) est *réciproque :* si elle transforme un point $m$ du plan (P) (ou même de l'espace) en un point $m'$, c'est que le symétrique $m_D$ de $m$ par rapport à D a pour inverse dans l'inversion (N, $k^2$) le point $m'$, mais aussi bien le symétrique $m'_D$ de $m'$ par rapport à D a pour homologue dans cette inversion le point $m$.

Etudions l'effet de ($\mathcal{C}$) sur les droites EF et AB, qui se coupent en O. ($\mathcal{C}$) échange la droite EF avec un certain cercle passant par le pôle N de l'inversion : les homologues de E, F dans ($\mathcal{C}$) étant B, A, c'est le cercle NAB, c'est-à-dire (S). De même ($\mathcal{C}$) échange la droite AB avec le cercle NEF, c'est-à-dire (T).

L'homologue de O par ($\mathcal{C}$) est un point commun à (S) et (T), qui ne peut être N, lequel n'a pas d'homologue à distance finie dans ($\mathcal{C}$) : c'est donc M. ($\mathcal{C}$) *échange*, encore, *les points* O *et* M.

*Paragraphe 3°.* — On suppose O, A, B fixes dans le plan fixe (P) et la demi-droite OFE variable. (S) reste fixe, (T) est variable.

Le lieu de M est le cercle (S) en entier : car à tout point $M_1$ de ce cercle (supposé d'abord distinct de A et B) correspondent, un point E intersection de $AM_1$ (autre que A) avec (C), une demi-droite OE, un point F de (C'), donc un cercle (T) de diamètre EF, puis un point M défini par l'intersection de AE et BF : M est commun à la droite AE et au cercle (S), et est intérieur au segment AE, il s'identifie dès lors avec $M_1$, et $M_1$ est un point du lieu considéré.

Lorsque la demi-droite OFE tend vers OA, ou OB, M tend vers A, ou B, et il convient d'incorporer, à titre limite, les points A et B comme points du lieu, pour que ce lieu soit identique à (S), propriété annoncée.

L'enveloppe de la droite MN s'identifie alors à celle du second côté de l'angle droit O'MN, dont le premier côté O'M passe par le point fixe O' et dont le sommet M a pour lieu le cercle (S) : cette enveloppe est donc *l'ellipse* ($\varepsilon$) *ayant ce cercle comme cercle principal et* O' *comme foyer :* elle a comme sommets d'axe focal les points A et B, son autre foyer est O (intérieur au segment AB) : son demi-grand axe est de longueur $\frac{R+R'}{2}$ ; sa demi-distance focale est $OS = \frac{R-R'}{2}$ ; son demi-petit axe a pour longueur $\sqrt{RR'}$, car $\left(\frac{R+R'}{2}\right)^2 = \left(\frac{R-R'}{2}\right)^2 + (\sqrt{RR'})^2$.

Cherchons à caractériser le point de contact H de MN avec l'ellipse ($\varepsilon$) : c'est le centre d'un cercle (H) passant par O' et tangent au cercle directeur de ($\varepsilon$), de centre O, au point $\mu$ symétrique de O' par rapport à M. H est sur la droite $O\mu$.

M étant le milieu du segment $O'\mu$, parallèle à la droite ON, le faisceau de quatre droites (OM, ON ; $O\mu$, OO′) est harmonique. Coupons-le par la droite MN, en appelant K le point de rencontre, à distance finie ou à l'infini, de MN avec AB : la division de quatre points (M, N ; H, K) est harmonique. Ainsi H *peut être considéré comme le conjugué harmonique de* K *par rapport à* M *et* N.

Mais on a vu (1°) que le faisceau (OM, ON ; OT, OS) est harmonique. Comme OS n'est autre que OO′ le rapprochement de ce résultat avec le précédent montre que les droites $OH\mu$ et OT sont confondues ; H *est donc point de rencontre de la droite* OFTE *avvec* MN.

L'ellipse ($\varepsilon$) est intérieure à son cercle principal (S), donc H est sur le segment MN, dès lors est intérieur, en général, à (T). H est donc aussi *intérieur, en général, au segment* EF. Quand M est en A ou B, M, N, H sont confondus (cas limites où H vient se confondre avec E ou F).

*II^e partie du problème.* — 1° Dans l'espace on considère les sphères ($\sigma$) et ($\tau$) ayant respectivement (S) et (T) comme grands cercles, et leur cercle ($\Gamma$) d'intersection. Ce cercle ($\Gamma$) est orthogonal au plan (P) aux points M et N.

Son plan est perpendiculaire à (P) et coupe (P) suivant MN. Il contient donc la perpendiculaire en H au plan (P) : comme H est sur le segment MN, cette perpendiculaire coupe ($\Gamma$) en deux points $v$ et $v'$ symétriques par rapport à (P). Ces points sont communs aux sphères ($\sigma$) et ($\tau$).

La perpendiculaire $v'Hv$ au plan (P) est aussi contenue dans le plan perpendiculaire à (P) selon EF qui coupe la sphère ($\tau$) selon un grand cercle ($\Delta$) que l'on caractérise en remarquant qu'il est orthogonal à (P) aux points E et F. Sur (T) les cercles ($\Gamma$) et ($\Delta$) se coupent aux points $v$ et $v'$.

Il convient ici de se souvenir que l'ellipse ($\varepsilon$) peut être regardée comme projection sur (P) de deux cercles ayant le grand axe AB de ($\varepsilon$) comme diamètre commun et par conséquent situés sur la sphère ($\sigma$), ayant AB comme diamètre. Ces cercles sont fixes et le point H de ($\varepsilon$) est la projection commune (1) sur (P) de deux points appartenant chacun à l'un de ces cercles. Comme la perpendiculaire en H à (P) ne coupe la sphère ($\sigma$) qu'aux deux points $v$ et $v'$, ceux-ci sont situés chacun sur un de ces cercles fixés. Dénommons (V) celui qui contient $v$, et (V′) celui qui contient $v'$.

Quand la demi-droite OT tourne autour de O dans (P) [conditions de (I, 3°)] le lieu de H est ($\varepsilon$) et *ceux de* $v$, $v'$ *sont respectivement les grands cercles* (V) *et* (V′) *de* ($\sigma$).

De plus, la tangente à (V) en $v$ est projetée sur (P) selon la tangente à ($\varepsilon$) en H, qui est MN ; elle est donc contenue dans le plan de ($\Gamma$), qui coupe AB au point K défini dans (I, 3°) : sa trace sur (P) est K. (V) est tangente en $v$ à la droite $v$K.

La tangente en ($v$) au cercle ($\Gamma$) est contenue aussi dans le plan de ($\Gamma$). Ces deux tangente, à (V) et à ($\Gamma$), sont *à priori* situées dans le plan tangent à la sphère ($\sigma$) en $v$, distinct évidemment du plan de ($\Gamma$) : cela suffit à établir qu'elles sont confondues. Ainsi, sur *la sphère* ($\sigma$), *le grand cercle* (V) *est tangent au cercle* ($\Gamma$) *en* $v$ *:* il s'ensuit par symétrie que, de même, *le grand cercle* (V′) *est tangent au cercle* ($\Gamma$) *en* $v'$.

2° Toujours dans les conditions de (I, 3°) le cercle ($\Delta$) varie par rotation (comme ses traces E et F) sur (P), et son plan, passant par l'axe OZ perpendiculaire à (P) en O [*axe* commun des cercles (C) et (C′)]. Ce cercle ($\Delta$) engendre une surface de révolution d'axe OZ (*tore*). Dans cette partie nous obtiendrons, par voie élémentaire les propriétés de cette surface, dont la conception est intuitive, bien que son étude ne soit pas au programme de la classe. C'est le lieu de ($\Delta$). Désignons-le par (R).

(1) Les projections dont il est question, dans toute cette partie, sont faites *orthogonalement* sur (P).

$v$ et $v'$, appartenant à $(\Delta)$, leurs lieux respectifs (V) et (V') sont des lignes appartenant à la surface (R). (R) *a donc en commun avec la sphère* $(\sigma)$ *ces deux cercles* (V) *et* (V').

*Remarque :* Inversement, tout point commun à la sphère $(\sigma)$ et à la surface (R) est, par définition de (R), un point commun à $(\sigma)$ et à un « cercle générateur » $(\Delta)$ de (R), tel que celui considéré dans (II, 1°) : un tel point est commun à $(\sigma)$ et à la sphère $(\tau)$ ayant $(\Delta)$ comme grand cercle, qui coupe (P) suivant un autre grand cercle, de la famille des (T), soit (T). Il est donc sur le cercle $(\Gamma)$ d'intersection de $(\sigma)$ avec $(\tau)$ et se projette sur (P) en H, point commun aux traces des plans de $(\sigma)$ et $(\tau)$ sur (P), qui sont EF et MN ; c'est donc un point $v$ ou $v'$ et l'on voit ainsi que *la sphère* $(\sigma)$ *n'a en commun avec* (R) *que les points des cercles* (V) *et* (V').

Au point $v$ commun à (V) et $(\Delta)$, l'angle de ces cercles est défini comme celui de leurs tangentes : la tangente en $v$ à (V) s'identifiant avec la tangente en $v$ à $(\Gamma)$, cet angle peut aussi être considéré comme celui des cercles $(\Gamma)$ et $(\Delta)$, situés sur la même sphère $(\tau)$. Proposons-nous de rechercher cet angle $\alpha$, qu'il est loisible de supposer aigu.

A cet effet, nous appliquons aux cercles $(\Gamma)$ et $(\Delta)$ l'opération $(\mathcal{C})$ considérée au dernier alinéa de (I, 2°). Observons que $(\mathcal{C})$ étant produit d'une symétrie (ou rotation de deux droits) autour d'une droite D, par une inversion (N, $k^2$) cette opération conserve les angles, et, d'autre part, qu'elle change un cercle en un cercle, exceptionnellement réduit à une droite si le cercle transformé passe par N ; enfin, que si le cercle transformé est orthogonal au plan (P), il résulte de la conservation des angles par $(\mathcal{C})$ que sa ligne homologue est un cercle (ou une droite) orthogonale à (P).

Ceci dit, le cercle $(\Gamma)$ orthogonal à (P) en M et N est échangé, par $(\mathcal{C})$, avec la droite perpendiculaire à (P) en l'homologue de M par $(\mathcal{C})$ qui est O, comme on l'a vu ; bref $(\Gamma)$ est transformé en OZ. Le cercle $(\Delta)$ orthogonal à (P) en E et F est échangé par $(\mathcal{C})$, avec le cercle orthogonal à (P) en B et A, toujours d'après (I, 3°).

$\alpha$ est donc l'angle aigu de OZ avec ce cercle (AB), contenu dans le plan de OZ et AB. On l'obtient par rabattement de ce plan autour de AB comme charnière, sur le plan (P) : c'est l'angle aigu de (S) [rabattement du cercle (AB)] avec la perpendiculaire en O à AB (rabattement de OZ). La figure montre immédiatement que c'est le demi-angle au centre S du cercle (S) pour la corde de ce cercle perpendiculaire en O à AB ; il est déterminé par la relation $\cos\alpha = \dfrac{\mathrm{SO}}{\mathrm{SA}} = \dfrac{\frac{\mathrm{R}-\mathrm{R}'}{2}}{\frac{\mathrm{R}+\mathrm{R}'}{2}} = \dfrac{\mathrm{R}-\mathrm{R}'}{\mathrm{R}+\mathrm{R}'}$,

d'où $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{\mathrm{RR}'}}{\mathrm{R}+\mathrm{R}'}$ en vertu de la relation déjà signalée

$$\left(\frac{\mathrm{R}+\mathrm{R}'}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{R}'}{2}\right)^2 + (\sqrt{\mathrm{RR}'})^2$$

$\alpha$ *est donc constant* quand le cercle $(\Delta)$ varie en engendrant (R) : *les cercles* (V) *et* (V') *coupent tous les cercles* (R) *sous ce même angle.*

On aurait pu l'évaluer aussi en se référant au cas particulier d'un cercle $(\Delta)$ de (R) passant par A (H en A) : c'est l'angle aigu de (V) en A avec la perpendiculaire à (P) en A, et par conséquent *l'angle du plan du cercle* (V) *avec* OZ.

Vérifions-le cependant, en appelant $\beta$ l'angle de OZ avec les plans de (V) ou (V'). Son complément est l'angle de (P) avec le plan de (V), donné, comme il est bien connu par son cosinus $\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ [A et B demi-axes focal et non-focal de l'ellipse $(\varepsilon)$, projection de (V) sur (P)]. Ainsi

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\frac{B}{A}=\frac{2\sqrt{RR'}}{R+R'} \quad \text{ou} \quad \sin\beta=\frac{2\sqrt{RR'}}{R+R'}=\sin\alpha$$

$\beta$, comme $\alpha$, est aigu : on vérifie bien que $\beta=\alpha$.

*III^e partie du problème.* — Elle consiste, en premier lieu, à effectuer une inversion particulière de la figure considérée dans la II^e partie, de manière à déduire des résultats de cette dernière, des découvertes touchant la figure transformée.

Mais, et ce point n'a pas été compris assez généralement, cette méthode de recherche ne donne un théorème intéressant qu'autant qu'on puises caractériser directement la nature de la figure obtenue par une telle inversion, et notamment l'arbitraire des éléments qui peuvent servir à reconstituer une telle figure, considérée en soi, indépendamment de la figure de II.

1° Sur un cercle (X) du plan (P), de centre O, de rayon $\sqrt{RR'}$, on prend un point fixe arbitraire I. On soumet l'ancienne figure à l'inversion ($\mathcal{J}$) de pôle I et de puissance 2RR'.

L'inverse dans ($\mathcal{J}$) d'un élément (point, ligne ou surface) désigné dans l'ancienne figure par une lettre, sera désigné par la même lettre affectée de l'indice « 1 ».

L'inverse $O_1$ du point O, est dans le plan $P_1$ ($P_1$ coïncide avec P) à la distance $IO_1$ du point I, telle que $$IO_1=\frac{2RR'}{IO}=\frac{2RR'}{\sqrt{RR'}}=2\sqrt{RR'}=2IO.$$

Donc $O_1$ est le symétrique de I par rapport à O.

L'axe (Z) de (C) et (C') a comme inverse le cercle ($Z_1$) orthogonal au plan ($P_1$) aux points I et $O_1$.

Les points E et F, sur la droite OEF, sont conjugués par rapport au cercle (X), car $\overline{OE}.\overline{OF}=RR'=OI^2$ ; tous les cercles passant par E, F, sont orthogonaux à (X).

(X) a comme inverse une droite ($X_1$) de ($P_1$), perpendiculaire en O à IO ; O étant milieu de $IO_1$, ($X_1$) est la médiatrice du segment $IO_1$ (dans $P_1$). Tous les cercles passant par $E_1$, $F_1$, sont orthogonaux à ($X_1$) : donc $E_1$ *et* $F_1$ *sont symétriques, dans* $P_1$, *par rapport à* ($X_1$).

En particulier le cercle IEF a comme inverse la droite $E_1F_1$, perpendiculaire à ($X_1$).

Le cercle IAB passe par $O_1$, car $\overline{OA}.\overline{OB}=-RR'=-IO^2=\overline{OI}.\overline{OO_1}$. Son inverse est la droite $A_1B_1$ de ($P_1$) et celle-ci passe par O.

Les lignes ($C_1$) et ($C'_1$), inverses de (C) et (C'), qui sont les lieux respectifs de E et F dans l'ancienne figure, sont des cercles, car (C) et (C') ne passent pas par I ; ce sont les lieux respectifs de $E_1$ et $F_1$, ils sont donc symétriques par rapport à ($X_1$) : en particulier ($X_1$) *est l'axe radical de* ($C_1$) *et* ($C'_1$) *et ces cercles sont de même rayon.*

Les droite passant par O sont orthogonales aux cercles (C) et (C') ; par inversion, les cercles passant par I et $O_1$ sont orthogonaux aux cercles ($C_1$) et $C'_1$) : il en découle que I et $O_1$ sont les points limites du faisceau de cercles ($C_1$) et ($C'_1$).

Comme $R<\sqrt{RR'}<R'$, I est extérieur à (C'), intérieur à (C) : la considération des tangentes, éventuellement menées de I à ces cercles, qui sont aussi tangentes aux cercles inverses (quand elles existent), montre que I est intérieur à ($C_1$), mais extérieur à ($C'_1$).

$A_1$ est un point de ($C_1$), ($B_1$) est un point de ($C'_1$) et on a vu que ces points sont alignés avec O, *milieu* de $IO_1$ et aussi de la ligne des centres de ($C_1$), ($C'_1$) ; de tels points sont donc, soit homothétiques dans l'homothétie de centre O transformant ($C_1$) en ($C'_1$), qui est une symétrie de centre O, soit inverses dans l'inversion de pôle O échangeant $(C_1)$ et $(C'_1)$, inversion qui est négative [O étant extérieur aux cercles $(C_1)$ et $(C'_1)$ *non sécants*].

Mais le cercle (S) est tangent en A à (C) et en B à (C') d'où résulte que $(S_1)$ est tangent en $A_1$ à $(C_1)$ et en $B_1$ à $(C'_1)$ : les rayons de $(C_1)$ et $(C'_1)$ qui aboutissent à $A_1$ et $B_1$ passent par le centre de $(S_1)$ et ne peuvent être parallèles *pour* I *arbitraire sur* (X), auquel cas (S) ne passe pas par I, c'est-à-dire que $(S_1)$ n'est pas une droite. $A_1$ et $B_1$ *sont donc échangés par l'inversion de pôle* O *échangeant* $(C_1)$ *et* $(C'_1)$.

On aurait pu remarquer aussi que A et B étant dans un même plan passant par (Z), $A_1$ et $B_1$ sont sur une même sphère avec le cercle $(Z_1)$, orthogonal, comme il a été vu, à $(P_1)$ en I et $O_1$ : cette sphère coupe $(P_1)$ suivant un cercle passant par $A_1$, $B_1$, I, $O_1$ : d'où la relation $\overline{OA_1}.\overline{OB_1} = \overline{OI}.\overline{OO_1} = -2RR'$. Elle est valable pour toute position de AOB dans l'ancienne figure, donc il y a une infinité de couples de points $A_1$ et $B_1$, respectivement situés sur $(C_1)$ et $(C'_1)$ échangés par une inversion négative fixe de pôle O ; ce qui confirme le résultat précédent. On voit, de plus, que cette inversion négative échange aussi les points limites I et $O_1$ du faisceau de cercles défini par $(C_1)$ et $(C'_1)$.

Dans les conditions de (I, 3°), $(C_1)$, $(C'_1)$, $A_1$, $B_1$ (possédant la disposition précédente) sont fixes ; le cercle $(\Delta_1)$ est orthogonal à $(P_1)$ en $E_1$ et $F_1$, points symétriques par rapport à l'axe de symétrie $(X_1)$ de $(C_1)$ et $(C'_1)$ ; $(\Delta_1)$ est mobile et engendre la surface $(R_1)$ inverse de (R) : $(R_1)$ est le lieu des cercles $(\Delta_1)$ de même axe $(X_1)$ et s'appuyant sur $(C_1)$, par suite sur $(C'_1)$ : il est clair que $(R_1)$ *est une surface de révolution d'axe* $(X_1)$ *engendrée par* $(C_1)$ *ou* $(C'_1)$ *tournant autour de* $(X_1)$.

La sphère $(\sigma)$, orthogonale à (P), le long de (S), a comme transformée par $(\mathcal{J})$ la sphère $(\sigma_1)$ orthogonale à $(P_1)$ le long de $(S_1)$ : $(\sigma_1)$ est tangente à $(C_1)$ en $A_1$ et à $(C'_1)$ en $B_1$.

Le résultat de (II, 2°) sur l'intersection complète de $(\sigma)$ avec (R) se traduit, par l'inversion $(\mathcal{J})$, de la façon suivante : *l'intersection complète de* $(\sigma_1)$ *avec* $(R_1)$ *est formée de deux cercles* $(V_1)$, $(V'_1)$ *passant tous deux par* $A_1$ *et* $B_1$ : leur symétrie par rapport à $(P_1)$, qui n'est autre que (P), est évidente et résulte de celle de (V) et (V') par rapport à (P).

D'après l'avant-dernier alinéa de (II, 2°) chacun des cercles $(V_1)$, $(V'_1)$ coupe tous les parallèles $(\Delta_1)$ de $(R_1)$ sous un angle constant $\alpha$.

2° Dans un plan $(P_2)$, donnons-nous deux cercles *égaux* $(C_2)$, $(C'_2)$, sans point commun : ils sont symétriques par rapport à leur axe radical $(X_2)$ et cette droite ne les coupe pas. On considère une sphère $(\Sigma)$ orthogonale à $(P_2)$ et tangente à ces deux cercles. On demandait comment $(\Sigma)$ coupe la surface $(R_2)$ engendrée par la rotation de $(C_2)$ ou $(C'_2)$ autour de $(X_2)$ ?

Le grand cercle $(S_2)$, d'intersection de $(\Sigma)$ avec $(P_2)$, est aussi tangent à $(C_2)$ et $(C'_2)$ aux points de contact $A_2$, $B_2$ de ces cercles avec la sphère $(\Sigma)$ ; $A_2$ et $B_2$ se correspondent, fait bien connu, dans une des inversions échangeant les cercles $(C_2)$, $(C'_2)$ ; ici l'une de ces inversions, dans le plan $(P_2)$, se réduit à la symétrie d'axe $(X_2)$.

Deux éventualités peuvent donc se présenter pour $(\Sigma)$, selon que $A_2$ et $B_2$ s'échangent dans l'inversion (négative) échangeant $(C_2)$ et $(C'_2)$ ou que $A_2$ et $B_2$ sont symétriques par rapport à $(X_2)$.

Ce dernier cas est banal au point de vue de la question posée : il entraîne que $(S_2)$ et $(\Sigma)$ ont leur centre sur $(X_2)$ et l'intersection de $(\Sigma)$ avec la surface $(R_2)$ ne comporte que le parallèle des points $A_2$, $B_2$, comptant pour deux cercles confondus.

Ecartons ce cas, alors les dispositions de nos données actuelles, notées à l'aide de l'indice 2, sont conformes à celles des éléments de même nom affectés de l'indice 1, et découvertes dans (III, 1°).

Considérons, dans ($P_2$), le cercle orthogonal à ($S_2$) aux points $A_2$ et $B_2$ : il est aussi orthogonal à ($C_2$) et ($C'_2$) et passe donc par les points limites I, J du système des cercles ($C_2$), ($C'_2$) : $A_2$, $B_2$, I, J, sont sur ce cercle ; comme la droite $A_2B_2$ passe par le milieu de la ligne des centres de ($C_2$), ($C'_2$), pôle de l'inversion négative échangeant ces deux cercles, et que I, J sont symétriques par rapport à ce milieu, les points des deux couples $A_2$, $B_2$ et I, J, *alternent* sur le cercle contenant ces points.

Un raisonnement du même genre s'applique en remplaçant ($S_2$) par un cercle ($T_2$) de ($P_2$) tangent à ($C_2$) et ($C'_2$) en deux points respectifs $E_2$ et $F_2$ supposés symétriques par rapport à ($X_2$) : on établit de même que les points $E_2$, $F_2$, I, J, sont sur un même cercle, mais les couples $E_2$, $F_2$ et I, J, *n'alternent pas* sur celui-ci. Si l'on considère le parallèle ($\Delta_2$) de ($R_2$) qui passe par $E_2$ et $F_2$, il résulte de là qu'il est sur une sphère orthogonale à ($P_2$) et contenant le cercle ($Z_2$) qu'engendre chacun des points I et J dans la révolution autour de ($X_2$).

Ceci posé, effectuons une inversion ($\mathcal{I}$) dont le pôle soit un des points limites I du système ($C_2$), ($C'_2$). Elle conserve le plan ($P_2$) et transforme ($C_2$) et ($C'_2$) en deux cercles (C) et (C') de ($P_2$), concentriques, comme il est bien connu ; leur centre commun O est l'inverse par ($\mathcal{I}$) du second point limite J. Le cercle ($Z_2$) a pour inverse la droite (Z) perpendiculaire à ($P_2$) en O, qui est donc l'axe commun de (C) et (C').

L'inverse, dans ($\mathcal{I}$), du cercle ($S_2$) est un cercle (S) du plan ($P_2$), tangent à (C) et (C'), aux inverses respectifs A, B de $A_2$, $B_2$. $A_2$, $B_2$, I, J étant sur un même cercle, les points A, B, sont alignés avec O, et, de l'alternance signalée à propos des quatre premiers points, résulte que O est intérieur au segment AB. L'inverse de la sphère ($\Sigma$) dans ($\mathcal{I}$) est la sphère ($\sigma$) ayant (S) comme grand cercle, et AB pour un de ses diamètres.

L'inverse dans ($\mathcal{I}$) du cercle ($\Delta_2$) est un cercle ($\Delta$) orthogonal à ($P_2$) aux points E et F inverses respectifs de $E_2$ et $F_2$. En transformant la propriété notée plus haut, à savoir que ($\Delta_2$) et ($Z_2$) sont sur une même sphère, mais non sécants, nous voyons que le cercle ($\Delta$) et la droite (Z) sont dans un même plan, mais non sécants. Autrement dit, E et F sont alignés avec O, mais O est extérieur au segment EF.

L'inverse de la surface ($R_2$), engendrée par ($\Delta_2$) quand $E_2$ décrit ($C_2$), est une surface (R) engendrée par le cercle ($\Delta$) quand E décrit (C). C'est un tore tel que nous l'avons rencontré dans (II, 2°). Son intersection avec ($\sigma$) est formée de deux cercles (V) et (V') passant par A et B, orthogonaux à la droite AOB.

L'inversion ($\mathcal{I}$) permet de déduire de ce résultat la réponse à la question posée : *La sphère* ($\Sigma$) *a en commun avec le tore* ($R_2$) *deux cercles* ($V_2$) *et* ($V'_2$) *passant par les points de contact* $A_2$, $B_2$ *de* ($\Sigma$) *avec* ($C_2$) *et* ($C'_2$), *et orthogonaux en ces points au cercle* $IA_2JB_2$.

*Observations.* — Les fautes relatives à la *géométrie orientée* sont signalées comme au moins aussi nombreuses cette année que les précédentes : aussi le paragraphe 2° de I aura sans aucun doute joué un rôle déterminant dans le triage et dans le classement final des candidats : certains ne conçoivent que l'angle arithmétique, compris entre 0 et $\pi$, de deux demi-droites. Mais plus nombreux sont ceux qui abusent de la notation de l'angle orienté de demi-droites : dans une question comme celle de la déformation d'un parallélogramme articulé (I, 1°) elle est inopportune.

Par contre la notion de *transformation* a semblé bien comprise : ainsi l'opération ($\mathcal{C}$) qui, pourtant, n'avait été introduite que dans le plan P en (I, 2°) a été correctement utilisée dans l'espace en (II, 2°) : ce sont plutôt les ressources qu'offrent les propriétés générales de ces transformations qui sont souvent sous-estimées : pour prouver que ($\mathcal{C}$) échange O et M, beaucoup se sont perdus dans la considération de triangles semblables, en s'attachant strictement à la définition première de ($\mathcal{C}$), et n'ont le plus souvent pas abouti. L'emploi des transformations n'est donc fécond que s'il s'accompagne d'idées générales qui leur soient liées.

L'entrée en matières du problème était accessible à un élève de Quatrième : il nous semble que le Jury doit se montrer fort éclectique, et admettre aussi bien les démonstrations très élémentaires que celles plus savantes utilisant les matières du programme de la classe de Mathématiques. Toujours est-il que trop de concurrents croient qu'un quadrilatère à côtés opposés égaux est un parallélogramme ou signalent que OSTN est un trapèze isocèle sur le vu des figures faites, avec des explications qui permettraient aussi bien de prouver que cette même figure est un parallélogramme. Conseillons à certains candidats de revoir sérieusement les hypothèses de la « réciproque du théorème de Thalès » : il ne permet pas de prouver que trois droites sont parallèles, mais seulement que si les deux premières le sont, la troisième leur est parallèle.

La passivité devant l'énoncé, le recours à l'érudition, sont des critiques portées fréquemment sur les copies de concours ; mais il est réconfortant de se rendre compte qu'elles sont moins opportunes, plus rares, en somme, que dans le passé. En gros, dans I et II, les candidats ont dû suivre fidèlement l'énoncé, mais dans la partie III, celui-ci s'était attaché à être le plus élémentaire possible : il s'est trouvé dans l'étude de la mise en place de la figure inverse de celle de II, que bien des variantes intéressantes ont été considérées dans les copies, qui ne suivent pas trop servilement l'énoncé, et il faut s'en féliciter.

Si quelques candidats ont parlé de l'intersection d'un tore et d'un plan bitangent, ce qui n'entre guère dans la ligne du problème, il n'y a pas lieu de reprocher plus à un candidat de connaître le sens du mot « tore » qu'à un autre de l'ignorer.

Certains connaissaient le fait que la propriété pour deux points d'être inverses ou « symétriques » par rapport à un cercle se conserve par une inversion et ont bien vu, grâce à ce fait, le rôle du cercle X de (III, 1°).

Les fautes et les lourdeurs les plus fréquemment observées, ailleurs que dans les débuts dont il a déjà été question, sont les suivantes :

Dans (I, 3°) on démontre généralement que H est sur la *droite* EF et non sur le *segment* EF ; on démontre bien que la droite MN est tangente à une ellipse fixe ($\varepsilon$), définie correctement, mais on n'établit pas que l'enveloppe de MN est cette ellipse.

Dans (II, 1°) on affirme qu'il suffit, pour que deux courbes de l'espace soient tangentes, que leurs projections le soient ; ou encore qu'il suffit, pour que deux courbes tracées sur une même sphère soient tangentes, que leurs projections le soient. Imprécision dans les idées, dans le langage ?

Dans (II, 2°) on a été supris de la faible proportion des copies qui peuvent établir la fixité des plans AB$v$, AB$v'$, et par conséquent les lieux de $v$ et $v'$. Lorsqu'on arrive à ce résultat, c'est avec des lourdeurs : il semble que les élèves n'aient pas associé, à l'idée des deux cercles concentriques à l'ellipse $\varepsilon$ et se projetant sur son plan selon cette ellipse, l'idée de la sphère de diamètre AB qui les contient.

Dans (III, 1°), pour démontrer l'égalité des cercles ($C_1$), ($C'_1$) on a souvent calculé les rayons de ces cercles, méthode peu élégante, mais naturelle. Il eût été simple de considérer qu'il passe par I (tel que $OI = \sqrt{RR'}$) deux cercles tangents à (C) et (C'), de la même manière que (T), et que ces cercles sont tangents à OI : par l'inversion ($\mathcal{J}$) ils se transforment en deux droites parallèles auxquelles ($C_1$) et ($C'_1$) sont tangents, ce qui rend l'égalité de ces cercles intuitive. L'usage fréquent de la transformation par inversion de régions du plan n'est pas des plus heureux, quoique très légitime.

La dernière question (III, 2°) a été traitée de façon superficielle sans qu'on puisse toujours incriminer le manque de temps : la preuve en est qu'un lauréat du Concours a négligé l'étude demandée pour se livrer à des calculs d'angles qui n'étaient nullement exigés : il a fait preuve d'indépendance vis-à-vis du texte, d'une belle envolée ; mais il n'a pas compris ce qui était demandé par l'énoncé et ceci est bien symptômatique du fait suivant :

Les élèves, et des meilleurs, n'attachent pas à l'étude des *synthèses* le même intérêt qu'à celle des *analyses*. On leur a dit que l'étude, ainsi dédaignée d'une synthèse, peut se rattacher à celle de l'analyse correspondante par un simple processus d'*identification*. C'est souvent, mais pas universellement, exact.

Bien rares sont les esprits qui s'attachent à mettre en forme de telles identifications : trop signalent la chose en se gardant d'y apporter la moindre précision.

Telle est bien la lacune essentielle la plus constante de nos jeunes apprentis en Mathématiques, et tous les ans nous devons y insister sans enregistrer à ce sujet le moindre progrès.

La rédaction et la présentation, en général bonnes, ne sont pas encore exemptes de reproches. Si l'un des concurrents n'a pas fait une seule figure, un autre, emporté par son zèle, en a fourni dix-neuf, ce qui peut être nécessaire dans certains problèmes, mais ne l'était sûrement pas dans l'espèce. Dans l'une des meilleures copies, on relève, dans un seul paragraphe, les graphismes suivants : « cercles inscris », « points décrivants une droite », et ce qui s'explique moins, « points de poncelets ». Par compensation, un correcteur a trouvé dans les compositions d'épure du Concours de l'Ecole Polytechnique, cette perle : « le cercle de Georges de l'hyperboloïde ».

Dans l'ensemble, la composition a été mieux réussie en 1952 qu'en 1951. Si cela est dû, en partie, à la différence de difficulté des sujets, il n'est pas interdit de penser à un relèvement de la valeur du lot des candidats.

A la première lecture des copies, vingt-cinq copies atteignant au moins la note de 11,5 sur 20, ont été retenues pour une seconde lecture. Une très forte accumulation de résultats cotés 7,5 est à signaler dans le lot des copies non retenues, qui sont assez honorables, mais leurs auteurs ne sont sans doute pas entraînés à faire des compositions de six heures. Aussi la tâche des correcteurs a-t-elle été fort minutieuse et délicate.

Après un examen non moins difficile des copies retenues par tous les correcteurs, le Jury a difficilement départagé les meilleures et a proposé douze récompenses pour le palmarès de l'épreuve : trois prix, et neuf accessits, comportant pour les premiers, cinquièmes et huitièmes accessits deux *ex-æquo* chaque fois. Les notes sur 20 des premier, deuxième et troisième prix sont 17,56, 16,68 et 16,14. Pour les accessits elles varient de 15 à 11,5.

Ce genre de concours ne permet pas des conclusions très poussées en profondeur, cela tient surtout à la rédaction concise des concurrents qui pose maints problèmes individuels d'interprétation de leurs solutions. Mais lorsqu'un lot élevé de concurrents se montre capable de traiter au moins la moitié du problème, l'impression moyenne, difficile à traduire par des barèmes destinés à un classement comparatif, est certainement hautement satisfaisante, et c'est à nos professeurs qu'il convient d'attribuer cet heureux relèvement du goût qu'ils entretiennent pour les Mathématiques. Nous les en remercions d'autant plus sincèrement que nous n'ignorons pas les grandes difficultés de leur tâche.

*L'Inspecteur général, président du Jury,*

P. Robert.

# II. Assemblée générale du 29 Mars 1953

## Les Mathématiques en Sixième et dans le Premier Cycle

*Rapport de* Mlle Masson, *professeur au Lycée Marie-Curie*

Les questions suivantes ont été posées l'an dernier aux membres de l'Association :

A. — Trouvez-vous quelque intérêt au programme actuel de Sixième ?

B. — Voyez-vous des raisons pour que ce programme reste identique à celui de la classe de Septième ?

C. — Pensez-vous qu'il puisse être intéressant d'étudier comment la suppression du programme actuel de Sixième pourrait permettre de répartir sur quatre ans les matières enseignées aujourd'hui de la Cinquième à la Troisième ?

De nombreuses réponses ont été envoyées ; les opinions les plus diverses se manifestent ; leur diversité rend très difficile un compte rendu détaillé ; il ne se dégage pas l'opinion d'une majorité ; mais il apparaît seulement quelques points sur lesquels un assez grand nombre de réponses sont concordantes.

Le Comité a pensé qu'il y aurait intérêt à poser aux membres de l'A.P.M. des questions plus précises relatives à ces différents points.

De nombreux collègues ont insisté sur le fait que les élèves de Sixième ne possèdent pas le programme de Septième, ou plus exactement, puisqu'il n'y a pas de programme spécial à cette classe, le programme du cours moyen. Ils soulignent que ceci rend nécessaires des révisions du système métrique en Sixième, et ils déplorent que le programme du cours moyen soit aussi chargé.

Sous cette forme, la question dépasse nos possibilités d'action, puisqu'il s'agit des programmes du Premier Degré.

Le Comité propose d'examiner la question sous un autre angle : ne pourrait-on obtenir pour l'examen d'entrée en Sixième un programme limitatif ? Le président, M. Monjallon, a entrepris des démarches à ce sujet.

Quant au programme de Sixième proprement dit, deux préoccupations se font jour :

1° nécessité d'une révision du système métrique, mais, pour de nombreux collègues, elle ne devrait pas être l'unique objet d'étude de l'année de Sixième ;

2° de nombreuses réponses également font apparaître l'opinion suivante : nos horaires de Cinquième, Quatrième, Troisième, sont trop restreints pour les programmes actuels. Il serait donc souhaitable d'opérer le glissement, prévu par la dernière question posée l'an dernier, de quelques chapitres d'une classe à la précédente. Ce glissement est conditionné par un remaniement, au moins partiel, de la classe de Sixième.

Une réunion de quelques-uns des auteurs de réponses au questionnaire d'une part, et, d'autre part, de professeurs enseignant ou ayant enseigné en Sixième, s'est tenue à Sèvres, dans le cadre des échanges de vue organisés par Mlle Dionot, M. l'Inspecteur général Desforge nous a fait l'honneur d'assister à cette réunion. Les questions concernant la Sixième y ont été évoquées.

Il est apparu une contradiction assez curieuse entre l'esprit des réponses écrites et l'opinion des professeurs participant à cette réunion. Pour un grand nombre de correspondants de l'A.P.M, l'impression était la suivante : le programme de la classe de Sixième, sous sa forme actuelle, a peu d'intérêt ; il serait nécessaire de l'étoffer.

De la réunion se dégageait au contraire la conclusion suivante :

Il est possible de tirer beaucoup de l'actuel programme de Sixième ; l'usage des instruments permet des notions de géométrie intuitive ; les applications du système métrique donnent des exemples d'approximations, de calcul d'erreurs ; des exercices sur les aires peuvent conduire, par exemple, au calcul du produit d'une somme par un nombre. Ceci n'est qu'un choix très restreint des nombreux aperçus qui furent donnés.

En fait, cette contradiction, comme le fit remarquer l'un des professeurs présents, est sans doute plus apparente que réelle ; la brièveté d'une réponse écrite n'a peut-être pas permis aux correspondants de l'A.P.M. d'expliquer que, concevant le programme de Sixième comme devant comporter de tels prolongements, ils les traitaient effectivement dans leur classe, mais sans être, ce faisant, tout à fait sûrs de leur bon droit.

M. l'Inspecteur général Desforge a fait observer alors que, d'après les instructions de 1938, la classe de Sixième devrait être une classe de transition entre l'Enseignement du Premier Degré et celui du Second Degré. Si aucun chapitre nouveau n'a été inscrit au programme de cette classe, c'est précisément pour que les questions déjà connues y soient reprises d'un autre point de vue et avec un autre esprit.

Il faut ajouter, à propos de la classe de Sixième, que des collègues souhaitent d'utiliser des séances de travail dirigé ou d'activités dirigées à une initiation à l'astronomie descriptive en Sixième et Cinquième.

En liaison, semble-t-il, avec ce souci d'une introduction à l'astronomie dans le Premier Cycle, les mêmes collègues souhaitent la réapparition, en Troisième, des notions de géométrie dans l'espace, introduites par les programmes de 1938.

Quelques collègues ont envoyé des projets complets d'une nouvelle répartition dont la réalisation suppose le remaniement préalable de la classe de Sixième.

Les suggestions faites sont des plus variées ; celles concernant des remaniements moins profonds n'offrent pas moins de diversité. Je m'excuse de ne pouvoir les rapporter toutes et de me borner à rappeler les points les plus souvent abordés et sur lesquels il semble utile de connaître l'opinion de l'ensemble des membres de l'A.P.M.

En Cinquième, les élèves passent beaucoup de temps à étudier la réduction des fractions au même dénominateur, et, d'autre part, ils continuent souvent, pour ce faire, à effectuer tout simplement le produit des dénominateurs. On gagnerait donc des heures précieuses si l'étude du P.G.C.D. et du P.P.M.C. prenait place, dans cette classe, avant l'étude des fractions.

En Quatrième, le programme d'algèbre serait plus intéressant si on y introduisait le produit des polynômes. Ceci allégerait le programme de Troisième, fort lourd.

La place à donner à l'étude des lieux géométriques est très discutée ; quelques collègues proposent de l'aborder dès la Quatrième ; de plus nombreux la trouvent trop difficile pour des élèves de Troisième et proposent son rejet en Seconde.

Nous souhaitons que de nombreuses réponses aux quelques questions qui vont suivre permettent de dégager sur ces différents points l'opinion des membres de l'A.P.M.

I. Souhaitez-vous qu'il existe un programme limitatif pour l'examen d'entrée en Sixième ?

II. Dans ce cas, de quelles questions du programme du cours moyen souhaitez-vous la suppression ?

III. Souhaitez-vous que subsiste le programme actuel de Sixième, compte tenu des précisions apportées sur l'esprit dans lequel il peut être traité ?

IV. Souhaitez-vous l'introduction explicite, dans le programme de Sixième :

A) de notions intuitives de géométrie ;

B) de certaines questions du programme d'arithmétique de Cinquième ?

V. Souhaitez-vous que l'étude du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun précède, en Cinquième, celle des fractions ?

VI. Souhaitez-vous que la multiplication des polynômes soit traitée en Quatrième ?

VII. Dans quelle classe concevez-vous l'introduction des lieux géométriques ?

VIII. Souhaitez-vous une initiation à l'astronomie en Sixième et en Cinquième, à la faveur des heures d'activités dirigées ?

IX. Souhaitez-vous un retour, en Troisième, aux notions de géométrie dans l'espace prévues par le programme de 1938 ?

S. MASSON,
*professeur au Lycée Marie-Curie.*

## Rapport sur les épreuves de Mathématiques au Baccalauréat 1re Partie

Quelques sujets de Première Partie seulement ont donné lieu à des critiques d'importance inégale.

*Besançon* (AB, 1re), ayant demandé l'étude de la somme, du produit et du signe des racines de l'équation $x^2 - 3x + 37 = 0$, il a été nécessaire, au cours de l'épreuve de la remplacer par $x^2 - 7x + 12 = 0$.

*Rennes* (AB, 1re), imité par *Montréal* (AB, 1re), a proposé : Démontrer que les segments déterminés sur deux droites par trois plans parallèles sont proportionnels. Réciproque. Cette question ne figure pas explicitement au programme. Même si elle est habituellement enseignée, elle ne devrait pas faire l'objet d'une question de cours.

L'une des questions posées par *Montpellier* (CMT, 1re) est ainsi rédigée : Equation $\cos x = \frac{1}{2}$. Comment a-t-on jugé le candidat qui a répondu en trois lignes en appliquant le résultat de l'étude de $\cos x = \cos a$ ?

*Grenoble* (T, 2e) et Athènes (CM, 1re) demandent de calculer $\cos(a + b)$, puis d'en déduire $\cos(a - b)$, gênant ainsi les candidats qui ont construit ces formules dans un ordre différent.

*Athènes* y joint un autre sujet qui est une extension du programme : Théorèmes sur les lieux géométriques des points équidistants des deux côtés d'un angle ou des deux faces d'un dièdre.

*Strasbourg* (AB, 2e) reproduit un problème donné à Madagascar (AB, 1re, 1947).

*Bordeaux* (AB, 1re) et *Poitiers* (CMT, 1re) paraissent avoir surestimé les possibilités des candidats en leur proposant des problèmes d'une longueur excessive.

M. FAVRELLE,
*Lycée Faidherbe, Lille.*

## Les Epreuves du B.E., du B.E.P.C. et du Concours d'entrée aux E.N. d'Instituteurs

*Rapport de* M. C. GIRAULT, *professeur au Lycée J.-B.-Say*

Les commentaires accompagnant les sujets qui nous sont adressés sont assez rares, ce qui laisse supposer que nos collègues sont satisfaits en général. Cependant, les critiques sont assez dures quand elles sont énoncées.

B.E.P.C. — Le problème de géométrie donné à *Caen* en juillet (p. 8 des *Annales*) a été retrouvé dans six ouvrages et de nombreux candidats avaient traité le problème en classe ; l'Administration demande pourtant bien de proposer des « textes inédits » et de « certifier leur originalité ».

La seconde partie du sujet d'algèbre proposé à *Rennes* en juin (p. 20 des *Annales*) : représentation graphique de la fonction $y = \frac{1}{x}$, étant hors-programme, des mesures ont été prises dans chaque centre afin que les candidats ne soient pas lésés.

A *Rennes,* l'épreuve a été prolongée de trois quarts d'heure et on a substitué le texte suivant :

Algèbre, 2[e] partie : 1° Construire par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$.

2° Placer sur le même graphique les points A de coordonnées $x = +2$, $y = +2$ ; B de coordonnées $x = -1$, $y = +5$, et donner l'équation de la droite AB.

3° Les deux droites construites, (D) et AB se coupent en un point M, dont on déterminera les coordonnées par le graphique et par le calcul.

A *Laval,* l'épreuve de mathématiques a été entièrement refaite, chaque candidat ayant la meilleure des deux notes (2[e] sujet, texte n° 1, p. 21, *Annales*).

De la *Réunion,* nous avons reçu le sujet de la première session (non publié aux *Annales*) :

I. *Algèbre :* 1° Construire les courbes représentatives des fonctions $y = x + 4$ ; $y_1 = \frac{2x}{3} - 1$ ; $y_2 = -4x + 9$.

2° Les trois droites obtenues forment un triangle ABC. Trouver les coordonnées des points milieux de AB, BC, CA. Reconnaître la nature du triangle ABC.

3° Former l'équation des médianes du triangle ABC.

4° Trouver les coordonnées du centre de gravité de ce triangle.

II. *Géométrie :* Dans un cercle de centre O, on mène la corde AB sous-tendant un arc de 120°. C étant un point de cet arc, on trace la bissectrice CD de l'angle ACB, puis par B la parallèle BE à CD. La droite CD coupe AB en M et AE en P. 1° Que savez-vous du triangle CAP. — 2° Démontrer les relations CD = CA + CB et CA × CB = CD × CM. — 3° Si C est le milieu de l'arc AB, trouver l'aire du quadrilatère ACBD connaissant le rayon R du cercle.

Notre correspondant rapporte qu'il a été fait remarquer au Président du Jury (I.A. de la Réunion) que « le problème d'algèbre, quoique figurant au programme, faisait seulement appel à des notions d'analytique et ne répondait en rien à l'esprit du programme de la classe de Troisième des Lycées et Collèges, et surtout à celui du B.E.P.C. ».

« Outre les calculs longs et compliqués qu'il nécessitait, la question relative à la reconnaissance du triangle ABC n'avait aucun sens, sinon qu'ayant répondu aux questions précédentes, les candidats voulaient à tout prix déceler une erreur dans des calculs pourtant exacts. »

Il est regrettable, une fois de plus, que ce problème ait été retrouvé textuellement dans les ouvrages en usage à la Réunion.

B.E. — Aucun commentaire n'accompagne les sujets reçus.

CONCOURS D'ENTRÉE AUX E.N. D'INSTITUTEURS. — Le problème d'algèbre donné à *Rennes* figure à peu près en entier dans un ouvrage utilisé assez fréquemment.

Par contre, l'épreuve donnée dans les *Ardennes,* déjà délicate en algèbre, est bien au-dessus du niveau de la classe de Troisième en géométrie. Voici le texte qui ne permettait guère un classement des candidats :

I. *Algèbre :* 1° Mettre l'expression $y = x + \frac{1}{x} - \frac{4}{x + \frac{1}{x}}$ sous la forme d'une fraction rationnelle en $x$.

2° Calculer les valeurs numériques de $y$ pour $x = 2$ et $x = -2$. Quelle remarque fait-on ?

Cette remarque est-elle valable pour les valeurs numériques que prend $y$ pour deux valeurs opposées de $x$ ? Expliquer.

3° Calculer les valeurs numériques de $y$ pour $x = 5$ et $x = \frac{1}{5}$. Quelle remarque fait-on ?

Cette remarque est-elle valable pour les valeurs numériques que prend $y$ pour deux valeurs inverses de $x$ ? Expliquer.

4° Résoudre l'équation $x + \frac{1}{x} - \frac{4}{x + \frac{1}{x}} = 0$.

5° Sachant que 3 est racine de l'équation $\left[x + \frac{1}{x} - \frac{4}{x + \frac{1}{x}}\right]^2 = \frac{1024}{225}$

combien peut-on déterminer d'autres racines de l'équation sans calcul ?

II. *Géométrie :* 1° Une droite XY pivote autour d'un point fixe O. Quel est le lieu du symétrique d'un point fixe B par rapport à XY ?

2° On considère deux points fixes A et B, un cercle (C) tangent en A à AB et un cercle (C′) tangent en B à AB.

Les deux cercles (C) et (C′) sont toujours du même côté de la droite AB.

Les centres O et O′ de ces cercles sont sur une droite XY. La seconde tangente commune extérieure touche (C) en T et (C′) en T′.

*a*) Lieu du point T′ si le cercle (C) restant fixe, le cercle (C′) seul varie.

*b*) On suppose que les cercles (C) et (C′) varient de manière que le rapport de leurs rayons reste constant.

Montrer que la droite des centres XY coupe AB en un point fixe I.

En déduire les lieux de T et de T′ ?

*c*) On suppose que les cercles (C) et (C′) varient de manière que la somme de leurs rayons reste constante. Quels sont les lieux de T et de T′ ?

Le barème adopté fut le suivant :

Algèbre : Chaque question sur 4.

Géométrie : 1° 10 ; 2° $a = 8$ ; 2° $b = 6$ (+ 2 à ceux qui reconnaissaient le cas d'exception du rapport égal à 1) ; 2° $c = 8$.

Le quart environ des 53 candidats ont eu leur moyenne.

*En résumé,* les critiques formulées sont de trois ordres : sujets manquant d'originalité, sujets hors-programme, sujets trop difficiles.

C. GIRAULT.

## Définitions et notations

**Ecriture des nombres et des unités.** — Notre dernier rapport indiquait l'accueil favorable fait aux propositions de l'A.F.N.O.R. A ce sujet, nous signalons pour information une circulaire de la Direction du Premier Degré, parue au *B.O* du 4 septembre 1952, sous le titre : « Le calcul à l'école primaire ». Le but de cette circulaire est d'habituer les enfants, dès leur jeune âge, aux notations normalisées, afin qu'ils ne soient pas dépaysés en arrivant dans l'Enseignement du Second Degré. Les conseils qui suivent y sont rappelés :

les tranches de chiffres d'un même nombre ne doivent pas être séparées par des points, mais par des espaces blancs ;

les symboles d'unités s'écrivent sans point final ; ils ne comportent pas la marque du pluriel ; ils se placent à droite du nombre complet indiquant la valeur numérique, sur la même ligne et en caractères du même corps.

La circulaire se termine par l'indication des symboles unitaires normalisés usuels et indique la référence suivante : Fascicule FD, X, n° 02-005 (tirage de septembre 1951) : « Principales dispositions concernant les principes d'écriture, les unités de mesure et les symboles de grandeurs », édité par l'A.F.N.O.R., 23, rue Notre-Dame-des-Victoires, Paris, 2ᵉ. Bureau de vente des normes : 19, rue du 4-Septembre, Paris, 2ᵉ.

**Insertion des symboles d'unités dans le corps des formules.** — Une difficulté sérieuse apparaît ici, cette insertion suppose acquise la notion « d'équation aux dimensions ». Il paraît donc plus prudent, au moins jusqu'en Première, d'opérer comme suit : faire d'abord une traduction afin de remplacer le problème grandoriel par un problème numérique, traiter celui-ci en nombres abstraits ; puis, au prix d'une nouvelle traduction, revenir au problème grandoriel proposé. C'est seulement en classe de Mathématiques que la leçon « Mesure des grandeurs » figure au programme, encore faut-il que nous puissions mener cette leçon à sa conclusion logique qui est la justification rigoureuse de la notion d'équation aux dimensions. Quelques collègues s'y emploient et nous entendrons sans doute bientôt cette leçon au cours d'une séance de notre Commission « Axiomatique et redécouverte ».

**Isométries.** — Aucune objection concernant les mots « isométrie, déplacement, antidéplacement ». En ce qui concerne les symétries les deux tendances signalées l'an dernier ont été excellemment défendues, l'une et l'autre, dans les articles de MM. CHAUVIN et ESTÈVE, nous ne pouvons qu'accepter leur dualité.

**Vecteurs.** — La définition du vecteur, donnée autrefois par l'A.P.M. (un vecteur est un segment orienté), paraît avoir un peu vieilli. De nombreux collègues nous demandent de la remettre sur le métier. La chose sera sans doute facile, car les ouvrages de MM. BOULIGAND, LICHNEROWICZ et CHATTELUN peuvent aujourd'hui nous apporter sur ce sujet des informations précieuses.

**Intersections.** — Notre collègue LE MÉNAGER nous donne sur un point de détail un conseil précis :

le mot « sécantes » s'applique à deux courbes et en particulier à deux droites. Le point commun à deux droites est leur « intersection » ;

le mot « concourantes » est réservé à plus de deux courbes et en particulier à plus de deux droites. Leur point commun est leur point de concours.

On dira ainsi : deux droites sécantes d'un plan... et au contraire les médianes d'un triangle sont concourantes.

Plus généralement il nous est demandé par ailleurs de poser, sous sa forme la plus récente, l'ensemble des définitions et des notations relatives aux notions d'inclusion, d'intersection et de réunion.

Y. CROZES.

## Axiomatique et redécouverte

Nous aurons entendu, cette année, les belles conférences de Mlle FÉLIX, de M. FOUCHÉ, de M. ITARD et de M. CHATTELUN. En outre, nous commençons à réunir une documentation pour les stagiaires d'enseignement. Nous faisons appel à tous pour qu'ils nous aident dans cette tâche en nous tenant au courant de leurs expériences. Dès que notre documentation sera suffisante nous la publierons sous forme de rapport. Nous serions particulièrement heureux d'être mis au courant des travaux de nos Régionales.

Ecrire à M. Y. CROZES, professeur au Lycée Henri-IV, 23, rue Clovis, Paris, 5ᵉ.

# DEUXIÈME PARTIE

## Résolution des triangles

Voici quelques réflexions qui m'ont été suggérées par l'intéressant article de notre collègue MAUGUIN, dans le *Bulletin* n° 146.

On établit dans le cours des systèmes de trois relations qui, complétés par des inégalités imposées aux angles, constituent des conditions nécessaires et suffisantes pour que six nombres, $a$, $b$, $c$, A, B, C, soient les côtés et les angles d'un triangle. Pour calculer ces six nombres, il faut donc trois relations supplémentaires. Donc *tout problème de résolution de triangle permet d'écrire ces trois relations.*

Ces relations peuvent être données. C'est ce qui arrive en particulier dans les cas classiques : donner, par exemple $a$, B et C, c'est donner trois relations : $a = a_0$, $B = B_0$, $C = C_0$ qui constituent trois équations de solution évidente. Dans les cas plus compliqués, on donnera trois relations entre des segments ou des angles déterminés par le triangle (hauteurs, médianes...), et il suffira de les remplacer par leur expression en fonction de $a$, $b$, $c$, A, B, C, pour avoir les trois équations supplémentaires.

Ainsi on aura un système de six équations à six inconnues dont toute solution donnera les côtés et les angles d'un triangle répondant à l'énoncé, à condition que, si l'on a par exemple utilisé le groupe I du cours, cette solution soit formée de nombres tous positifs. Il suffira donc :

1° *De résoudre* ce système.

2° *De discuter :* c'est-à-dire d'exprimer les conditions que doivent vérifier les données pour que :

*a*) la résolution soit possible ;

*b*) les solutions trouvées soient positives.

*La discussion comporte donc deux parties distinctes*, la première étant celle de l'existence des solutions du système, la deuxième celle de la convenance de ces solutions au problème de la détermination d'un triangle. Je ne veux pas dire que ces deux parties doivent être étudiées séparément et successivement : au contraire, comme l'explique très clairement MAUGUIN, elles peuvent s'aider mutuellement. Mais il faut y penser pour ne rien oublier.

C'est d'ailleurs tout : il est bien entendu *inutile* d'exprimer que les angles sont inférieurs à $\pi$, que $|b - c| < a < b + c$, etc... Bien plus, certaines autres conditions peuvent être évidentes, mais il est naturellement inutile de les exprimer dans la discussion, ce sont des conséquences des résultats de la discussion telle que nous l'avons exposée. Je m'explique sur un exemple : soit à résoudre un triangle dont on donne $b$ et $c$, sachant de plus que la hauteur AH est égale au côté $a$. On voit aisément que $A < \frac{\pi}{2}$ : si AH est extérieur au triangle, A est inférieur à un angle d'un triangle rectangle, sinon AH partage le triangle en deux triangles rectangles dont les angles en A sont inférieurs à $\frac{\pi}{4}$ puisque BH et CH sont inférieurs à $AH = a$. Mais cette condition $A < \frac{\pi}{2}$ n'est pas à introduire dans la discussion.

On peut aller plus loin, car on peut dire que les éléments inconnus du triangle, calculés en fonction des données peuvent présenter des maxima ou des minima. Comme ce sont en général des fonctions de plusieurs variables, définies parfois par des équations implicites, leur étude ne sera possible alors qu'en Mathématiques Supérieures. Mais il y a là un problème intéressant à poser, même en Mathématiques Élémentaires, quand on a une fonction d'une seule variable. Signalons que, dans l'exemple déjà choisi, l'angle A peut être déterminé par l'équation linéaire en sin A et cos A : $bc \sin A + 2bc \cos A = b^2 + c^2$ qui ne dépend, comme on pouvait le prévoir, que du rapport $\frac{b}{c}$. On pourra voir, en prenant par exemple pour inconnue auxiliaire $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$, que le maximum de A correspond à $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, et qu'il est atteint quand $b = c$.

R. Rostolland,

*Lycée Marcel-Roby, St-Germain-en-Laye.*

### Sur certaines transformations trigonométriques

Une des fautes les plus fréquentes et les plus difficiles à corriger chez nos élèves du Second Cycle, consiste à dire ou à écrire $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = a + b + c$. J'en trouve un bel exemple dans un manuel assez répandu :

Montrer que : $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Il faut lire : $\sin^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{4\pi}{7} + \sin^2 \frac{6\pi}{7} = \frac{7}{4}$.

Il m'a suggéré la généralisation suivante :

Soit $2n+1$ un entier impair quelconque, et le polygone régulier de $(2n+1)$ côtés inscrit dans le cercle trigonométrique. On démontre facilement que la somme des vecteurs joignant le centre O aux $(2n+1)$ sommets est nulle (par exemple en montrant que cette somme géométrique est portée par deux axes de symétrie distincts de la figure).

On en déduit la somme : $\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \frac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{4n\pi}{2n+1} = 0$

et en tenant compte des symétries :

$$(1) \qquad \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}.$$

Elevons les deux membres au carré ; on obtient, outre la somme des carrés $\sum_1^n \cos^2\frac{2\pi}{2n+1}$, des doubles produits tels que :

$$2\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{4\pi}{2n+1} = \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \cos\frac{2\pi}{2n+1}$$

leur nombre est de $\frac{(n-1)n}{2}$, ce qui, par la transformation précédente, fournit $(n-1)n$ cosinus d'arcs de la forme $\frac{2k\pi}{2n+1}$. En raison des symétries dans le rôle et la position des arcs, on obtient donc : $\frac{(n-1)n}{n}$ fois la somme des cosinus de la formule (1), donc : $(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{n-1}{2}$.

En résumé, l'élévation de (1) au carré donne :

$$(2) \qquad \sum_1^n \cos^2\frac{2k\pi}{2n+1} - \frac{n-1}{2} = +\frac{1}{4}$$

d'où : (3) $\quad \cos^2\frac{2\pi}{2n+1} + \cos^2\frac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos^2\frac{2n\pi}{2n+1} = \frac{2n-1}{4}$

Enfin, en tenant compte de $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, il vient

$$n - \sum_1^n \sin^2\frac{2k\pi}{2n+1} = \frac{2n-1}{4}$$

où : (4) $\quad \sin^2\frac{2\pi}{2n+1} + \sin^2\frac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \sin^2\frac{2n\pi}{2n+1} = \frac{2n+1}{4}.$

Ce qui, pour $n = 3$ donne bien : $\quad \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7} + \sin^2\frac{6\pi}{7} = \frac{7}{4}$

et par suite, pour ne pas imiter nos élèves :

$$\sqrt{\sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7} + \sin^2\frac{6\pi}{7}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Louis RENARD,
*professeur au Lycée Janson-de-Sailly.*

# Livres reçus

E. Lainé, doyen honoraire de la Faculté libre des sciences d'Angers, professeur à l'Institut catholique de Paris : *Exercices de Calcul différentiel et intégral* à l'usage des candidats au certificat de calcul différentiel et intégral. Volume 25/16 cm. de 180 pages, 5e édition, avec d'importants compléments : 600 francs.

Très demandé, cet ouvrage vient de reparaître en cinquième édition ; M. G. Bouligand en a enrichi le répertoire en y ajoutant (problèmes 62 à 66 inclus) des textes qu'il a récemment proposés au certificat, avec les solutions correspondantes. Il a fait suivre ces nouveaux exercices d'une note qui en montre le rôle assez typique dans une théorie globale des équations aux dérivées partielles du premier ordre, développée en étroite liaison avec la théorie des surfaces.

Les problèmes y sont classés conformément au plan adopté pour le *Précis d'Analyse mathématique*, de E. Lainé. Les renvois sont faits aux numéros des problèmes.

# Bibliographie

F. Matray : **Pédagogie de l'Enseignement technique** (Nouvelle Encyclopédie pédagogique, P.U.F.).

L'auteur montre d'abord que l'Enseignement technique, s'il est le plus jeune de nos Enseignements et s'est développé surtout à la suite de l'essor industriel, peut cependant faire remonter ses origines au moins au XVIIe siècle (Richelieu et Descartes). Puis il étudie les problèmes proprement pédagogiques, tels qu'ils se posent dans l'Enseignement technique, qui, d'une part est en perpétuelle évolution, et, d'autre part, doit se penser résolument dans toute son originalité, et non en forme inférieure où se réfugieraient (comme cela arrive parfois) les ratés des autres ordres d'Enseignement. Il y a là un problème d'adaptation qualitative aux besoins de la nation sans parler du point de vue quantitatif, également important, puisque, selon l'auteur, plus de 100.000 enfants sont refusés chaque année par l'Enseignement technique. Questions d'autant plus graves que, malheureusement, à cause de l'organisation industrielle actuelle, beaucoup de métiers n'ont que des exigences dérisoires en ce qui concerne le niveau intellectuel. On peut penser avec l'auteur que l'Enseignement technique n'a pas encore conquis la place et le prestige qu'il mérite et qu'une orientation scolaire bien organisée contribuerait sans doute à lui donner. Tous ceux qui connaissent mal cet ordre d'Enseignement seront intéressés par l'ouvrage de M. Matray, qu'anime une foi sincère et sympathique.

J. G. Semple et G. T. Kneebone : **Algebraic Projective Geometry** (Clarendon Press, Oxford, 1952).

Les auteurs ont en vue une étude rigoureuse de la géométrie projective, qui se prête aisément à l'étude algébrique, et ils supposent chez le lecteur les éléments de l'algèbre linéaire et du calcul des matrices. Le point de vue synthétique n'est pas pour autant négligé, ni oubliés les travaux des Steiner, von Staudt et Reye, sans parler de ceux de Poncelet ou Desargues, les créateurs de cette géométrie.

Depuis la géométrie projective à une dimension jusqu'aux transformations linéaires de l'espace, et les espaces à *n* dimensions, tous les sujets classiques et les résultats les plus récents sont exposés et accompagnés de nombreux exercices et problèmes d'examens, ce qui fait de l'ouvrage un précieux instrument de travail pour les étudiants en Mathématiques pour qui les auteurs l'ont écrit. Et comme toujours, la présentation est impeccable.

Ouvrages reçus :

**Mémorial des Sciences physiques** (Gauthier-Villars) :

Fascicule LII : M. T. Kahan : Physique des guides d'ondes électromagnétiques.

Fasc. LIII : F.-M. Devienne : Condensation et adsorption des molécules sur une surface en atmosphère raréfiée.

Fasc. LIV : M. P. Rouard : Propriétés optiques des lames minces solides.

Fasc. LV : M. P. Rouard : Applications optiques des lames minces solides.

**Mémorial des Sciences mathématiques** (Gauthier-Villars) :

Fascicule CXIX : C. Truesdell : Vorticity and the thermodynamic state in a gas flow.

R. Chappellet : **Initiation à l'algèbre** (classe de Quatrième commerciale) (Dunod).

A. Huisman.
*Professeur au Lycée Montaigne.*

## Compte rendu financier
### du 25 Mars 1952 au 11 Mars 1953

Recettes

| | |
|---|---|
| En caisse le 24 mars 1952 | 714.945 |
| Cotisations et dons | 688 750 |
| *Bulletins* | 4.416 |
| Recettes brutes de publicité | 146.480 |
| Total des recettes | 1.554.591 |

Dépenses

| | |
|---|---|
| Frais d'impression et d'expédition des *Bulletins* 146 à 153 | 841.972 |
| Abonnement *Education Nationale* | 1.530 |
| Frais de secrétariat et de gestion | 10.029 |
| Total des dépenses | 853.531 |

Actif au 11 mars 1953 : 701.060 francs

L'actif comprend un fonds de réserve de 5.930 francs concernant 33 rachats de cotisations.

*Le Gérant :* L. Parazines.

Cahors. Imp. A. Coueslant (*personnel intéressé*). 84.285 — 1953
C.O.A.L. 31.2330. — Dépôt légal : I-1953

# ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

## du dimanche 29 Mars 1953 à 8 h. 30

**au Musée Pédagogique, 29, rue d'Ulm, Paris, 5ᵉ**

---

### Ordre du iour

1° Rapport moral du Président.

2° Compte rendu financier.

3° Les épreuves de mathématiques aux divers examens et concours.

4° L'examen d'entrée en Sixième.

5° Les programmes du Premier Cycle.

Le présent avis tient lieu de convocation. Les membres de l'Association sont priés de remettre en séance ou de faire parvenir, pour le 15 avril 1953 au plus tard, au Président, le résumé de leurs interventions, s'ils veulent être sûrs que celles-ci soient mentionnées au compte rendu de l'Assemblée générale.

### Votes par correspondance

(Voir les Bulletins de vote aux deux pages suivantes)

**Tous les membres de l'Association qui ne pourront assister à l'Assemblée générale du 29 mars 1953 sont instamment priés de bien vouloir voter par correspondance.**

Pour la régularité des opérations de scrutin, prière de se conformer aux indications suivantes :

1° Détacher la partie inférieure de la page suivante (Bulletin de vote) et l'introduire, après inscription du vote, dans une petite enveloppe cachetée ;

2° Détacher le feuillet suivant, répondre aux questions, et l'insérer, avec la petite enveloppe contenant le Bulletin de vote, dans une seconde enveloppe portant extérieurement, avec le nom et l'adresse de l'expéditeur, la mention : « Association des Professeurs de Mathématiques, Bulletin de vote ». Adresser ce pli à M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris, 5ᵉ.

Il parait indispensable que les votes par correspondance parviennent, au plus tard, le samedi 28 mars 1953.

Le dépouillement du scrutin pour les élections au Comité se fera à la fin de l'Assemblée générale.

## Renouvellement partiel du Comité

Pour éviter une trop grande dispersion des suffrages, la liste suivante a été établie avec l'agrément des membres de l'Association dont les noms y figurent, conformément à l'appel paru dans le *Bulletin* n° 154.

MM. Bertrand (*Marseille, Thiers*), ancien membre du Comité,
Duval (*Dorian*),
Edde (*E.N. d'Auteuil*), ancien membre du Comité,
Favrelle (*Lille, Faidherbe*), ancien membre du Comité,
Mlle Félix (*La Fontaine*),
Mme Flamant-Parize (*Fénelon*),
MM. Itard (*Henri-IV*),
Maillard (*Charlemagne*),
Pochard (*Condorcet*), ancien membre du Comité,
Mlle Protin (*Jules-Ferry*), ancien membre du Comité,
MM. Rostolland (*Marcel-Roby*), ancien membre du Comité,
Siros (*Lakanal*),
Thovert (*Lyon, Ampère*),
Walusinski (*Voltaire*).

Mais ces indications ne limitent en aucune façon la liberté de vote des membres de l'Association. Toutefois, il n'y a pas lieu de voter pour les membres faisant actuellement partie du Comité (voir couverture, page 2), y compris les membres sortants non immédiatement rééligibles (art. 3 des Statuts) : Mlle Affre ; MM. Biguenet, Chazal, Girard, Guitton, Legrand.

---

## Election au Comité 1953. — Bulletin de vote

Prière, pour faciliter le dépouillement du scrutin, d'inscrire les six noms par ordre alphabétique.

1.
2.
3.
4.
5.
6.

## Feuillet de réponses aux questions posées

Détacher cette page et la déposer en séance après avoir répondu lisiblement aux différentes questions.

Les membres de l'Association qui ne pourraient assister à l'Assemblée sont invités à envoyer ce feuillet, **avant le 29 mars 1953,** au Président : M. MONJALLON, 23, boulevard St-Germain, Paris, 5$^{e}$, ou à le remettre à un délégué de leur choix, membre de l'Association. [Si le nom du délégué est laissé en blanc, il sera choisi par le Président]. Rayer l'alinéa *a*) pour donner au délégué le mandat impératif constitué par l'alinéa *b*).

*Nom et prénom :* ..........................................................

*Etablissement et fonction en 1952-53 :* ...............................

*prie M.* ......................................................................

de le (ou de la) représenter à l'Assemblée générale du 29 mars 1953, et

*a*) l'invite à voter à sa place, en s'inspirant des indications ci-après :

*b*) lui donne le mandat impératif de voter comme suit :

Dater et
signer
ci-contre :

## Questions posées aux membres de l'Association

(Voir fin du rapport de Mlle MASSON, pages 108 et 109 du présent *Bulletin*)