33e Année. — N° 158

Octobre 1953

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Publication trimestrielle

Administration : Musée Pédagogique, 29, rue d'Ulm, Paris (5e)

SOMMAIRE

PREMIÈRE PARTIE

DEUXIÈME PARTIE

Cotisations : 400 fr. **Abonnements : 800 fr.**

Expédition des Bulletins : 29, rue d'Ulm, Paris 5e

Abonnement d'un an au *Bulletin* (prix net) : France .... **800 fr.**

Prix d'un numéro du *Bulletin* ou d'un *Supplément* (prix net) : France. **200 fr.**

Les membres de l'Association (cotisation : 400 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés.*

Régler par chèque postal en utilisant l'adresse suivante :

Paris, Cc. 5708-21

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public

29, rue d'Ulm, Paris (5e)

Présidents d'Honneur

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

Président : M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris (5e).

Vice-Présidents : Mlle MASSON, 3, avenue de la Porte-de-Montrouge, Paris (14e).
M. BENOIST, Collège Diderot, 60, bd de La Villette, Paris (19e).
M. CAGNAC, 53, rue de Babylone, Paris (7e).
M. GIRAULT, 5, rue Isabey, Paris (16e).

Secrétaires : M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16e).
M. ROSTOLLAND, professeur au Lycée Marcel-Roby, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).

Trésorier : M. LEGRAND, 3 *bis*, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).

Comité :

Membres élus

Sortants en 1954 : Mlle BARBIER (*Victor-Duruy*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. GIRAULT (*J.-B. Say*) ; M. JACQUEMART (*Pasteur*) ; M. MINOIS (*Lakanal*) ; M. RUFF (*Voltaire*).

Sortants en 1955 : M. CAGNAC (*Louis-le-Grand*) ; M. DURRANDE (*St-Louis*) ; M. HUISMAN (*Montaigne*) ; M. MARVILLET (Strasbourg, *Kléber*) ; M. MONJALLON (*St-Louis*) ; M. SINGIER (*St-Louis*).

Sortants en 1956 : Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; M. BAY (*Condorcet*) ; M. CARALP (*Montaigne*) ; M. CROZES (*Henri-IV*) ; M. DELTHEIL (Fac. Sc. *Toulouse*) ; M. PÉTRUS (*Janson*).

Sortants en 1957 : M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; M. ITARD (*Henri-IV*) ; M. MAILLARD (*Charlemagne*) ; M. POCHARD (*Condorcet*) ; M. ROSTOLLAND (*Marcel-Roby*) M. THOVERT (Lyon, *Ampère*).

Membres de droit

Mme NICOUD (Lyon, *Marie-Vidalenc*) ; M. CANONGE (Castres) ; Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. POUX (Saint-Cloud).

Rapporteurs

Classes Nouvelles : Mlle MASSON ; *Enseignement moderne court :* M. GIRAULT ; *Enseignement technique :* M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. GIRAULT ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, M. MINOIS, Mlle PROTIN (S. Ex.) ; *Mathématiques Supérieures :* M. DURRANDE ; *Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques: Axiomatique et Redécouverte:* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales : M. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — *Concours général :* M. SINGIER ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (Besançon) ; *Dijon :* M. X... ; *Lille :* M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (Lyon, *Ampère*) : *Montpellier :* M. DUSSOL (Montpellier) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (Nancy, *Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULT (Rennes) ; *Strasbourg :* M. EHRHART (Strasbourg, *Kléber*) ; *Maroc :* M. QUEYSANNE (Casablanca, *Lyautey*) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (Tunis, *Carnot*).

33e Année — N° 158 Octobre 1953

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public

PREMIÈRE PARTIE

NOTE IMPORTANTE

Par suite d'une réorganisation du travail du Bureau de l'Association, les membres de l'A.P.M. sont priés de vouloir bien se conformer aux directives ci-dessous :

1° La correspondance concernant les questions relevant de l'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ou les questions PERSONNELLES doit être adressée au Président :

A. MONJALLON, 23, boulevard St-Germain, Paris, 5e, ODE. 55-44.

2° La correspondance concernant les questions ADMINISTRATIVES (adhésions, mutations, démissions, demandes de *Bulletins*, réclamations, etc...) doit être adressée à :

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES

29, rue d'Ulm, Paris, 5e

joindre un timbre pour la réponse, s.v.p.

3° La cotisation pour l'année scolaire (400 francs) est due dès le **1er octobre** de chaque année et doit être versée par virement postal uniquement au compte courant suivant :

PARIS, Cc. 5708-21

avec la même adresse qu'au 2°.

De nombreux collègues oublient de verser leur cotisation en temps opportun. Le service du Bulletin sera supprimé à partir du 1er janvier pour tous ceux qui ne seront pas en règle avec la Trésorerie au 31 décembre au plus tard de l'année en cours.

I. Activité de l'Association

Démarches du Président

Comme il est de tradition, nous avons demandé à M. le Directeur général de l'Enseignement du Second Degré une audience pour lui faire connaître les vœux de l'Assemblée générale de Pâques 1953.

M. Brunold, très occupé par les projets de Réforme, nous a prié de prendre contact avec son Directeur-adjoint, M. l'Inspecteur général Baïssas. Ce dernier nous a reçu le vendredi 5 juin, à 17 heures.

Au cours de cet entretien, il a d'abord été question de l'examen d'entrée en Sixième. Nous avons rappelé nos vœux antérieurs :

1° Rédaction en termes simples et connus des élèves des textes des problèmes proposés, afin que les candidats puissent comprendre exactement ce qui leur est demandé ;

2° Sujets imprimés, remis à chaque candidat, puis lus par les surveillants et non dictés, car il ne s'agit pas de transformer le début de cette épreuve en une seconde épreuve de français ;

3° Durée de l'épreuve portée à une heure, non compris la distribution et la lecture des textes.

Nous avons fait remarquer que l'épreuve de mathématiques était mal placée, car elle avait lieu en fin de matinée : c'est demander à des enfants de dix ans un effort supérieur à leurs moyens physiques. Nous avons conclu qu'il était nécessaire de déplacer cette épreuve et que son report à l'après-midi serait le meilleur moyen de pallier cet inconvénient. M. Baïssas nous a répondu que cette mesure entraînerait des difficultés matérielles et budgétaires, mais qu'elle sera examinée avec soin.

Puis nous avons entretenu M. le Directeur-adjoint des modifications souhaitées dans les programmes du Premier Cycle et dans la classe de Seconde.

M. Baïssas nous a répondu qu'il nous faudrait obtenir d'abord l'accord de l'Inspection générale et nous a prié de vouloir bien en discuter avec MM. les Inspecteurs généraux.

Enfin, abordant la question des horaires, nous avons sollicité l'octroi d'une demi-heure hebdomadaire dans chacune des classes, insistant sur l'utilité des travaux dirigés. M. le Directeur-adjoint est entièrement d'accord avec nous sur ce point, mais il y a toujours l'incidence budgétaire à envisager. Toutefois, quelques instructions précises pourraient être données pour la répartition judicieuse des heures déjà octroyées et M. Baïssas pense que ce serait là un premier moyen de voir notre demande recevoir satisfaction ; il nous promet de faire étudier la question.

M. le Directeur-adjoint nous ayant assuré que nos vœux seraient examinés avec la plus grande attention, nous l'avons quitté à 18 heures en le remerciant de son bienveillant accueil.

Premiers résultats. — Le Président signale, à la suite de ses interventions :

1° la promesse de textes imprimés pour les épreuves de Mathématiques au concours d'entrée en Sixième en 1954 ;

2° une circulaire adressée aux chefs d'établissements pour la répartition des heures de travaux dirigés et des Conseils de classe permettant un partage satisfaisant pour les mathématiciens.

Pour cette dernière, il prie les collègues qui auraient des difficultés concernant l'octroi d'une fraction importante à l'enseignement des Mathématiques dans leur établissement de le lui signaler.

Le Président : A. Monjallon.

II. Réunion du Comité

29 octobre 1953

Présents : Mlles Affre, Masson ; MM. Cagnac, Crozes, Favrelle, Girault, Itard, Monjallon, Pétrus, Pochard, Rostolland.

Excusés : Mlle Dionot ; MM. Durrande, Jacquemart, Thovert, Singier.

La séance est ouverte à 17 h. 45.

Examen d'entrée en Sixième. — Le Président rend compte de ses démarches auprès de la Direction générale de l'Enseignement du Second Degré pour l'amélioration des conditions de cet examen. Le régime actuel avec quatre heures consécutives de compositions écrites, se terminant par l'épreuve de Mathématiques, est un non-sens pour des enfants âgés de 10 à 11 ans. Il faudrait reporter à l'après-midi une partie des épreuves. De plus, les textes des problèmes proposés aux candidats devraient être imprimés. Sur ce dernier point, notre Président a obtenu une réponse favorable ; mais sur le premier, il s'est heurté à différentes objections : complication du service de surveillance, obligation pour les familles d'un repas hors du domicile. Il semble possible, après entente avec les administrations des centres d'examen, de pallier cet inconvénient. D'ailleurs la fin des épreuves ayant lieu actuellement vers 12 h. 30, les familles y sont pratiquement contraintes.

M. Monjallon lit une lettre de Mlle Dionot, qui expose clairement ces divers points et aboutit aux mêmes conclusions. Un rapport de Mlle Goukowsky (v. ce *Bulletin*) montre la faiblesse en calcul des élèves de Sixième venant de subir l'examen d'entrée. M. Pochard insiste sur la difficulté des sujets proposés : dans une de ses classes de Seconde, deux élèves seulement ont traité correctement l'un des derniers, en temps réduit il est vrai.

D'autres expériences du même genre sont signalées ; elles montrent qu'il ne faut pas trop demander à cet examen. Le principe d'une orientation continue, prévu dans la Réforme, semble souhaitable. Mlle Masson cite, à l'appui de cette thèse, une remarque de Mme Froment : les bonnes élèves en Sixième ne le sont plus nécessairement dans les classes postérieures.

Il faut en tout cas tirer le meilleur parti possible des conditions actuelles en nous efforçant de les améliorer. La « Voix des Parents », organe des Associations de parents d'élèves, a signalé la promesse de textes écrits pour 1954. Le Président se promet de suivre attentivement la réalisation de cette promesse et de s'occuper activement des autres vœux émis au sujet de cet examen.

Travaux dirigés. — Mlle Masson signale l'application satisfaisante, au Lycée Marie-Curie, de la circulaire relative à l'aménagement des heures de loisirs dirigés et des heures de conseils de classe. Elle a permis de dégager une importante fraction de service pour l'enseignement des Mathématiques.

Baccalauréat. — Le sujet unique proposé en Mathématiques, 2e partie, juin 1953, était, de l'avis unanime, mal posé et trop difficile. Le Président a donné quelques précisions sur son choix. Le Comité décide de faire une enquête sur les diverses épreuves de Mathématiques au Baccalauréat en 1953 (v. ce *Bulletin*, page 7).

Mlle Affre insiste vivement pour que les textes soient proposés par des professeurs, non seulement compétents, mais capables de les rédiger avec le plus grand soin, puis examinés par trois professeurs enseignant dans la classe correspondante et connus pour leur grande expérience. Ce choix pourrait être fait un an à l'avance : il importe que ce soit une œuvre de longue haleine et non pas un travail impromptu.

Réforme de l'Enseignement. — Les observations de l'A.P.M.E.P., faites en réunion de Comité le 23 avril 1953, ont été transmises par ses représentants au Conseil d'Enseignement du Second Degré. Mlle AFFRE, M. GIRAULT, signalent en outre l'intérêt porté par M. l'Inspecteur général ROBERT à l'enseignement de l'arithmétique. M. JACQUEMART avait signalé au Président le vœu de M. ROBERT, relatif à l'élaboration d'un programme d'arithmétique étalé sur les classes allant de la Sixième à la Seconde inclusivement.

Des précisions à ce sujet seront demandées à l'Inspection générale.

M. GIRAULT, qui vient d'assister à une réunion du Comité technique académique, signale l'importance des questions d'effectifs : 3.600 élèves de plus à Paris en Sixième à la rentrée de 1953.

Par contre, on fait observer le manque de professeurs ; certaines chaires de Mathématiques ne sont pas pourvues. Il n'y a aucun agrégé de Mathématiques au Lycée de Nîmes, deux seulement au Lycée Pasteur.

Publications de l'A.P.M. — M. CAGNAC demande la publication de certaines conférences ayant eu lieu sous l'égide de l'Association. Le Président annonce la parution prochaine de celles de M. CHOQUET, sur la géométrie. En outre, les rapports relatifs à l'Agrégation et au C.A.P.E.S. seront publiés dans les prochains *Bulletins*.

M. MONJALLON donne lecture d'une lettre de la librairie Vuibert faisant des offres très avantageuses pour les différentes *Annales* qu'elle publie : Baccalauréat, B.E.P.C., Ecoles Normales Primaires. Le Comité, considérant surtout le nombre réduit des sujets proposés pour le Baccalauréat et pour les Ecoles Normales Primaires, décide la publication de ceux-ci sous forme d'encartage dans les *Bulletins* à venir L'Association demandera à la librairie Vuibert la fourniture des *Annales du B.E.P.C.* qui seront envoyées à tous les membres en règle vis-à-vis de la Trésorerie.

M. POCHARD s'élève contre la parution tardive des textes de concours ; certains collègues, dit-il, auraient été heureux de pouvoir les étudier pendant les vacances. En outre, une publicité plus importante aurait pu y être faite.

Le Président rappelle la date de la fin des concours et celle de la fermeture des établissements scolaires en 1953. La collecte des sujets et la fabrication des *Bulletins* nécessitant au moins un délai de quinze jours, l'envoi des fascicules d'énoncés n'aurait eu lieu qu'après le départ en vacances. Le Président a, pour cette raison, préféré reporter l'envoi de ce fascicule à la rentrée de 1953, afin d'éviter la perte des nombreux fascicules qui n'auraient pas atteint leurs destinataires. M. CAGNAC, citant un incident personnel, approuve le Président.

Quant à la question de la publicité, tout en reconnaissant l'apport financier qu'elle représente, le Président fait remarquer que la situation de trésorerie de l'A.P.M.E.P. est excellente et permettra le maintien à 400 francs de la cotisation pour l'année 1953-54.

La séance est levée à 18 h. 30.

III. Commission de la Réforme

La Commission chargée d'étudier les programmes de Mathématiques dans la réforme projetée s'est réunie les 26 mai, 2 juin et 9 juin au Lycée Saint-Louis. Ont assisté aux séances de cette Commission : Mlles AFFRE, BARBIER, DIONOT ; Mme FROMENT ; Mlles MASSON, PROTIN ; MM. BAY, HUISMAN, JACQUEMART, MONJALLON, POCHARD.

Voici les procès-verbaux de ces séances.

Séance du 26 mai

La Commission s'est occupée dans cette séance du cycle d'orientation (classes de 6ᵉ et 5ᵉ). Elle demande que les horaires actuels de ces classes soient augmentés d'une heure de travaux dirigés, par demi-classe lorsque l'effectif dépasse 20 élèves. Elle insiste pour que des exercices de calcul écrits et oraux fréquents soient faits en liaison avec le programme de chacune de ces classes. Elle souhaite que parmi les travaux dirigés soient incluses certaines applications pratiques (dessin géométrique, usage de tables...) et que l'observation des phénomènes naturels soit conseillée par l'Inspection générale.

En raison des faits récents relatifs à l'examen d'entrée en Sixième, elle demande la création d'un programme limitatif dont le contenu soit le programme de la classe de Sixième.

La Commission demande enfin que, dans ces classes, aucun travail écrit à faire à la maison ne soit donné, sauf la préparation de quelques exercices simples, celle-ci n'ayant aucun caractère d'obligation.

Programmes proposés

Classe de Sixième

Pratique des opérations sur les nombres entiers et décimaux ; exercices écrits et oraux de calcul et problèmes simples portant sur ces opérations, en liaison avec la mesure des grandeurs et l'étude du système métrique. La notion de grandeurs directement ou inversement proportionnelles pourra être introduite, mais uniquement à l'occasion de problèmes concrets : elle ne devra donner lieu à aucun développement théorique.

Mesure des longueurs : formule du périmètre d'un cercle.

Mesure des surfaces : aire du rectangle, du carré, du triangle rectangle, du trapèze rectangle. Recherche de l'aire d'un polygone quelconque par décomposition en triangles rectangles et en trapèzes rectangles. Formule de l'aire d'un cercle.

Mesure des volumes et capacités : volume du parallélépipède rectangle, du cube, du prisme droit, du cylindre droit ; formules des volumes de la pyramide, du cône droit, de la sphère. Mesure des surfaces de solides simples.

Mesure de poids : poids spécifique.

Monnaies.

Mesure des angles et du temps : addition et soustraction de nombres complexes.

Mouvement uniforme : notion de vitesse.

Pourcentage, intérêt simple.

Dessin géométrique : usage de la règle, de l'équerre, du rapporteur, du compas et du tire-lignes.

Emploi des instruments usuels pour la mesure des longueurs, notion d'échelle.

Usage d'une table des carrés et des cubes des nombres entiers jusqu'à 100 pour la recherche d'une racine carrée ou cubique.

Classe de Cinquième

Programme actuel conservé, sauf le dernier alinéa, modifié comme suit :

Application des propriétés générales de l'égalité et des opérations sur les nombres entiers et fractionnaires à l'étude de problèmes concrets dont les données sont numériques et dont la résolution est facilitée par l'emploi d'une lettre pour désigner une inconnue (la notion d'*équation* ne fait pas partie du programme).

Dessin géométrique : tracés et constructions à l'aide des instruments usuels de figures illustrant le cours de géométrie.

Exercices écrits et oraux de calcul sur les nombres entiers, décimaux et fractionnaires.

Recherche méthodique des diviseurs et des multiples communs à deux ou plusieurs nombres en vue de leur application aux opérations sur les fractions.

Séance du 2 juin

La Commission demande que la mesure relative aux heures de travaux dirigés dans les classes de 6e et 5e soit étendue à l'ensemble du Premier Cycle.

Elle s'occupe alors des programmes des classes de 4e et 3e.

Les programmes actuels (1) peuvent être conservés à condition que les derniers alinéas des programmes d'algèbre soient modifiés comme suit :

Classe de Quatrième

Monômes : multiplications des monômes.

Problème de la division : quotient d'un monôme par un monôme.

Addition des monômes semblables. Soustraction des monômes semblables.

Polynômes : réduction des termes semblables. Addition et soustraction des polynômes. multiplication et division d'un polynôme par une constante.

Multiplication de deux polynômes. Identités remarquables.

Définition du problème de résolution d'une équation (signification du symbole =).

Equation du premier degré à une inconnue et à coefficients numériques.

Classe de Troisième

Polynômes : forme réduite. Addition et multiplication.

Décomposition de polynômes en produits de facteurs dans des cas simples à l'aide de mises en facteur et des identités remarquables ; en particulier transformation d'un trinôme du second degré à une variable et à coefficients numériques.

Fractions rationnelles : définition et condition d'existence.

Exercices de calcul portant sur des polynômes et des fractions rationnelles.

....

Définition du problème de résolution d'une inéquation (signification des symboles $>$ et $<$).

Equations et inéquations du premier degré à une inconnue et à coefficients numériques.

Interprétation graphique.

Séance du 9 juin

La Commission s'occupe des programmes des classes de Seconde et Première.

Le programme de la classe de Seconde terminale est adopté dans son ensemble.

En algèbre, il faut cependant préciser :

4° système à coefficients numériques.

En géométrie plane, on souhaite voir figurer :

Puissance d'un point par rapport à un cercle.

Valeurs approchées de $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ et $\cos x$ (x et $1 - \frac{x^2}{2}$) pour un petit angle exprimé en radians.

En géométrie dans l'espace, ajouter au préambule :

...sauf en ce qui concerne les définitions et les formules pouvant donner lieu à des applications simples.

Enfin en dessin géométrique : II. Exercices complémentaires supprimer : (outils...) et le paragraphe 4°.

(1) Cf. *Nouveaux horaires et programmes de l'Enseignement du Second Degré* (16e édition), Librairie Vuibert.

L'ensemble de ces propositions a été porté à la connaissance de l'Inspection générale au cours d'une réunion tenue au Ministère de l'Education Nationale le samedi 13 juin 1953.

L'Inspection générale de Mathématiques était représentée par MM. les Inspecteurs généraux Robert, Desforge, Dontot, Thiberge : l'Association des Professeurs de Mathématiques par M. Monjallon, Président ; Mlle Masson, Vice-Présidente ; Mlle Affre et M. Jacquemart, membres du Conseil d'Enseignement du Second Degré.

Après une discussion laborieuse de nos projets, l'Inspection générale nous a promis de tenir compte de nos desiderata lors d'une éventuelle rédaction nouvelle des programmes de Mathématiques.

IV. Enquête sur les épreuves de mathématiques au Baccalauréat 1re et 2e sessions en 1953

Le Bureau de l'A.P.M.E.P. désire recueillir tous les renseignements possibles concernant les épreuves de Mathématiques au Baccalauréat 1953 pour toutes les séries et pour les deux sessions.

Il serait en particulier heureux de connaître les réactions provoquées par l'instauration d'un sujet unique pour la France métropolitaine, les divers modes de cotation utilisés dans les différentes Académies, etc... Nous demandons à nos collègues de vouloir bien nous transmettre tous renseignements véridiques et contrôlés.

Adresser cette correspondance à A. Monjallon, Président de l'A.P.M.E.P., 23, boulevard Saint-Germain, Paris, 5e.

V, Documents officiels

Concours de l'Enseignement public en 1953

1. Agrégation des Sciences Mathématiques

MM.

1. Benzécri (E.N.S.).
2. Guichardet (E.N.S.).
3. Cartier (E.N.S.).
4. Capodanno.
5. Dehame (E.N.S.).
6. Daudé.
7. Rigal (E.N.S.).
8. Florent (E.N.S.).

8bis Haddad (E.N.S.).

9. Dencourt.
10. Lecaplain (St-Cloud).

» Mandelbrojt (Audit. E.N.S.).

12. Cuénat (E.N.S.).
13. Sarrazin.
14. Dablanc (E.N.S.).
15. Mordelet.
16. Fatz.
17. Bossus.
18. Kilisky (E.N.S.).
19. Buguet (St-Cloud).
20. Brignon.

» Tressens.

22. Hamon.
23. Bouzon (E.N.S.).
24. Faivre.
25. Doublet.

» Maisonneuve.

» Vissio.

28. Visticot (St-Cloud).
29. Deval.
30. Vauriot.

2. Agrégation féminine de Mathématiques

Mmes et Mlles

1. Poix (E.N.S.).
2. de Palacio (E.N.S.).
» Pedoussand (E.N.S.).
4. Weber (E.N.S.).
5. Guillou (E.N.S.).
6. Vadon.
7. Collange (Fontenay).
» Granger (E.N.S.).
9. Méder (Aud. E.N.S.).
10. Héno.
11. Goux.
12. Gautier.
13. Lambinet.
14. Mabilly.
15. André (E.N.S.).
» Besson.
17. Boussie.
18. Fraine (E.N.S.).
19. Bréneol (E.N.S.).
» Touyarot.
21. Lafforgue (E.N.S.).
» St-Val-Palmery (E.N.S.).

3. Proposés pour la dispense du C.A.P.E.S. (Nouveau Régime)

MM.

Bertin.
Maury.
Pouzet.

Mmes et Mlles

Fuzier.
Avril (Aud. E.N.S.).
Pelletier (Fontenay).
Philippon (Fontenay).
Pouget.

4. Proposé pour la dispense des épreuves théoriques du concours d'admission dans les C.P.R.

M. Bernard

5. C.A.P.E.S. (Ancien Régime)

Hommes

MM.

1. Eon.
2. Tressens.
3. Cierjon.
4. Legras.
5. Vico.
6. Vian.
7. Lemaitre.
8. Cormier.
9. Bausset.
» Trancart.
11. Savalle.
12. Meynadier.
13. Poulain.
14. Yéche.
15. Derubay.
16. Mazel.
17. Ertel.
18. Touchefeu.
19. Fossat.
20. Kocher.
21. Marchand.
22. Dieumegard.
23. Durand.

Femmes

Mmes et Mlles

1. Munier.
2. Bonnaud.
3. Pollet.
4. Desouches.
5. Duveaux.
6. Lelong.
7. Chapron.
8. Auneau.
9. Barre.
10. Regaudie.
11. Lasalle.
12. Verhague.
13. Chivot.
14. Jeanmot.
15. Souriau.
16. Hutan.
17. Buirette.
18. Perrin.

Dispensés des épreuves théoriques

MM.

Chadeyras.
François.

6. C.A.P.E.S. (Nouveau Régime)

Admis

MM.

Hauchard.
Pierson.
Cohen.
Desouches.
Guizonnier.
Hamon.
Lecaplain.
Le Clerc de la Hervérie.
Mathis.
Meurisse.
Nicol.
Petitgas.
Robert.

MM.

Rouquayrol.
Uzan.
Vernay.
Wattiaux.
Audirac.
Bourdon.
Carboulec.
Charvet.
Dromsom.
Gandil.
Goby.
Jacquet.
Kermorgant.

MM.

Mordelet.
Pinson.
Revellat R.
Bastié.
Bouchenot.
Buguet.
Dejonche.
Eysseric.
Pasquet.
Périé.
Revellat L.

Admises

Mmes et Mlles

Barraud.
Bonnetain.
Galmiche.
Granger.
Manière.
Mélis.
Pirmann.
Réou-Bisque.
Verdelhan.
Bonnetain-Serieys.
Chevant.
Cordon-Dessault.

Mmes et Mlles

Godart.
Guignard.
Jammes.
Jeandidier-Masson.
Lefort.
Levadoux.
Lhotte.
Litaudon.
Mette.
Nozeran-Besson.
Thoreau-Blanchard.
Fortrat-Dauvergne.

Mmes et Mlles

Vors-Martin.
Bourin-Duron.
Decoop.
Garagnon.
Lheureux.
Pasquet.
Sol.
Boinet.
Cadet.
Kormann.
Lamy.

Erratum

concernant le *Bulletin* n° 157 (septembre 1953), page 165 : seconde composition de Mathématiques du Concours d'entrée dans les Centres pédagogiques régionaux :

Les formules de récurrence (F) doivent être remplacées par les suivantes :

$$(F) \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n, \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n, \end{cases}$$

DEUXIÈME PARTIE

Les Relations d'ordre et d'équivalence
Leurs applications en Géométrie Elémentaire

Conférence de Gustave Choquet, *recueillie et rédigée par* Mlle Lucienne Félix

Dans les mathématiques modernes, le rôle des *structures* apparaît comme de plus en plus important. On les reconnaît, même quand elles n'ont pas été explicitées :

lorsqu'on aperçoit, après coup, des ressemblances entre des démonstrations portant sur des objets différents, ce qu'elles ont en commun, c'est une même structure sous-jacente.

La structure la plus simple que nous percevions, la plus tangible, semble être la structure d'ordre. C'est elle que nous allons étudier tout d'abord. La notion d'*équivalence*, que nous examinerons ensuite, est plus délicate ; elle exige plus de précision dans sa vérification, sinon, de proche en proche, l'équivalence finit par disparaître et le caractère de transitivité, qui est essentiel, n'est plus assuré.

I. Préliminaires. — Relations binaires

Considérons un ensemble E d'êtres mathématiques. Pour utiliser une représentation commode, nous les figurerons dans nos schémas comme des points d'un ensemble plan, par exemple, d'un segment. Nous allons définir une relation binaire sur cet ensemble E.

Par exemple, prenons pour E l'ensemble des points d'un segment de la droite réelle. Soient a et b deux points de cet ensemble, distincts ou non. Convenons de dire : « a est avant b » si l'abscisse de a est inférieure à celle de b, au sens strict, par exemple, qui exclut l'égalité. Nous venons de définir une relation binaire dans l'ensemble, car, étant donnés deux points, l'affirmation « a est avant b » est vérifiée ou ne l'est pas.

D'une façon générale, *une relation binaire sur* E *est une fonction définie sur l'ensemble des couples ordonnés de points de* E, *qui prend la valeur « vrai » ou la valeur « faux »*.

Convenons de ne retenir que les couples qui correspondent à la valeur « vrai ». Nous pourrons dire alors :

Une relation binaire sur E *est une partie de l'ensemble de tous les couples ordonnés de points de* E.

Etant donné un ensemble E, l'ensemble de tous les couples ordonnés d'éléments distincts ou non de E, constitue un nouvel ensemble que l'on nomme l'*ensemble produit* $E \times E$. Nous dirons donc :

Une relation binaire R *sur* E *est un sous-ensemble de l'ensemble produit* $E \times E$

$$R \subset E \times E.$$

Si E est représenté par les points d'un segment de droite, de longueur l par exemple, l'ensemble produit $E \times E$ est représenté par les points du carré de côté l, le premier élément du couple ordonné étant l'abscisse et le second étant l'ordonnée. La relation binaire sera donc représentée par un sous-ensemble R du carré.

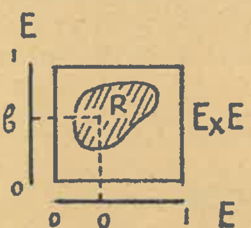

fig1

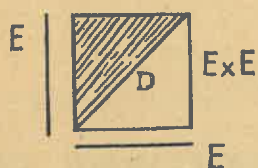

fig2

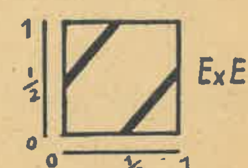

fig3

Par exemple, la relation déjà citée « a avant b » sera représentée par le triangle haché (diagonale exclue si l'inégalité est prise au sens strict).

La relation « (a, b) est vrai si la distance de a à b est égale à $1/2$ », équivalente pour les points du segment E à l'égalité $|a - b| = \frac{1}{2}$ sera représentée par la *réunion* de deux segments, c'est-à-dire par l'ensemble des points qui sont sur l'un ou l'autre de ces segments.

Les relations binaires intéressantes sont celles qui satisfont à certaines lois simples.

II. Relations d'ordre

Le premier des exemples donnés précédemment (représenté fig. 2) est une relation d'ordre sur le segment (0,1). Elle est notée $a \leqslant b$ si l'on considère l'inégalité large.

Nous allons définir la relation d'ordre sur un ensemble E quelconque, inorganisé, et que, précisément, nous allons organiser en construisant une relation d'ordre dans $E \times E$.

Nous utiliserons pour représenter la relation en question, la notation $a \mathrel{\mathbf{3}} b$, lue « a avant b ». (Elle correspondra, sur la droite réelle, à l'inégalité $a \leqslant b$, et non à l'inégalité stricte).

Cette relation est dite *relation d'ordre* si elle satisfait aux conditions suivantes, $a, b, c\ldots$ étant des éléments distincts ou non de E :

Condition 1 : Quel que soit a, $a \mathrel{\mathbf{3}} a$.

Condition 2 : Quels que soient a et b, $a \mathrel{\mathbf{3}} b$ et $b \mathrel{\mathbf{3}} a$ ne sont possibles simultanément que si a et b sont identiques.

Condition 3 : Si l'on a simultanément $a \mathrel{\mathbf{3}} b$ et $b \mathrel{\mathbf{3}} c$, on a aussi $a \mathrel{\mathbf{3}} c$. Ce qui s'écrit : $a \mathrel{\mathbf{3}} b$ et $b \mathrel{\mathbf{3}} c \longrightarrow a \mathrel{\mathbf{3}} c$ (transitivité).

Voici un exemple important de relation d'ordre, qui contient, en un certain sens, tous les autres :

Soit A un ensemble abstrait quelconque et E l'ensemble des parties de A, c'est-à-dire, l'ensemble des sous-ensembles de A. (Par exemple, si A est un ensemble fini de n points, E contient 2^n éléments, y compris l'élément « vide »).

Soient donc a et b deux éléments de E (donc deux parties de A). Par définition $a \mathrel{\mathbf{3}} b$ si $a \subset b$; c'est-à-dire, $a \mathrel{\mathbf{3}} b$ si tout élément de A contenu dans a est contenu dans b.

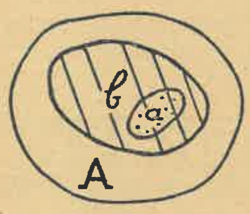

fig 4

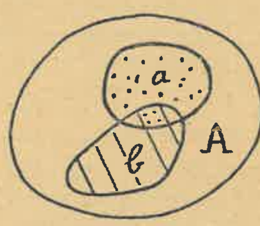

fig 5

On vérifie immédiatement que les trois conditions précédentes sont bien satisfaites par cette relation.

Il faut noter que, a et b étant deux parties quelconques de A, il se peut que l'on n'ait ni $a \mathrel{\mathbf{3}} b$, ni $b \mathrel{\mathbf{3}} a$, ni $a = b$. C'est dire que deux éléments, a et b de E, ne sont pas toujours comparables par la relation d'ordre considérée.

Une relation d'ordre est dite *relation d'ordre total* si elle vérifie une condition supplémentaire.

Condition 4 : Deux éléments quelconques de E sont comparables. C'est-à-dire que, a et b étant deux éléments quelconques, on a, ou bien $a \mathrel{\mathbf{3}} b$, ou bien $b \mathrel{\mathbf{3}} a$, ou les deux si a et b sont identiques.

La plupart des relations d'ordre que l'on rencontre dans les mathématiques modernes ne sont pas des relations d'ordre total.

Parmi les questions qui nécessitent l'emploi de la notion d'ordre, citons la définition de la droite orientée. Il y figure en effet cette condition : une droite orientée est un ensemble totalement ordonné (muni en outre d'autres structures que l'on définit ensuite).

Comparaison d'ensembles ordonnés. — Deux ensembles ordonnés, et même totalement ordonnés, ne sont pas nécessairement « semblables ». Suivant les exemples construits, on peut ou non affirmer, par exemple, qu'entre deux points a et b de l'ensemble, il existe toujours au moins un point de l'ensemble. Ainsi, deux ensembles ordonnés peuvent être de *formes* différentes. La considération des ensembles de même forme conduit à la *définition d'une fonction croissante :*

Soient deux ensembles totalement ordonnés X et Y. Si, à tout élément x de X est associé un élément y de Y, nous dirons que la fonction $y = f(x)$, définie sur X, est croissante, si $x_1 \mathbf{3} x_2$ (au sens de la relation d'ordre sur X) entraîne $y_1 \mathbf{3} y_2$ (au sens de la relation d'ordre sur Y).

La correspondance entre x et $f(x)$ est plus satisfaisante encore si la *fonction f est biunivoque,* c'est-à-dire si à deux éléments x_1 et x_2 distincts sont associés des éléments y_1 et y_2 distincts et inversement.

Mais il n'est pas encore certain que tout y de Y provienne d'un x de X. Si, de plus, cette dernière condition est réalisée, on dit que la fonction f est un *isomorphisme,* et que les ensembles X et Y ainsi ordonnés sont *isomorphes* ou *semblables.*

Exemples de géométrie élémentaire. — *Exemple 1 :* Soit la droite réelle Δ d'un plan Π, et soit O la projection sur Δ d'un point A de Π pris hors de Δ. Si Δ_1 désigne l'une des demi-droites de Δ d'origine O, soit M un point quelconque de Δ_1. Si $x = |OM|$ et $y = |AM|$ (la notation $|AB|$ désignant toujours la distance entre A et B), la fonction $y = f(x)$ est croissante et biunivoque : c'est là un énoncé commode d'un théorème classique. Mais il est bon de faire remarquer que cet énoncé n'affirme pas que f soit un isomorphisme de Δ_1 sur l'ensemble des longueurs $\geqslant |OA|$. Une réponse affirmative résulterait par exemple de l'axiome de continuité.

Exemple 2 : Soit une circonférence de centre O et P un point intérieur au cercle ; la perpendiculaire en P à OP coupe la circonférence en A et B. $|OA|$ est fonction décroissante de $|OP|$; l'arc AB est fonction croissante de $|AB|$ (si l'on se limite aux arcs inférieurs à une demi-circonférence), etc...

Exemple 3 : Tout le chapitre relatif aux inégalités entre périmètres de lignes polygonales nous fournit des exemples. Le plus important, quand on a défini l'opération « somme de deux longueurs », est relatif à trois points quelconques A, B, C. C'est l'inégalité $|AC| \leqslant |AB| + |BC|$.

Un autre énoncé très important, qui utilise la notion de convexité, est le suivant : toute ligne polygonale fermée est plus longue qu'une ligne polygonale convexe qui lui est intérieure. Les relations d'ordre qu'on en déduit permettent d'abréger l'exposé sur la longueur de la circonférence.

Exemple 4 : Notion d'ensemble convexe. (Nous avons tenu à indiquer la notion de convexité comme application de la notion d'ordre, d'une part parce qu'effectivement la définition de $[ab]$ utilise la relation d'ordre, d'autre part pour insister sur l'intérêt qu'il y aurait à ne pas se limiter, en géométrie élémentaire, à l'étude de droites entières, de cercles entiers, etc... On a trop souvent tendance à oublier la structure d'ordre de la droite et de l'espace).

Sur une droite Δ, désignons par *intervalle fermé* $[ab]$ l'ensemble des points entre a et b, les points a et b compris. Nous dirons qu'un sous-ensemble E du plan ou de l'espace est convexe si, chaque fois que a et b sont dans E, tout point de $[ab]$ est dans E.

Il est clair que l'intersection (ou partie commune) d'une famille d'ensembles convexes est convexe. On démontre que, réciproquement, tout ensemble convexe, ouvert ou fermé, peut être défini comme intersection d'une famille d'ensembles convexes très simples, à savoir, pour le plan, les demi-plans.

Par exemple, comment définir l'*intérieur d'un triangle ?* Nous nommons triangle tout ensemble de trois points. (Il est plus simple de définir un *ensemble* qu'une *figure,* car une figure, plane par exemple, est, non pas un ensemble de points du plan, mais un ensemble de sous-ensembles du plan : par exemple, l'ensemble des trois sommets d'un triangle, des trois droites définies par ces sommets, des hauteurs, des médianes est une figure).

Un triangle étant donné, son intérieur sera défini par l'intersection de trois ensembles convexes, les plus simples que l'on définisse après le plan lui-même : les trois demi-plans déterminés chacun par deux des sommets et contenant le troisième sommet (frontières comprises ou non). Cette intersection de trois ensembles convexes est convexe.

On définit aussi, par exemple, l'intérieur d'un cercle et on montre qu'il est convexe.

III. Relations d'équivalence

Ce sont encore des relations binaires sur l'ensemble des couples ordonnés d'un ensemble E. Nous les noterons $\backsim$. Elles sont caractérisées par les conditions suivantes :

Condition 1 : Pour tout a de E, $a \backsim a$ (réflexivité).

Condition 2 : $a \backsim b$ entraîne $b \backsim a$ (symétrie).

Condition 3 : $a \backsim b$ et $b \backsim c$ entraîne $a \backsim c$ (transitivité).

On voit que c'est la condition 2 qui distingue la relation d'équivalence de la relation d'ordre.

Traduisons ces conditions par le schéma déjà utilisé, E étant encore le segment $(0,1)$. Dans $E \times E$:

1) L'ensemble R contient la diagonale D.

2) L'ensemble R est symétrique par rapport à D. (C'est-à-dire, que si (a, b) appartient à R, ce qu'on écrit $(a, b) \in$ R, on a aussi $(b, a) \in$ R.

3) Soit un point $(a, b) \in$ R et un point $(b, c) \in$ R. A ces deux points correspond le point (b, b) de la diagonale D. La condition 3 exprime que le point (a, c), c'est-à-dire, le quatrième sommet du rectangle construit sur les trois points marqués,

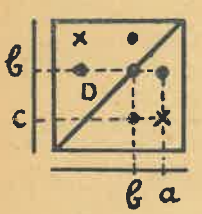

fig 6

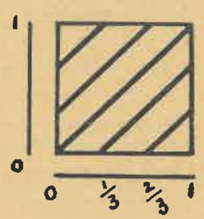

fig 7

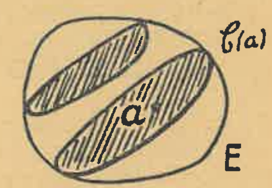

fig 8

est aussi dans R. Donc, *si* R *contient deux points qui soient sommets opposés d'un rectangle dont un troisième sommet est sur la diagonale* D, *le quatrième sommet de ce rectangle appartient aussi à* R.

Exemple : La relation $|b - a| = \delta$, δ étant donné, est représentée, comme nous l'avons vu, par deux segments de droite, si a et b sont deux points du segment $(0,1)$; ce n'est pas une relation d'équivalence. Par contre, la relation « $a \backsim b$ si $|b - a|$ est multiple de $\frac{1}{3}$ » est une relation d'équivalence.

Classes d'équivalence. — Soit R une relation d'équivalence définie sur un ensemble E. Pour tout $a \in$ E, soit $\mathcal{C}(a)$ l'ensemble des éléments a' équivalents à a. D'après la condition 1, a est dans $\mathcal{C}(a)$.

Soit ensuite a' un élément équivalent à a. Comparons $\mathcal{C}(a')$ et $\mathcal{C}(a)$. Par définition de $\mathcal{C}(a)$, a' appartient à $\mathcal{C}(a)$. Mais d'après la condition 2, a est équivalent à a', donc a appartient à $\mathcal{C}(a')$. Enfin, d'après la condition 3, tout a'' de $\mathcal{C}(a)$ appartient aussi à $\mathcal{C}(a')$. Donc $\mathcal{C}(a)$ et $\mathcal{C}(a')$ sont confondus.

Si, au contraire, a' n'est pas équivalent à a, $\mathcal{C}(a')$ et $\mathcal{C}(a)$ sont disjoints, c'est-à-dire n'ont aucun élément commun.

$\mathcal{C}(a)$ s'appelle la *classe d'équivalence de l'élément a*. Donc, les *classes d'équivalence de deux éléments sont confondues ou disjointes suivant que ces éléments sont équivalents ou non.*

C'est dire qu'une relation d'équivalence définie dans un espace détermine une fibration de cet espace en ensembles disjoints deux à deux. Si la relation est définie sur E, tout point de E appartient à une classe et une seule. Les classes constituent donc une partition de l'espace.

Inversement, si une partition de E en fibres est donnée, et si nous considérons comme en relation deux points a et b de la même fibre, cette relation est une relation d'équivalence, et les classes d'équivalence qui lui correspondent constituent une partition de E identique à la partition initiale. Donc, se donner une relation d'équivalence sur E équivaut à se donner une partition de E en fibres.

Exemples pris dans la géométrie élémentaire. — Théorie des longueurs, égalité des figures, orientation, grandeur d'une aire, vecteurs libres, vecteurs glissants, etc...

Indiquons sommairement comment on peut construire le plan par la relation d'isométrie. (Ceci sera détaillé dans les exposés ultérieurs).

1. Imaginons le premier géomètre voulant construire une axiomatique du plan. Il dispose d'une tige rigide, de forme quelconque, qui va lui servir de transporteur de distances. Sa tige lui permet de découvrir la relation : « Egalité des distances entre deux couples de points. » Et l'expérience lui montre que c'est une relation d'équivalence.

Il donne ensuite un nom aux classes d'équivalence associées. Chaque classe sera une *distance*, notée $|ab|$ pour la classe contenant le couple (a, b) de points du plan.

2. Cette notion est utilisée pour définir ensuite *l'égalité de deux ensembles de points :* deux ensembles A et B de points du plan sont dits égaux si, entre eux, existe une correspondance biunivoque qui conserve les distances. C'est donc une relation entre parties A et B de E. Ces parties forment un ensemble C sur lequel est ainsi définie une relation binaire qui est une équivalence. Cette relation se nomme *isométrie*.

Il faut alors nommer les classes d'équivalence déterminées par la relation d'isométrie. Chaque classe est nommée « *forme et dimension* » de la figure A.

3. On obtient l'*orientation* en ajoutant un peu plus :

E étant toujours le plan, on peut distinguer, parmi les isométries du plan sur lui-même, les « *symétries par rapport à une droite* », qui sont définies au moyen des distances. On démontre que toute isométrie est le produit de 0, 1, 2 ou 3 symétries. En outre, le produit de n symétries est une isométrie.

Deux isométries I_1 et I_2 sont alors dites équivalentes, $I_1 \backsim I_2$, si le produit $I_1 \times I_2$ est une isométrie produit d'un nombre pair de symétries. Il est immédiat que cette condition définit bien une relation d'équivalence. Et on montre qu'il y a deux classes d'équivalence : on les nomme « *orientation* ». On désigne par *orientation directe* celle des deux classes qui contient l'*identité*.

4. Soit φ une isométrie définie entre deux sous-ensembles A et B du plan E. On démontre qu'on peut prolonger cette isométrie à tout le plan. Si φ possède un prolongement qui soit direct (resp. inverse), φ est dite directe (resp. inverse). Il faut noter qu'une isométrie φ entre deux ensembles plans est à la fois directe et inverse dans le cas (et c'est le seul) où les ensembles A et B sont linéaires.

Conclusions. — Dans toute étude de géométrie, la prise de conscience des structures conduit à des énoncés meilleurs, à une compréhension plus profonde.

La relation d'ordre, qui semble plus primitive que la notion d'équivalence, est aussi plus dynamique. Par exemple, au lieu du troisième cas d'égalité des triangles complété par des énoncés d'inégalité, on dira, avec les notations classiques : « On a $c = f(a, b, C)$ et pour a et b constants, f est une fonction strictement croissante de C (avec $0 \leqslant C \leqslant \Pi$). »

Dans tout triangle, au lieu de comparer deux côtés et les angles opposés, on énoncera le vrai théorème : « La relation d'ordre entre les angles d'un triangle est la même qu'entre les côtés opposés. »

De même, en mettant en évidence les relations d'équivalence, on rend les définitions et théorèmes plus clairs et plus puissants. Par exemple, l'énoncé usuel : « Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles », signifie : « La relation de parallélisme (au sens large) est une relation d'équivalence. » La classe d'équivalence correspondante contenant une droite Δ s'appelle *direction de* Δ.

Un vecteur étant défini comme couple ordonné de deux points, un vecteur libre est une classe d'équivalence dans l'ensemble des vecteurs. Une équivalence plus faible définira, comme classe d'équivalence, les vecteurs glissants, etc...

L'adaptation de ces définitions et surtout de cette façon de penser n'a pas nécessairement pour conséquence une formalisation abstraite de la géométrie inassimilable par l'élève. Il suffira, pour éviter cet écueil, d'adapter à chaque niveau la matière et la forme, comme sait le faire tout bon pédagogue.

L'essentiel est que le professeur sache où il va, qu'il connaisse la raison du choix des définitions et des énoncés de théorèmes. S'il a une vision claire du but à atteindre, tout en enseignant en apparence les mêmes choses, il ne mettra plus l'accent à la même place. Là où il ne voyait qu'une mosaïque de théorèmes un peu disparate et sans grande nécessité interne, il verra maintenant le développement nécessaire et harmonieux d'une ou plusieurs structures, soit isolées, soit au contraire étroitement mêlées.

Une Géométrie basée sur les notions de Distance et de Retournement

PREMIERE PARTIE : INITIATION

Conférence de M. Gustave CHOQUET, *recueillie et rédigée par* Mlle Lucienne FÉLIX

Préliminaires

On doit enseigner la géométrie élémentaire dans les lycées : ceci est un postulat que nous admettrons ! Mais de quelle façon ? Il faut choisir les définitions. Surtout, il faut choisir les premiers énoncés que nous devrons admettre : c'est-à-dire les axiomes. Suivant le choix de ces axiomes, on construira une géométrie ou une autre.

HILBERT fut le premier à donner un fondement rigoureux à la géométrie. Rappelons seulement que les axiomes qu'il met à la base de la géométrie sont répartis en plusieurs groupes :

1. *Axiomes d'association :* par exemple : par deux points passe une droite et une seule.
2. *Axiomes d'ordre :* par exemple : ordination des points d'une droite.
3. *Axiomes de congruence :* d'une part, relation d'équivalence entre couples de points, c'est-à-dire entre segments de droites ; d'autre part, congruence concernant les angles.
4. *Axiome des parallèles* (ou postulatum d'Euclide).
5. *Axiomes de continuité :* par exemple : l'axiome d'Archimède. On peut développer la géométrie très loin sans ce cinquième groupe d'axiomes, de sorte que l'on peut provisoirement ne pas s'en occuper.

En examinant les énoncés de ces axiomes, nous remarquons que certains ne sont pas très simples, tel l'axiome de Pasch dans les axiomes d'ordre, tandis que le théorème suivant qui s'en déduit : « Une droite divise le plan en deux régions telles que tout segment qui joint deux points situés dans des régions différentes coupe la droite » a un énoncé plus intuitif.

De plus, il y a un mélange entre les équivalences relatives aux longueurs et les équivalences relatives aux angles, ce qui crée une dualité compliquée. Il en résulte, par exemple, que l'on prend comme axiome : « Deux triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, comprenant un angle égal, ont leurs autres angles égaux chacun à chacun », et ensuite, on démontre que les troisièmes côtés sont aussi égaux. N'était-ce pas tout aussi intuitif ?

Concluons qu'il est difficile, comme les essais l'ont prouvé, d'adapter cet exposé à l'enseignement élémentaire.

Une autre présentation peut être proposée.

Supposons définie et étudiée la *droite réelle*, c'est-à-dire l'ensemble des nombres rationnels complétés par les irrationnels. *Le plan* est alors défini comme l'ensemble des couples ordonnés (x, y) de deux nombres réels. *Une droite* est définie comme l'ensemble des points (x, y) satisfaisant à une équation $ax + by + c = 0$, a et b n'étant pas nuls tous deux.

A partir de là, on construit très vite la géométrie de la droite. Puis on introduit *une distance* d en posant par définition $d^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$, pour les deux points (x, y) et (x', y').

Enfin *l'orientation* s'introduit par le signe du déterminant associé à un couple de vecteurs.

L'avantage de cette méthode est que, au moyen seulement des quatre opérations de l'algèbre, on obtient très vite de nombreux résultats. Surtout cet exposé se généralise immédiatement à l'espace à 3, puis n dimensions, puis à l'espace complexe, puis à l'espace projectif, réel ou complexe.

Mais est-ce un exposé que l'on peut adapter à l'enseignement élémentaire ? On part du théorème de Pythagore, clef de la géométrie métrique, que l'on pose comme axiome. Or, ce théorème n'est pas intuitif ; on ne le rencontre pas au cours de manipulations simples faites avec une règle et une feuille de papier ! Cet exposé doit être réservé à un stade plus avancé de l'enseignement (Mathématiques Spéciales ou Mathématiques Supérieures), au moment où l'on veut faire une synthèse et montrer en particulier la non-contradiction de la géométrie.

Ces remarques conduisent à chercher une base axiomatique qui satisfasse les exigences intuitives et qui, cependant, permette d'obtenir assez rapidement des résultats substantiels.

Quelle va être l'attitude de celui qui cherche les énoncés des axiomes de base ? La géométrie qu'il va créer dépend des instruments dont il dispose et des réalisations concrètes de la droite et du plan qui auront préalablement servi de support à son intuition. C'est ainsi que l'on pourrait se borner au *compas à pointes sèches*, c'est-à-dire au *transporteur de distances*. Il définit *l'égalité des distances* de deux couples (relation d'équivalence). Il permet également de définir *l'inégalité :* on dira que ab est plus petit que $a'b'$ si pour tout triangle abc tel que $ab = ac$, il existe un triangle $a'b'c'$ tel que $a'b' = a'c'$ et $b'c' = bc$.

Mais cette géométrie aura des énoncés et des axiomes assez compliqués et peu naturels, et ceci tient à ce que nous n'avons permis au départ que l'usage d'un instrument unique.

Nous allons permettre, outre le compas à pointes sèches, l'usage du pliage. C'est-à-dire que le plan sera considéré comme une feuille de papier indéfinie que l'on peut plier sur elle-même autour d'une de ses droites. Le système d'axiomes que nous serons conduits à poser permettra d'arriver assez vite à des énoncés importants.

Dans l'exposé qui suit, nous allons dissocier l'étude de la droite de celle du plan. Cette dissociation nous semble importante, autant du point de vue logique que du point de vue pédagogique.

Exposé des axiomes

I. La droite orientée.

(Il est plus simple de définir la droite orientée que la droite ordinaire, car cela évitera l'introduction de la relation « entre » qui est une relation ternaire).

La droite orientée est un ensemble Δ de points tel que :

1. Il existe sur Δ une relation d'ordre total.

2. Il existe sur l'ensemble des couples (ab), de points de Δ, une relation d'équivalence.

3. Ces deux relations sont reliées par certaines propriétés.

1. *Relation d'ordre total.* — Elle sera notée $<$ (ordre strict).

a) Quels que soient les deux points a et b de Δ, on a nécessairement une et une seule des éventualités $a < b$, $b < a$, $a = b$.

b) La relation est transitive : $a < b$ et $b < c$ entraîne $a < c$. L'ensemble est ainsi totalement ordonné.

2. *Relation d'équivalence* dans l'ensemble des couples de points de Δ.

Soit un couple ordonné, noté (a, b). La relation sera notée $\backsim$.

a) $(a, b) \backsim (a, b)$ (réflexivité).

b) $(a, b) \backsim (a', b')$ entraîne $(a', b') \backsim (a, b)$ (symétrie).

c) $(a, b) \backsim (a', b')$, et $(a', b') \backsim (a'', b'')$ entraîne $(a, b) \backsim (a'', b'')$ (transitivité).

Nous y joignons :

d) $(a, b) \backsim (b, a)$.

3. *Axiomes reliant les deux structures.* — *a*) Les hypothèses

$$\begin{cases} a < b < c, \quad a' < b' < c', \\ (a, b) \backsim (a', b') \quad \text{et} \quad (b, c) \backsim (b', c'), \end{cases}$$

entraînent $(a, c) \backsim (a', c')$.

b) *Possibilité de glissement de la droite sur elle-même :* Etant donnés trois points a, b, c sur Δ, il existe deux points d et d', l'un avant, l'autre après c, tels que $(c, d) \backsim (c, d') \backsim (a, b)$. Tout ensemble ayant ces propriétés sera appelé *une droite*.

Remarque : Des exemples nous montrent que l'ensemble ainsi caractérisé peut ne pas être isomorphe à une droite ordinaire : ainsi l'ensemble des entiers ordinaires (les deux relations d'ordre et d'équivalence ayant leur sens habituel) satisfait bien à tous les axiomes.

Donnons un exemple tout différent : chaque « *point* » sera un polynôme du premier degré $u + vx$. L'ensemble de ces points, quand u et v sont par exemple des nombres entiers algébriques quelconques, constitue « *la droite* ». Nous prendrons comme relation d'ordre : $u + vx < u' + v'x$, si $u < u'$, ou bien $u = u'$ avec $v < v'$, c'est-à-dire, si $[u - u' + (v - v')x]$ est positif pour x très petit positif.

Nous prendrons comme relation d'équivalence entre deux points :

$$[(u + vx), (u' + v'x)] \backsim [(U + Vx), (U' + V'x)]$$

si

$$\begin{cases} u - u' = \varepsilon (U - U') \\ v - v' = \varepsilon (V - V') \end{cases} \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1.$$

On vérifie qu'alors tous les axiomes sont satisfaits. (Il n'est naturellement pas question de faire allusion à cet exemple dans l'enseignement élémentaire !).

Définition de la longueur d'un segment. — 1. *La longueur* du segment $[ab]$ est la classe d'équivalence à laquelle appartient le couple (ab) ; on la notera par $|ab|$.

2. La structure d'ordre ayant permis de définir la droite orientée, permet de définir la relation $|ab| < |a'b'|$. Celle-ci sera satisfaite lorsque, portant le point b'' du côté de a' où est b', avec $(a, b) \backsim (a', b')$, b'' est sur l'intervalle ouvert $]a' b'[$.

3. Nous définissons *la somme* de deux longueurs, grâce aux axiomes de glissement, et démontrons que cette opération est commutative $\delta_1 + \delta_2 = \delta_2 + \delta_1$. Puis nous démontrons que la somme est associative, ce qui revient à montrer l'égalité

$$\delta_1 + (\delta_2 + \delta_3) = (\delta_1 + \delta_2) + \delta_3.$$

4. Enfin, pour introduire la *soustraction*, nous démontrons que $\delta_1 + \delta = \delta_1 + \delta'$ entraîne $\delta = \delta'$.

La droite comme groupe additif ordonné. — Il suffit de prendre *une origine* quelconque sur la droite, et de définir $a + b$ et $-a$, pour tous les points. On vérifie bien que l'ensemble est alors muni d'une structure de groupe commutatif par rapport à cette addition. On montre que cette addition est compatible avec l'ordre, c'est-à-dire que si $a < b$, on a $c + a < c + b$ pour tout c.

Remarquons que nous ne pouvons naturellement pas parler de multiplication ni de division : les exemples donnés le montrent bien ! Par contre, le développement de la géométrie plane permettra de montrer que toute droite *d'un plan* possède une structure de corps totalement ordonné.

Il faut aussi noter que nous n'avons pas supposé qu'il existe toujours au moins un point entre deux points donnés, par exemple un milieu. Ceci est inutile, car cette existence du milieu sera démontrée comme conséquence de la définition d'un plan associé à la droite.

II. Etude du plan.

A partir de l'expérience du pliage, on est amené à dégager certains axiomes que nous allons énoncer.

Nous dirons qu'un ensemble Π est un *plan associé à une droite* Δ s'il satisfait aux conditions suivantes :

Le plan est un ensemble de points que l'on peut mesurer avec cette droite. Cela signifie qu'à tout couple (ab) de points correspond une longueur (prise dans l'ensemble des longueurs des segments de Δ) que nous noterons encore $|ab|$. Nous supposerons que, quels que soient les points a, b, c, de Π,

1. $|ab| = 0$, équivaut à $a = b$.
2. $|ab| = |ba|$.
3. $|ac| \leqslant |ab| + |bc|$ (inégalité triangulaire).

On peut désormais définir l'*égalité* ou *isométrie* de deux sous-ensembles A et A' du plan Π ou de la droite Δ : une correspondance biunivoque entre les points de A et A' est dite une isométrie si elle conserve les longueurs (c'est-à-dire que $|a'b'| = |ab|$ pour tout couple (ab) et son homologue $(a'b')$.

Définition : On appelle *droite du plan* Π tout ensemble de Π isométrique à Δ. On montre aisément qu'il existe sur un tel ensemble une seule structure de droite compatible avec la distance définie dans Π, ce qui justifie le terme de « droite du plan Π ».

Axiome d'appartenance. — *Par deux points distincts passe une droite et une seule.* C'est-à-dire qu'étant donnés deux points distincts x et y de Π, il existe une droite et une seule, au sens précédent, qui contienne x et y.

Axiome de pliage (1). — Pour toute droite D du plan, il existe un partage de l'ensemble $\Pi - D$ en deux ensembles Π_1 et Π_2 non vides tels que :

a) Tout segment $[ab]$, a étant dans Π_1 et b dans Π_2, ait un point appartenant à D.

b) Il existe entre $\Pi_1 \cup D$ et $\Pi_2 \cup D$ une isométrie qui laisse invariant tout point de D.

Remarquons que nous n'imposons pas *à priori* que ce partage soit unique, ni que l'isométrie entre Π_1 et Π_2 soit unique. Cette double unicité sera démontrée.

(1) A et B étant deux ensembles, nous rappelons qu'on note $A - B$ l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B, $A \cup B$ l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux, et $A \cap B$ l'ensemble des points qui appartiennent à la fois à A et à B.

Axiome des parallèles. — Disons que deux droites sont *parallèles* si elles sont identiques, ou bien si elles n'ont aucun point commun ; on notera ceci D//D'.

L'axiome des parallèles peut revêtir de nombreuses formes qui deviennent équivalentes lorsqu'on ajoute aux axiomes précédents un axiome de continuité ou même un axiome plus faible.

a) Pour toute droite D du plan Π, il passe par tout point du plan au plus une parallèle à D.

a') La relation de parallélisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble des droites du plan Π.

a'') Il existe au moins un rectangle (ensemble de quatre points distincts *abcd* tels que $ab \perp bc$; $bc \perp cd$; $cd \perp da$; $da \perp ab$ (la perpendicularité se définissant aisément à partir du pliage comme nous le verrons).

a''') Tout ensemble de quatre points est contenu à *l'intérieur* d'un *triangle* (ces deux derniers termes ayant été préalablement définis).

a'''') Il existe au moins un vrai triangle *abc* tel que, si *b'* et *c'* sont les milieux de $[ab]$ et $[ac]$, on ait $|bc| = 2|b'c'|$.

Axiome d'Archimède et axiome de continuité. — Nous ne les citerons que pour mémoire, étant donné que l'on peut développer toute la géométrie élémentaire sans y avoir recours. Ces axiomes concernent la structure de la droite Δ.

Axiome d'Archimède : quelles que soient les longueurs δ_1 et δ_2, où $\delta_2 \neq 0$, il existe un entier *n* tel que $\delta_1 < n\delta_2$.

Axiome de continuité : pour toute suite de points $a_1, a_2 \ldots a_n, \ldots$ d'une droite (par exemple Δ), telle que $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots < b$ où *b* est un point fixe, il existe dans l'ensemble des points *c* tels que $a_n < c$ pour tout *n*, un point situé avant tous les autres.

Cet axiome est très restrictif. Lorsqu'il est satisfait, non seulement l'axiome d'Archimède l'est aussi, mais le plan Π est identique, soit au plan hyperbolique classique (où l'axiome des parallèles n'est pas satisfait), soit au plan euclidien R^2.

Remarque : Nous n'étudierons pas en détail la question de savoir, d'une part quelles sont les droites Δ auxquelles on peut associer un plan Π, d'autre part s'il y a unicité (à une isomorphie près) du plan Π associé à une telle droite Δ.

Signalons simplement que ces droites Δ sont celles sur lesquelles existe une structure de corps compatible avec l'ordre et l'addition sur Δ, et telles que, pour tous *a* et *b* appartenant à ce corps, $\sqrt{a^2 + b^2}$ existe toujours. A une telle droite Δ correspond alors un plan Π et un seul.

DEUXIEME PARTIE

GEOMETRIE DU PLAN — DEPLACEMENTS — ORIENTATIONS

Conférence de M. Gustave Choquet, *recueillie et rédigée par* Mlle Lucienne Félix

Géométrie du plan

Théorème fondamental. — Dans un plan, soient trois points distincts *a, b, c*. Lorsque $|ac| = |ab| + |bc|$ (1), les points *a, b, c,* sont alignés : par *a* et *c* passe une droite, *x'x*. Si elle ne contient pas *b*, il y a contradiction, car une autre droite existerait, contenant *b*. En effet, l'ensemble constitué par la demi-droite *x'a*, le segment $[ab]$, le segment $[bc]$ et la demi-droite *cx* est une droite du plan comme nous allons le démontrer.

Nous montrerons que l'ensemble en question est une droite en montrant qu'il est isométrique à la droite *x'x*. Définissons la correspondance biunivoque conservant les distances : tout d'abord l'égalité (1) entraine l'existence sur $[ab]$ d'un point *b'* tel que $|ab'| = |ab|$ et $|b'c| = |bc|$.

A tout point s de $x'a$, associons le point s lui-même ; de même pour tout point de cx. A tout point p de $[ab]$, associons le point p' de $[ab']$ défini par $|ap'| = |ap|$, et de même pour tout point q de $[bc]$. Il nous faut démontrer, pour tous point s, p, q les égalités de distances $|sp| = |sp'|$ et $|pq| = |p'q'|$.

1. Comparaison de $|sp|$ et $|sp'|$. Si l'égalité n'avait pas lieu, l'inégalité triangulaire donnerait $|sp| < |sa| + |ap| = |sp'|$. Mais $|pb| + |bc| = |p'b'| + |p'c|$. On aurait donc $|sp| + |pb| + |bc| < |sc|$, ce qui est impossible.

2. Comparaison de $|pq|$ et $|p'q'|$.

S'il y a égalité, comme $|pb| + |bq| = |p'b'| + |b'q'|$, il y a bien isométrie.

Si l'égalité n'était pas vérifiée, l'inégalité triangulaire donnerait

$$|pq| < |pb| + |bq| = |p'q'|.$$

Mais, en considérant la ligne polygonale $apqc$, on obtiendrait

$$|ac| \leqslant |ap| + |pq| + |qc|.$$

Et, avec $|ap| = |ap'|$, $|pq| < |p'q'|$ et $|qc| = |q'c|$, on en déduirait $|ac| < |ac|$. Il y a donc contradiction.

En conclusion énonçons le théorème sous la forme : *la condition nécessaire et suffisante d'alignement de trois points du plan est que la plus grande distance de deux de ces points soit égale à la somme des deux autres.*

Etude des régions déterminées par une droite. — D'après les axiomes, rappelons que, étant donnée une droite quelconque D et un plan associé Π, l'ensemble $(\Pi - D)$ est partagé en deux ensembles Π_1 et Π_2 séparés et isométriques. Nous allons étudier ces ensembles et montrer leur unicité.

a) *Lemme. — L'isométrie entre* $(\Pi_1 \cup D)$ *et* $(\Pi_2 \cup D)$ *peut se prolonger sur tout le plan.*

En effet, définissons une isométrie du plan sur lui-même par la correspondance suivante :

1) A tout a de $(\Pi - D)$ associons son homologue a' dans l'isométrie qui existe par hypothèse entre Π_1 et Π_2.

2) A tout point de D associons le point lui-même. Es-ce bien une isométrie de tout le plan sur lui-même ? Si a et b sont deux points de $(\Pi_1 \cup D)$, la distance est conservée, et de même si les deux points sont dans $(\Pi_2 \cup D)$. Mais il nous faut considérer le cas où a et b sont, l'un, a, par exemple, dans Π_1, et l'autre, b, dans Π_2. Le segment $[ab]$ coupe alors D en un point p. Si a' et b' sont les homologues de a et b, on a $|pb'| = |pb|$ et $|pa'| = |pa|$, donc $|a'b'| \leqslant |a'p| + |pb'| = |ab|$. De même, $[a'b']$ coupe D en q et $|ab| \leqslant |aq| + |qb| = |a'b'|$. D'où $|ab| = |a'b'|$. Il en résulte de plus que p et q sont confondus.

Conséquence. — Cette isométrie transforme une droite en droite, un segment en segment.

b) *Théorème : les ensembles* Π_1 *et* Π_2 *sont convexes.* — Nous voulons démontrer que, a et b étant deux points de Π_1, le segment $[ab]$ n'a pas de point commun avec D. En effet, si un tel point commun q existait, en le joignant au transformé a' de a dans l'isométrie définie entre Π_1 et Π_2, on aurait $|a'q| = |aq|$, et

$$|a'b| < |a'q| + |qb|$$

(L'égalité est impossible car a et a' étant distincts, q n'est pas sur $[a'b]$). Il viendrait donc $|a'b| < |aq| + |qb| = |ab|$. Mais $[a'b]$ coupe D en un point p et

$$|ab| < |ap| + |pb| = |a'p| + |pb| = |a'b|.$$

Il y a donc contradiction. Par suite q n'existe pas.

c) *Conséquence : unicité de* Π_1 *et* Π_2. — Disons que deux points de $\Pi - D$ sont équivalents si le segment qui les joint ne rencontre pas D. Ceci est bien une relation d'équivalence, car 1) $a \backsim a$; 2) $a \backsim b$ entraîne $b \backsim a$; 3) la transitivité est vérifiée. Or il n'y a que deux classes d'équivalence, qui sont Π_1 et Π_2. Ainsi, un point a de Π_1 définit Π_1 comme l'ensemble des points b tels que $[ab]$ ne rencontre pas D.

Nous pourrons maintenant nommer Π_1 et Π_2 *les* demi-plans déterminés par la droite D.

d) *Théorème : l'isométrie entre* Π_1 *et* Π_2 *est unique.* — Soit a un point de Π_1 et a' son homologue dans une certaine isométrie satisfaisant aux axiomes. Le segment $[aa']$ rencontre D en un point p. Soit q un point de D distinct de p. On a $|aa'| < |aq| + |qa'|$, donc $|ap| < |aq|$. $[aq]$ est dite *une oblique ;* sa longueur $|aq|$ est strictement supérieure à $|ap|$. Il en résulte que, a et D étant donnés, le point p est parfaitement défini sur D comme point dont la distance à a est minima. Et a' est par suite parfaitement déterminé dans toute isométrie satisfaisant aux axiomes. Une telle isométrie est donc uniquement déterminée : on la nommera *la* symétrie par rapport à D.

Conséquences. — Ces notions fondamentales étant acquises, on peut déjà retrouver bien des raisonnements habituels de la géométrie. A ce stade peuvent être établis les principaux théorèmes de *la géométrie de situation.* Signalons les plus importants :

Démonstration de l'axiome de Pasch (axiome dans la construction de Hilbert). Trois points a, b, c étant donnés dans le plan, nommons *côtés du triangle abc* les trois segments $[ab]$, $[bc]$, $[ca]$. Nous énoncerons le théorème sous la forme : *Toute droite du plan qui ne passe par aucun des points a, b, c, rencontre* 0 *ou deux côtés du triangle.*

La démonstration résulte immédiatement de la remarque que, ou les trois points sont dans un seul des demi-plans déterminés par la droite, ou l'un des points est dans un de ces demi-plans et les deux autres points dans l'autre demi-plan.

Ce théorème s'étend à un *polygone fermé* quelconque, défini comme l'ensemble des permutations circulaires d'une suite finie ordonnée de points, distincts ou non, du plan. Ces points étant $a_1, a_2, \ldots a_i, \ldots$ (i défini mod. n) les segments $[a_i a_{i+1}]$ sont les côtés du polygone. L'énoncé est alors : *Une droite* D *ne passant par aucun des sommets étant donnée, le nombre des côtés qui rencontrent* D *est toujours pair.*

Signalons encore le *théorème de Jordan* qui concerne les *polygones fermés sans points doubles,* c'est-à-dire tels que les sommets soient distincts deux à deux, et que deux côtés quelconques non consécutifs soient disjoints.

Théorème de Jordan : Etant donné un tel polygone, son complémentaire (c'est-à-dire l'ensemble des points du plan qui ne sont pas sur un côté), se partage en deux ensembles Q_1 et Q_2 tels que :

1. Deux points d'un même ensemble Q_i peuvent être joints par une ligne polygonale entièrement contenue dans cet ensemble.
2. Au contraire, toute ligne polygonale joignant deux points non situés dans le même ensemble Q_i rencontre au moins un des côtés.
3. Tout triangle contenant un point situé sur un des côtés contient des points de chacune des deux régions Q_i. C'est dire que la réunion des côtés forme une frontière des deux régions.

Nous ne ferons pas ici la démonstration, longue et délicate, de ce théorème qui n'est pas essentiel pour notre étude.

Voici maintenant un énoncé qui est un cas particulier d'un théorème relatif aux polygones convexes :

Théorème : Si trois points a', b', c' sont à l'intérieur d'un triangle abc, le périmètre du triangle a'b'c' est inférieur à celui du triangle abc. (Démonstration classique).

Cet énoncé peut se généraliser un peu en remplaçant le triangle *abc* par un polygone fermé sans point double (après que l'on a défini l'intérieur d'un tel polygone).

Perpendiculaires et obliques

Définition. — Une droite D est dite *perpendiculaire* à une droite D' si elle est invariante dans la symétrie par rapport à D' et n'est pas confondue avec D'.

Il faut noter que, par cette définition, la relation de perpendicularité n'apparait pas comme symétrique.

Nous démontrons immédiatement que D, *perpendiculaire à* D', *rencontre* D'. En effet, si a est un point de D non situé sur D', le symétrique a' de a par rapport à D' est situé sur D, donc aussi le segment $[aa']$ lequel rencontre D'.

Propriété caractéristique en termes de distances. — Soit p le point commun à D et D', a un point de D et b un point de D', choisis tous deux distincts de p. Nous avons déjà vu que l'oblique $[ab]$ vérifie $|ap| < |ab|$ et que cette inégalité, vraie quel que soit b sur D', caractérise le point p sur D' donc, *par un point non situé sur une droite* D' *passe une perpendiculaire à cette droite et une seule.*

Symétrie de la relation de perpendicularité. — Supposons encore que D soit perpendiculaire à D'. Nous voulons prouver que D' est perpendiculaire à D.

Nous savons déjà que D' et D sont distinctes. Il nous suffit de vérifier que p, projection sur D' des points a de D, est aussi la projection sur D des points de D'. Soit donc b un point de D' autre que p ; il a une projection q sur D. Si q était distinct de p, il ne serait pas sur D' ; donc il serait distinct de son symétrique q' par rapport à D' et l'on aurait $|bq| = |bq'|$; mais q' satisferait alors aussi bien que q à la condition de minimum de distance qui caractérise le pied de la perpendiculaire. Donc q' et q sont confondus et coïncident avec p.

Ainsi, la *relation de perpendicularité est symétrique*. Mais, naturellement, elle n'est pas réflexive (puisque D n'est pas perpendiculaire à elle-même), ni transitive !

Théorèmes sur les obliques. — Dans la figure précédente, $[ab]$ est oblique par rapport à D et par rapport à D'. *Sa longueur est fonction strictement croissante d'une part de* $|pb|$, *d'autre part de* $|pa|$.

Pour le démontrer, nous pouvons nous borner à considérer des points b d'un même côté de p, puisque le symétrique de b par rapport à D est à la même distance de a que b. Soient donc deux points b et c de D, situés d'un même côté de p et tels que $|pb| < |pc|$. Nous associons au point a son symétrique a' par rapport à D' et considérons les triangles isocèles aba' et aca'. Le point b étant sur $[pc]$ est intérieur au triangle aca', et le théorème sur les périmètres donne

$$|aa'| + 2\,|ab| < |aa'| + 2\,|ac|, \text{ donc } |ab| < |ac|.$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, cette fonction strictement croissante $x = f(y)$ entre $x = |pb|$ et $y = |ab|$ conserve la structure d'ordre entre les demi-droites $x < O$ et $y < |ap|$, mais sans réaliser nécessairement un isomorphisme sur ces demi-droites. Nous pouvons retarder le moment de soulever ce problème qui nécessite l'introduction de nouveaux axiomes, et nous allons poursuivre l'étude des conséquences des axiomes déjà introduits.

Perpendiculaire menée d'un point a une droite. — Soit une droite D et un point a du plan. Nous avons démontré, lorsque a est hors de D, l'existence et l'unicité de la perpendiculaire menée de a à D. Nous supposons donc a sur D.

1. *Existence* d'une perpendiculaire D' à D passant par a.

Considérons un point b de la région Π_1, et, sur le prolongement de $[ba]$, prenons le point c défini par $|ba| = |ac|$. Soient b' et c' les symétriques de b et c par rapport à D. Si b' est confondu avec c, la droite bc convient. Sinon, soit D' la perpendiculaire menée de a à la droite cb', perpendiculaire qui existe bien puisque a n'est pas sur cb'. Cette droite D' passe au milieu p de cb' puisque les obliques ac et ab' sont égales : ces points c et b' sont donc homologues dans la symétrie par rapport à D'. Dans cette même symétrie, a est invariant et cab donne $b'ac'$. Donc $[bb']$ donne $[cc']$, et par suite de l'isométrie, le milieu q de bb' est homologue du milieu r de cc'. Mais q et r sont sur D. Donc D, qui passe par deux points homologues dans la symétrie par rapport à D', est perpendiculaire sur D'. D'après la symétrie de la relation de perpendicularité, D' est donc bien perpendiculaire sur D.

2. *Unicité* de la perpendiculaire menée de a sur D.

Pour montrer qu'il n'y a pas d'autre perpendiculaire menée de a à D que la droite D′, caractérisons les points de D′ parmi les points du plan : utilisons le couple q, r de points de D équidistants de a. Si un point m est sur D′, les obliques mq et mr sont égales. Si un point n n'est pas sur D′, l'un des segments $[nq]$ ou $[nr]$ coupe D′ en un point m, soit par exemple $[nr]$. Alors l'inégalité triangulaire donne $|nr| = |nm| + |mr| = |nm| + |mq| > |nq|$ et na n'est pas perpendiculaire à D. Il ne peut donc pas exister plus d'une perpendiculaire à D passant par a.

Corollaire. — Introduisons, par la définition ordinaire, la *symétrie* par rapport à un point. Il résulte de la première partie de la démonstration précédente que le *produit d'une symétrie par rapport à une droite D et d'une symétrie par rapport à un point a de la droite* D *est une symétrie par rapport à la perpendiculaire menée de a à la droite* D.

Et l'unicité de la perpendiculaire permet d'énoncer la réciproque : *le produit des symétries par rapport à deux droites perpendiculaires est une symétrie par rapport au point commun à ces droites.*

Nous pouvons aussi énoncer le théorème qui introduit la *médiatrice d'un segment : étant donnés deux points a et b, l'ensemble des points m définis par $|ma| = |mb|$ est, ou bien une droite perpendiculaire à ab en son milieu, ou bien est vide.*

On peut ici admettre l'existence d'un milieu pour tout segment, mais si nous introduisons l'axiome des parallèles, cette existence sera démontrée grâce au théorème de Thalès.

Parallélisme. — Nous avons déjà défini le parallélisme comme relation d'équivalence. Rappelons la définition :

Définition : Deux droites sont parallèles si elles sont confondues, ou si elles n'ont aucun point commun.

Théorème d'existence : Par un point il passe *au moins* une droite parallèle à une droite donnée : si le point donné a est sur la droite D, cette droite elle-même convient. Sinon, il suffit de considérer la droite D′ perpendiculaire à la perpendiculaire Δ menée de a sur D. L'unicité de la perpendiculaire à Δ passant par tout point démontre que D et D′ n'ont pas de point commun.

Axiome des parallèles : Par un point, il passe *au plus* une parallèle à une droite.

Finalement, il en passe une et une seule.

Théorème : Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

En effet, soient D et D′ deux parallèles. Une perpendiculaire Δ à D, coupant D en p, rencontre D′ (puisque par p ne passe qu'une parallèle à D′) en un point q', et la perpendiculaire à Δ en q′, étant parallèle à D, est D′.

Etude d'une configuration importante. — Complétons la figure précédente en considérant la droite D″ symétrique de D′ par rapport à D, ainsi que le point q'' symétrique de q. Il est immédiat que D″ est parallèle à D (puisque les points de D sont invariants dans la symétrie), et à D′ (unicité de la parallèle). Coupons alors D en un point quelconque a par une droite quelconque δ. Celle-ci ne peut pas être parallèle à D′, ni à D″ ; elle les coupe en des points b' et b''. L'ensemble formé par la réunion de D′ et D″ est invariant dans la symétrie par rapport à D et aussi dans la symétrie par rapport à la perpendiculaire menée de a aux droites D, D′ D″, donc il est invariant dans le produit de ces symétries, c'est-à-dire la symétrie par rapport au point a. Donc, *sur toute sécante, le point a d'intersection avec* D *est milieu du segment $b'b''$ joignant les points d'intersection avec* D′ *et* D″.

Corollaire : tout segment possède un milieu. — Soit $[ab]$ un segment quelconque. Sur une demi-droite issue de a, portons $|ap| = |pq|$ et joignons bq. Cette droite, par symétrie par rapport au point p, donne une droite D passant par a et parallèle à qb. (En effet, nous l'obtenons comme perpendiculaire à la perpendiculaire Δ menée de p à *qb*). Cette perpendiculaire Δ nous permet aussi de mener par p la parallèle D' à *qb*. Or les droites *qb* et D sont symétriques par rapport à D', et *ab* ne peut être parallèle à D'. Donc D' coupe *ab* en un point qui, d'après le théorème précédent, est milieu de $[ab]$.

Théorème : Les segments de perpendiculaires communes à deux droites parallèles ont même longueur. Cette longueur est la *distance* des parallèles.

En effet, considérons les perpendiculaires $[pp']$ et $[qq']$ aux deux parallèles données D et D'. Le milieu de *pq* existe : soit *i* ce point. La perpendiculaire Δ en *i* à D est axe d'une symétrie dans laquelle $[pp']$ et $[qq']$ sont homologues, car la symétrie conserve la perpendicularité (définie par un minimum de distances), et D' est invariante. Par suite, $|pp'| = |qq'|$.

(Notons que la symétrie par rapport à un point permet d'obtenir le résultat pour deux segments parallèles obliques sur les droites).

Nous atteignons maintenant la notion de *parallèles équidistantes,* d'où le *théorème de Thalès* concernant des rapports entiers ou rationnels. On en déduit *l'existence d'un point divisant un segment dans un rapport rationnel quelconque.*

Notion d'orientation

Théorème : Etant donnés dans le plan deux ensembles isométriques quelconques A et A', et une isométrie de A sur A' : $m' = \mathrm{T}(m)$, on peut prolonger cette isométrie à tout le plan. Autrement dit, on peut trouver une isométrie $a' = \mathcal{C}(a)$ du plan sur lui-même telle que sa restriction à A soit T.

Pour démontrer ceci, nous allons prouver que T est un produit de symétries.

Soit a un premier point de A. Le point $a' = \mathrm{T}(a)$ peut être ou non confondu avec a. S'il ne l'est pas, nous faisons subir à A la symétrie par rapport à la médiatrice D_1 de $[aa']$, et nous comparons les ensembles A_1 et A'. Soit b un second point de A, b' et b_1 ses homologues dans A' et dans A_1. Si ces deux points ne sont pas confondus, nous transformons A_1 en A_2 par la symétrie autour de la médiatrice de $b'b_1$, droite qui passe nécessairement par a'. A' et A_2 ont donc deux points homologues communs, a' et b'. Mais une isométrie qui conserve deux points est nécessairement l'identité ou la symétrie par rapport à la droite joignant ces deux points, donc A' et A_2, ou coïncident, ou dérivent l'un de l'autre par une troisième symétrie après laquelle trois points homologues non alignés sont confondus. (Tous les points homologues coïncident alors, puisqu'une médiatrice ne peut passer par trois points non alignés).

Donc, la *transformation* T *est le produit de trois symétries au plus,* produit qui transforme le plan en lui-même. Pour étudier une isométrie, on peut donc se borner à une isométrie du plan sur lui-même $\mathrm{T}(\pi)$.

Distinction des isométries directes et inverses. — L'isométrie $\mathrm{T}(\pi)$ est dite *directe* si elle est égale au produit d'un nombre pair de symétries

$$\mathrm{T} = \mathrm{S}_{2p}.\mathrm{S}_{2p-1}.\ \ldots\ \mathrm{S}_2.\mathrm{S}_1$$

et elle est dite *inverse* si elle est égale au produit d'un nombre impair de symétries

$$\mathrm{T} = \mathrm{S}_{2p+1}.\mathrm{S}_{2p}\ \ldots\ \mathrm{S}_2.\mathrm{S}_1.$$

Il nous faut démontrer que ces deux cas s'excluent : *une isométrie* $\mathrm{T}(\pi)$ *ne peut être à la fois directe et inverse.* Sinon, la transformation produit $\mathrm{T}.\mathrm{T}^{-1}$ serait le produit d'un nombre impair de symétries : or c'est la transformation identique : nous sommes donc amenés à démontrer le théorème : *l'identité n'est pas produit d'un nombre impair de symétries.*

1. L'identité n'est évidemment pas *une* symétrie.
2. L'identité n'est pas un produit de *trois* symétries.

En effet, si l'on avait (notant les symétries par leur droite invariante)

$$\mathrm{D}.\mathrm{D}_2.\mathrm{D}_1 = \mathrm{I},$$

ce qui équivaut à $\mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 = \mathrm{D}$, tout point m de D serait invariant par $\mathrm{D}_2\mathrm{D}_1$, donc D_2

et D_1 devraient être médiatrices des mêmes segments $[mm']$ et ne pourraient être distinctes.

3. *Lemme : Le produit de deux isométries, qui sont chacune produit de deux symétries, est un produit de deux symétries.*

Soient en effet $T_1 = D_2 . D_1$ et $T_2 = D'_2 . D'_1$. On démontre que le produit de deux symétries peut être remplacé par le produit de deux autres, le premier ou le deuxième axe de symétrie, au choix, pouvant être assujetti à passer par un point arbitrairement choisi. On peut alors faire coïncider les axes de la deuxième symétrie facteur de T_1 et de la première symétrie facteur de T_2 suivant une méthode classique.

En conséquence de ce lemme on peut, sans changer la parité du nombre de symétries dont l'isométrie est produit, ramener le nombre des symétries à être inférieur à 4. Le théorème est donc démontré.

Angles orientés. — Pour atteindre cette notion, nous allons d'abord définir un angle. Il semble peu en accord avec l'intuition de l'angle de le définir comme ensemble de points, intersection de demi-plans ; nous préférons une définition dans laquelle un angle sera une figure constituée par *un ensemble de demi-droites issues d'un point* (ouvertes ou fermées). D'une façon précise, définissons d'abord un *angle plat :* ensemble des demi-droites issues d'un point a et contenues dans l'un des demi-plans déterminés par une droite passant par a. Un angle quelconque est alors, par définition, l'intersection de deux angles plats (ensemble non vide seulement si les sommets sont confondus).

Un angle possède deux côtés qui sont deux demi-droites issues du sommet ; un angle est dit orienté quand on a ordonné l'ensemble de ces deux côtés.

Angles de même sens. — Soient d'abord deux couples de demi-droites perpendiculaires prises dans un certain ordre : D_1, D_2 et D'_1, D'_2. Ces deux ensembles sont isométriques d'une façon unique. Si l'isométrie qui prolonge cette correspondance à tout le plan est directe, nous dirons que les deux angles droits orientés correspondants sont de même sens. Si, maintenant, nous considérons deux angles quelconques, D_1D_2 et $D'_1D'_2$, nous associons au premier l'angle $D_1\Delta$, Δ étant la demi-droite perpendiculaire à D_1 dans le demi-plan qui contient D_2, et de même pour $D'_1D'_2$ auquel nous associons $D'_1\Delta'$. Les angles primitifs sont dits de même sens si les angles droits associés le sont. On montre que si deux angles égaux sont de même sens, l'isométrie entre ces angles est directe, et inversement.

Déplacement continu. — Nous arrivons à la notion de déplacement continu par le *théorème : Quand une isométrie du plan sur lui-même est directe, il existe une famille d'isométries directes, dépendant continuellement d'un paramètre, reliant cette isométrie à l'identité.*

Comment obtenir une telle transformation $T(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, telle que $T(0) = I$ et $T(1) = T$? Une isométrie directe est produit de deux symétries. Pour que le transformé de tout point varie d'une façon continue avec un paramètre α, il suffira de faire varier continuement les axes des symétries pour les amener à coïncider.

Théorème réciproque : Dans une famille continue d'isométries, celles-ci sont toutes directes ou toutes inverses.

En particulier, si une famille continue d'isométries contient l'identité, toutes ces isométries sont directes.

C'est le résultat qui remplace l'emploi du bonhomme d'Ampère, du tire-bouchon et autres appels intuitifs à la distinction entre droite et gauche d'un observateur, procédés, qui ne sont pas du domaine des Mathématiques.

Indications sur les développements ultérieurs. — Ce qui précède permet de reconstituer les parties de la géométrie élémentaire où l'on n'utilise que la structure d'ordre de l'ensemble des longueurs et l'addition de ces longueurs.

Pour obtenir les théorèmes tels que le théorème de Pythagore, il y a intérêt à définir ensuite, dès que possible, la multiplication et la division des longueurs. On choisit pour cela arbitrairement une longueur δ non nulle que l'on appellera *unité*. Si a et b sont deux autres longueurs, le rapport $\frac{a}{b}$ sera défini comme une quatrième longueur x obtenue comme suit :

Soient Ox et Oy deux demi-droites perpendiculaires. On porte sur Oy les points A et B tels que $|OA| = a$ et $|OB| = C$; puis on porte sur Ox le point D tel que $|OD| = \delta$. Si on désigne par X l'intersection de Ox avec la parallèle à BD menée par A, x sera par définition la longueur $|OX|$.

A partir de là, on définit aisément le produit $(a . b)$.

On démontre ensuite que ce produit possède toutes les propriétés classiques. Ceci peut se traduire par le fait qu'il définit sur toute droite, joint à l'addition, une structure de corps commutatif totalement ordonné.

Géométrie dans l'espace. — Nous dirons qu'un ensemble E est un espace à trois dimensions associé à une droite Δ donnée si :

1) E est mesuré par Δ (mêmes définitions que dans le cas du plan).

2) Par deux points distincts passe une droite et une seule.

3) Par trois points quelconques passe au moins un plan (c'est-à-dire un plan associé à Δ au sens défini précédemment, jusqu'à l'axiome des parallèles inclusivement).

4) Pour tout plan Π de E, il existe un partage de $(E - \Pi)$ en deux ensembles non vides E_1 et E_2 tels que tout segment joignant un point de E_1 et un point de E_2 rencontre Π.

Ce dernier axiome est équivalent au suivant :

4') Si deux plans ont en commun un point, ils ont en commun au moins un autre point.

L'étude de l'orientation dans l'espace peut se calquer sur l'étude que nous avons esquissée pour le plan.

Cette étude sera développée davantage dans un travail qui paraîtra dans un recueil d'exposés relatifs à l'enseignement des Mathématiques et publié par la « Commission internationale pour l'étude de l'enseignement des Mathématiques ».

A propos de l'orientation

Au cours de la discussion, Mme Ayrault, professeur au Lycée Jules-Ferry, a bien voulu nous entretenir d'un travail qu'elle a consacré à ce sujet.

Mme Ayrault, se proposant d'exclure à la fois l'observateur-repère et le repère absolu, cherche à définir deux classes de correspondances destinées à caractériser la conformité et la non-conformité de sens. Elle énumère les conditions que requiert l'intuition la moins exigeante : cohérence de la définition, « règle des signes », conformité du sens d'un élément avec lui-même, existence d'éléments de sens contraires. Il s'agit de satisfaire à ces conditions aux moindres frais : le choix de la relation « entre » comme notion primitive et l'introduction de « chaînes de correspondances » permettent de reconstruire la notion d'orientation à partir de trois axiomes.

Note du rapporteur. — L'excellente étude de Mme Ayrault, étude qu'elle avait exposée à ses propres élèves, et qui nous avait été signalée par M. Bouligand, a été publiée dans la *Revue Générale des Sciences*, tome LX, n[os] 3-4, 1953 (S.E.D.E.S., 5, place de la Sorbonne, Paris, V[e]), sous le titre : « L'orientation considérée indépendamment des axiomes de congruence et de parallélisme ».

Rapport sur la faiblesse en Calcul des élèves qui sont entrées en 6e au mois d'octobre 53

La première heure de classe a été consacrée à des exercices de calcul sur les tables d'addition et de multiplication. Les élèves ont eu à revoir ces tables pour la deuxième séance. L'interrogation ayant été faible, une nouvelle révision a été imposée avec le conseil de se faire interroger dans la famille en vue d'une interrogation écrite.

L'interrogation écrite a eu lieu du 10 au 13 octobre. Les questions étant posées oralement, mais lentement, les élèves devaient écrire la réponse seulement.

Texte de l'interrogation écrite en calcul :

1° Quel est le produit de :

9×7 8×6 7×8 6×3 5×9 ?

2° Par quel nombre faut-il multiplier :

8 pour avoir 72 — 3 pour avoir 27
7 pour avoir 42 — 4 pour avoir 24
4 pour avoir 36

3° Dans quelles tables de multiplication trouve-t-on les nombres :

36 ? 35 ? 24 ? 56 ? 72 ?

4° Trouver la somme de :

$17 + 7$ $23 + 8$ $15 + 12$ $8 + 9$ $18 + 19$

Il y a eu 119 élèves interrogées. Voici le tableau des résultats :

Classes	0 f.	1 ou 2 f.	3 f.	4 f.	5 f.	6 ou 7 f.	8 ou 9 f.	10 f. et plus	TOTAL
6e 1	0	1	3	5	4	7	8	11	39 élèves + 3 abs 42
6e 2	4	6	4	8	0	4	8	4	39 élèves + 2 abs = 41
6e 3	0	4	4	5	5	11	5	7	41 élèves 41
Total	4	11	11	18	15	22	16	22	110 élèves sur 124

Cette faiblesse en calcul n'est pas nouvelle, mais elle va en s'accentuant chaque année.

Je l'attribue à la trop grande difficulté des problèmes proposés pour l'examen d'entrée.

Cette difficulté est telle que maîtres et élèves — et parents — préparent dans l'angoisse le « concours d'entrée en 6e », comme s'il s'agissait du concours de Polytechnique, au lieu de se limiter aux exercices simples et utiles qui donneraient aux enfants la culture et les habitudes indispensables pour faire de bonnes études du Second Degré.

Mlle Goukowsky (*Lycée Montaigne*).

AXIOMATIQUE ET REDÉCOUVERTE

Les Professeurs de mathématiques sont cordialement invités à venir entendre la conférence suivante :

Le Jeudi 26 Novembre, à 14 h. 30

au Lycée Henri-IV, 23, rue Clovis

CONFERENCE

de Monsieur J. CHAUVINEAU

professeur au Lycée Henri-IV

Quelques aperçus relatifs à la notion de grandeur

Y. CROZES

Le Gérant : L. PARAZINES.

Cahors. Imp. A. Coueslant (*personnel intéressé*). 85.239 — 1953
C.O.A.L. 31.2330. — Dépôt légal : IV-1953