

Sur la nécessité de réformer nos méthodes

Cette nécessité est plus impérieuse que jamais à cause, d'abord, de la persistance à la baisse du niveau des études, et, ensuite, du danger de croire que l'on peut remédier à cette situation en allégeant les programmes. Il est indéniable que nos collègues de Mathématiques Supérieures, et même de Mathématiques Spéciales, se plaignent constamment de ce que leurs élèves calculent moins bien que dans le passé, et nous-mêmes, en Mathématiques Élémentaires, devant l'incapacité de nos élèves à calculer, sommes de plus en plus portés à considérer la classe de Mathématiques comme une classe d'initiation au calcul, ce qui, avouons-le, est inadmissible. Il est non moins indéniable que, si l'on écoute les parents, ou des journalistes qui n'y entendent rien, comme ceux, par exemple, qui voudraient bien régler à leur fantaisie le sort de nos vacances — comme si les vacances des professeurs ne devaient pas être *exactement* celles de leurs élèves — où en arrivera-t-on, de suppression en suppression ? Il ne faudra certainement pas un quart de siècle pour que le programme de la classe de Mathématiques ne devienne le programme actuel de la classe de Quatrième.

Au moment où les progrès de la Science sont de plus en plus marqués, en quantité et en qualité, n'est-il pas contradictoire, donc déraisonnable et maladroit, de vouloir diminuer le bagage de nos élèves ? Il n'est pas question non plus de vouloir aggraver leur besogne, car le surmenage étant contraire au but poursuivi, est à éviter coûte que coûte. Il n'est nullement contradictoire, à mon avis, de maintenir, et, au besoin même, d'augmenter le bagage de nos élèves et en même temps de simplifier leur tâche pour l'acquérir.

Il semble donc que le but à viser et à atteindre soit d'obtenir un maximum de rendement avec un minimum de fatigue, et, j'ajouterai même, pour une quantité de matière déterminée, dans un minimum de temps et avec des chances plus grandes d'assimilation. Il y faut comme condition que les programmes mettent mieux en vedette l'unicité des Mathématiques, donc que les constructeurs de ces programmes s'ingénient à réunir et non à disjoindre, comme il a été fait dans le passé. Comme on le voit, le sort d'une réforme intelligente de nos façons d'enseigner est ainsi liée, qu'on le veuille ou non, à la rédaction des divers paragraphes du programme.

Pour ne donner qu'un exemple, et sans m'interdire absolument d'en effleurer d'autres au cours de cette étude, on peut, en un mois, dans une classe de Troisième, exposer aux élèves tout ce qui concerne en algèbre les premier et second degrés si toutefois le texte correspondant du programme est ainsi libellé ou de toute manière approchante, le but étant de réunir tout ce qui peut l'être, ne l'oublions pas :

Etude du binôme du premier degré $ax + b$ et du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$: leur comparaison à zéro (équations et inéquations du premier et du second degrés à une inconnue), leur comportement quand x varie (variation du binôme $ax + b$ et du trinôme $ax^2 + bx + c$).

Quand on a fait remarquer à l'élève que rien n'est plus simple que de comparer à zéro un produit de facteurs pourvu que la comparaison de chaque facteur à zéro soit assurée, on a immédiatement la marche à suivre pour développer le texte ci-dessus. Tout effort en algèbre élémentaire, la seule évidemment qui compte ici, ne consiste-t-il pas à montrer la possibilité ou l'impossibilité de la mise en facteurs et, dans le premier cas, de faire donner à cette possibilité son maximum ? Comme celle-ci est assurée le plus souvent quand on a affaire à une différence de deux carrés, on voit que la possibilité sera acquise dès que l'on aboutira à une différence de deux

carrés et que l'impossibilité se révélera quand, cherchant une différence de deux carrés, on aboutira à une somme de deux carrés, tout au moins en ce qui concerne le second degré. Il ne sera peut-être pas mauvais alors, avec des exemples du genre de $x^4 + 4$, pour parer à certains dangers, de montrer aux élèves que l'on peut avoir ici un produit et qu'il est inutile, quand on a deux facteurs, de pousser plus loin. La possibilité d'avoir, pour une expression telle que $x^4 + 4$, à la fois une somme et une différence de deux carrés, va les surprendre très certainement et les demandes d'explications ne se faisant guère attendre, il sera bien difficile de ne pas les satisfaire.

Revenant au texte du programme mis en avant, donnons quelques détails sur les façons possibles de le développer *avec la condition qu'il s'agit de réunir et non de séparer*. $ax + b$ étant mis sous la forme $a \left(x + \frac{b}{a} \right)$ ou $a(x - x')$ en posant $-\frac{b}{a} = x'$,

l'étude du binôme $ax + b$ (équation, inéquation et variation) est l'affaire de quelques instants, ce qui, agrémenté d'exemples bien choisis, sera assimilé par l'élève aussi bien et même mieux qu'en lui présentant cette même matière sous forme plus ou moins disloquée. Quant à la représentation graphique du binôme (les coordonnées cartésiennes ayant été antérieurement exposées comme applications des nombres algébriques et de la relation de Chasles), elle devient presque immédiate si l'on a traité d'abord la réciproque habituelle à propos du théorème de Thalès, comme exemple illustrant ce théorème, ce qui fournit, par ailleurs, une belle introduction à la notion de fonction.

[Disons, au passage, qu'il ne serait peut-être pas maladroit d'initier les élèves le plus tôt possible à cette notion, dès qu'apparaissent en géométrie des couples de quantités variables dépendant l'une de l'autre ; en faisant de l'un des éléments du couple un chef (qui commande) et de l'autre un subordonné (qui obéit), on rend plus sympathiques à l'élève les mots de variable indépendante et de fonction. Du reste, l'illustration d'une notion d'algèbre par des exemples empruntés à la géométrie ne crée-t-elle pas un climat plutôt favorable à la réunion qu'à la dispersion ? Au surplus, quelle belle occasion d'introduire les fonctions circulaires quand on étudie en géométrie les dépendances qui existent entre la longueur d'une corde d'un cercle et l'un des arcs interceptés, entre la longueur de la corde et sa distance au centre, donc entre cette dernière et l'un des arcs interceptés !].

L'étude du binôme étant achevée, il ne faudra pas longtemps à l'élève pour savoir résoudre les équations ayant les formes $ABC = 0$, $\frac{A}{B} = 0$, et les inéquations ayant les formes $ABC > 0$, $ABC < 0$, $\frac{A}{B} > 0$, $\frac{A}{B} < 0$, où A, B, C sont des binômes du

premier degré. Au surplus, la liaison avec le second degré est assurée. En effet, proposer ensuite aux élèves une équation telle que $(2x - 3)(x + 5) = 0$ va conduire, de la part de quelques-uns, à une résolution immédiate, de la part de beaucoup d'autres, au développement du premier membre, ce qui, tout en étant maladroit, permettra de montrer aux premiers qu'ils viennent de résoudre une équation du second degré et aux seconds qu'il est dangereux, sans raison valable, de développer un produit isolé, sous peine, comme c'était le cas ici, de remplacer une lumière éblouissante par une obscurité complète. C'est alors qu'en proposant aux élèves la résolution d'une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, de préférence avec a, b, c numériques pour commencer, il ne leur faudra pas longtemps pour trouver la marche à suivre. Naturellement, on viera plus grand, *toujours par souci d'unité*, en s'attaquant directement au trinôme $ax^2 + bx + c$. Plutôt que de recourir au procédé classique de recherche des formes canoniques diverses du trinôme, il est beaucoup plus éducatif,

à mon avis, de faire constater à l'élève que le nombre $x' = -\frac{b}{a}$ qui annule le binôme $ax + b$ ayant joué le rôle principal dans l'étude du binôme, il peut être de

même intéressant de faire appel à un nombre analogue pour $ax^2 + bx + c$, donc annulant $ax^2 + bx + c$, en supposant naturellement que ce nombre existe. Ceci conduit assez vite, tout en excitant la curiosité de l'élève, ce qui est excellent pour capter et retenir son attention, après avoir écrit le trinôme sous la forme

$$(ax^2 + bx + c) - (ax'^2 + bx' + c),$$

ce qui donne $(x - x')(ax + ax' + b)$, à prouver que l'existence d'une racine entraîne l'existence d'une deuxième, et de pas davantage, à établir *a priori* les relations entre les coefficients et les racines et à en déduire les formules de calcul des racines par la recherche de deux nombres connaissant leur somme et leur différence, ce qui n'implique aucun contact avec les systèmes d'équations. En outre, tout ceci assure en même temps la discussion de l'existence des racines et, comme la mise sous forme canonique $a(x - x')(x - x'')$ est acquise dès le début, on a en même temps, à très peu près, l'intuition aidant pour le reste, le signe du trinôme et la résolution des inéquations du second degré.

A ce moment-là, il ne sera peut-être pas mauvais de revenir sur ses pas pour obtenir du coup la variation de $ax^2 + bx + c$, en ayant soin, pour justifier ce retour en arrière, de faire constater à l'élève que la mise du trinôme, sous forme de produit, qui a été payante dans l'étude du signe, ne l'est nullement dans l'étude actuelle. Comme l'introduction d'une racine x' a permis l'étude précédente et que celle de l'autre racine x'' l'aurait permise aussi, on peut intéresser les élèves à poursuivre en leur disant qu'il serait peut-être intéressant de faire intervenir une valeur de x qui ne serait ni x' , ni x'' , mais un nombre intimement lié à ces deux-là, permettant en quelque sorte de n'en avantager aucun. Un instant suffit pour leur faire

introduire la demi-somme des racines $-\frac{b}{2a}$. Penser à comparer le trinôme à sa valeur pour $x = -\frac{b}{2a}$ devient alors tout naturel et l'on aboutit ainsi à la relation

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

que l'on va utiliser aussitôt à l'étude

de la variation du trinôme. [C'est peut-être plutôt maintenant que, à titre d'exercice, on peut leur faire chercher cette forme du trinôme par le procédé classique qui consiste à repérer le commencement du développement du carré d'une somme, à mettre ce carré en vedette et à compléter en conséquence puis, la forme canonique étant acquise, à leur faire trouver ce qui a été établi plus haut sur $ax^2 + bx + c$].

Il peut être encore très éducatif de leur faire apparaître comme très importante la valeur $-\frac{b}{2a}$ de x de la façon suivante. S'il a été facile d'étudier $ax + b$, c'est

certainement parce que x n'y figure qu'à un endroit ou, dit plus mathématiquement, qu'au premier degré. La difficulté pour $ax^2 + bx + c$ provient donc de la présence de x à deux endroits, sous forme de x et x^2 . Quoi de plus naturel que de se demander alors s'il ne serait pas possible de remplacer x par une autre quantité X liée à x d'une manière telle que $ax^2 + bx + c$ devienne une expression où X ne figure qu'à un seul endroit. Comme $ax^2 + bx + c$ est du second degré en x , il faut évidemment orienter la recherche de manière que son équivalent en X soit aussi du second degré, donc choisir d'abord la relation entre x et X du premier degré, par exemple de la forme $x = X + h$, et déterminer ensuite h de manière que le terme du premier degré en X n'existe pas dans l'équivalent en X de $ax^2 + bx + c$. Le procédé réussit

puisque l'on trouve $h = -\frac{b}{2a}$ et l'on a ainsi une autre façon d'introduire l'étude complète de $ax^2 + bx + c$ (équations et inéquations du second degré, signe et variation du trinôme).

Toutes ces méthodes sont aussi éducatives les unes que les autres, en ce sens

qu'elles sont intimement liées et qu'elles risquent fort de mettre en vedette des façons de procéder que l'élève estimera payantes et qu'il sera tout naturellement porté à utiliser sur d'autres terrains, en géométrie par exemple, surtout lorsque l'initiation aux vecteurs aura été faite. Tout comme le choix d'une valeur particulière de x pour l'étude d'une expression en x en algèbre, le choix judicieux d'un point particulier dans l'étude d'une question géométrique suffit assez souvent à mettre cette étude sur une bonne voie et à la conduire à son terme.

Et, puisque nous avons prononcé le mot de *vecteurs*, quels outils puissants ne va-t-on pas trouver là, grâce aux opérations que l'on peut définir sur ces êtres géométriques, pour mieux atteindre le but que nous avons signalé *en vue d'un meilleur rendement, d'un exposé plus succinct, d'une fatigue moins grande et d'une compréhension plus complète ?*

Puisque tout le monde est d'accord pour ne pas trop redouter, tout au moins dès la Seconde, la notion de rapport de deux vecteurs de même direction ou, ce qui revient au même, de produit d'un vecteur par un scalaire, donc aussi sans doute la notion de barycentre (elle aiderait beaucoup nos collègues physiciens à exposer les centres de gravité, sans qu'il soit besoin de parler de produit vectoriel) et que beaucoup redoutent — je n'ai jamais bien compris pourquoi — la notion de produit scalaire, je n'insisterai que sur cette dernière. Tout le monde sent, je n'en doute pas un instant, combien cette notion serait utile pour faire apparaître, avec rapidité et non sans élégance, toutes les relations métriques classiques... et même beaucoup d'autres. Il faut croire alors que c'est l'introduction du produit scalaire, disons sa mise en contact avec les élèves, qui seulement est redoutée. Comme il est possible d'introduire le produit scalaire de plusieurs façons différentes, on a le choix. La plus simple est celle qui s'appuie sur la similitude des triangles parce qu'elle se passe de trigonométrie. On peut cependant en donner une autre qui ne suppose connu que le théorème de Pythagore et que certains collègues ont certainement expérimentée. La voici :

D'abord, définir le produit scalaire de deux vecteurs de même direction comme étant — la notion de rapport de ces deux vecteurs nous y conduit — le produit des mesures algébriques des deux vecteurs, celles-ci étant prises sur un axe de même direction et affecté d'un vecteur unitaire. Ensuite, les vecteurs étant supposés de même origine, soient \vec{OA} et \vec{OB} , de constater que l'on a $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ (notation adoptée pour le produit scalaire) $= OI^2 - IA^2$, I étant le milieu de AB . Enfin, les vecteurs étant maintenant de directions différentes, avec la même origine, soient \vec{OA} et \vec{OB} , d'appeler produit scalaire des deux vecteurs \vec{OA} , \vec{OB} (notation $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$) l'expression $OI^2 - IA^2$, I étant toujours le milieu de AB . Il sera tout indiqué, à ce moment-là, de montrer à l'élève que, si l'on remplace les vecteurs \vec{OA} , \vec{OB} par deux vecteurs respectivement équipollents $\vec{O'A'}$, $\vec{O'B'}$, on a $\vec{O'A'} \cdot \vec{O'B'} = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$, ce qui lui prouvera que la nouvelle opération définie est une opération sur les vecteurs libres, comme toutes celles qui lui ont été déjà définies.

Au surplus, la définition choisie se prête très aisément et très rapidement à l'établissement des diverses propriétés. En effet, on a immédiatement :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OA} ; \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0,$$

si \vec{OA} et \vec{OB} sont perpendiculaires, et réciproquement ; B' et I' étant les projections orthogonales de B et I sur la droite OA , $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OI^2 - IA^2 = OI'^2 - I'A^2$ (avec Pythagore) $= \vec{OA} \cdot \vec{OB}'$. La distributivité par rapport à l'addition constatée ici $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ ou $\vec{OA} \cdot (\vec{OB}' + \vec{B'B}) = \vec{OA} \cdot \vec{OB}' + \vec{OA} \cdot \vec{B'B}$, puisque ce dernier produit est nul, conduit à penser qu'elle est générale, ce qui est bien vrai, car avec des notations évidentes, on a $\vec{OA} \cdot (\vec{OB} + \vec{OC}) = \vec{OA} \cdot \vec{OS} = \vec{OA} \cdot \vec{OS}' = \vec{OA} \cdot \vec{OS}' =$

$$\overline{OA} \cdot (\overline{OB}' + \overline{OC}') = \overline{OA} \cdot \overline{OB}' + \overline{OA} \cdot \overline{OC}' = \overline{OA} \cdot \overline{OB}' + \overline{OA} \cdot \overline{OC}' = \overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OA} \cdot \overline{OC}$$

Des élèves de Seconde peuvent très bien comprendre tout ce qui précède et, à plus forte raison, des élèves de Mathématiques. On remarquera, en outre, que ceci n'impose aucune notion de trigonométrie. Il y a évidemment quelques dangers à redouter, donc à éviter, provenant peut-être des définitions elles-mêmes, mais ceci n'est-il pas constant en Mathématiques, et même ailleurs ?

Il nous a été reproché, à MITAULT et à moi, dans un de nos ouvrages, de n'avoir pas assez mis en vedette l'équation de $a \cos x + b \sin x + c = 0$, ceci sous le prétexte qu'une méthode de résolution a été donnée à propos de l'établissement des formules donnant $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ et une autre à propos des transfor-

mations trigonométriques, ce qui, dans l'ouvrage a distancé les deux méthodes. Si nous avons péché là par disjonction, c'est que nous avons estimé que la réunion était préférable ailleurs. A mon avis, ce qui compte, ce qui est capital, c'est de pouvoir exprimer $a \cos x + b \sin x + c$ au moyen d'une seule ligne trigonométrique et de choisir cette ligne, en modifiant l'arc au besoin, de manière à avoir finalement une expression rationnelle par rapport à la ligne choisie. Voilà pourquoi la première méthode de résolution de ladite équation a été donnée à propos de l'établissement des

formules qui donnent $\cos x$, $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$ en fonction rationnelle de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, comme

exemple soulignant l'utilité de ces formules, et que la deuxième méthode a été donnée à propos des transformations qui s'appuient sur l'introduction d'un arc auxiliaire, comme exemple illustrant l'utilité des dites transformations. La résolution de l'équation $a \cos x + b \sin x + c = 0$ n'est, au fond, qu'un aspect du problème plus général de l'étude de l'expression $a \cos x + b \sin x + c$ (signe et variation) et ce problème lui-même donne seulement un terrain, parmi tant d'autres, où lesdites transformations (des deux espèces) sont d'une utilité incontestable. Donc, ce qui doit surtout être souligné aux yeux des élèves, c'est la richesse de puissance des dites transformations dans tout le domaine des Mathématiques.

Réunir judicieusement et, pour cela, rapprocher tout ce qui peut et doit l'être, dans l'état actuel de la Science, en disloquant au besoin des groupements routiniers (1) pour en créer de plus vastes, en profondeur surtout, telle me paraît être la clef de toute réforme dans l'enseignement des Mathématiques. Ceci, comme nous l'avons longuement expliqué sur quelques exemples et pourrions l'expliquer sur beaucoup d'autres, donnera satisfaction à tout le monde, au professeur en augmentant surtout la qualité du bagage de l'élève, à l'élève en comblant avantagement les fossés qu'il redoute tant d'une classe à la suivante, d'un enseignement au suivant et aux parents en diminuant considérablement les dangers du surmenage. Au surplus, la Science y trouvera largement son compte, car on aura réussi à introduire dans le domaine intellectuel une sorte de travail en série qui sera payant, et cela sans détruire aucunement les qualités d'analyse, de synthèse, de rigueur et de finesse, en un mot d'intelligence complète, qu'exige toute recherche, quelle qu'elle soit.

R. ESTÈVE.

(1) L'ordre euclidien en géométrie a paru si parfait pendant deux millénaires qu'il serait vraiment inélégant et surtout injuste, de le qualifier de routinier. Cependant, maintenant que le vecteur, pour ne parler que de cette notion moderne, a enfin acquis droit de cité dans l'Enseignement Élémentaire, ne pourrait-on pas concevoir un autre ordre dans l'enseignement des vérités géométriques, tout au moins à partir de la Seconde, en subdivisant par exemple en géométrie linéaire et géométrie métrique ? M. BOULIGAND, dans son petit ouvrage *L'accès aux principes de la géométrie euclidienne*, édité par Vuibert, ne nous fait-il pas entrevoir, par la richesse des idées développées dans l'ouvrage, tout ce qu'il y aurait à gagner à quitter des sentiers un peu battus ? Est-il possible de trouver sur ces questions un guide plus éclairé ?