Equivalence des deux définitions $|MF \pm MF'| = 2a$ et $\dfrac{MF}{MH} = e$

Considérons le faisceau de cercles d'axe radical (D) et de point limite F ; K étant le pied de la perpendiculaire abaissée de F sur (D), l'inversion de pôle F de puissance $2FK^2$ transforme les cercles du faisceau en cercles concentriques de centre K (1). Soit alors un cercle quelconque (M) de centre M passant par F et H, pied de la perpendiculaire MH sur (D). L'inversion indiquée transforme (M) dans la droite (M') et en abaissant $K\varphi'$ perpendiculaire sur (M'), le cercle de centre K de rayon $K\varphi'$ est l'inverse d'un cercle du faisceau centré en F' tangent à (M) en φ. Les deux tangentes en F et φ à (M) se coupent en I sur (D) et les cinq points $FM\varphi HI$ sont cocycliques. L'angle $\widehat{FHM}$ est égal à $\widehat{F\varphi M}$, puis à $\widehat{MF\varphi}$ et par suite à $\widehat{F\varphi' K}$; comme d'autre part les angles $\widehat{FMH}$ et $\widehat{FK\varphi'}$ sont égaux, les deux triangles FMH et $FK\varphi'$ sont semblables et par suite $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{FK}{K\varphi'}$. (1)

d'où la double conséquence :

1° Si $\dfrac{MF}{MH}$ est constant, $K\varphi'$ est constant et le cercle du faisceau de centre F' est fixe, M est alors centre d'un cercle passant par F et tangent à (F'),

$$|MF \pm MF'| = 2F'\varphi.$$

2° Si M décrit une conique de foyer F de cercle directeur (F'), on a $\dfrac{MF}{MH} =$ constante, la droite (D) étant l'axe radical de (F') et du point F.

La discussion sur la nature de la conique fait intervenir la position de F par rapport au cercle (K) :

$e > 1$, $K\varphi' < KF$, l'homothétie de centre F qui fait passer de (K) à (F') a pour rapport $\dfrac{2FK^2}{FK^2 - K\varphi'^2} = \dfrac{2e^2}{e^2 - 1}$ plus grand que 1, donc K sépare F et F' et on a $MF' - MF = 2a = \dfrac{2de}{e^2 - 1}$.

$e < 1$, le rapport d'homothétie est négatif, F et F' sont du même côté de K et on a $MF' + MF = \dfrac{2de}{1 - e^2}$.

Comme, de plus, $\dfrac{FF'}{FK} = \dfrac{2e^2}{|e^2 - 1|}$, on obtient $2c = \dfrac{2de^2}{e^2 - 1}$ et par suite $e = \dfrac{c}{a}$. Le passage du système d, e à a, c et le passage inverse est ainsi établi.

Ceci permet de voir aussi des propriétés de tangentes aux coniques, I appartenant à cette tangente.

P. MAGRON.

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.