Sur les inéquations trigonométriques

Dans un manuel récent pour la classe de Mathématiques, l'auteur écrit, à propos d'un exemple d'inéquation : « On constate sur cet exemple qu'une inéquation « trigonométrique ne peut être résolue avec précision que si l'on indique dans quel « intervalle on choisit la détermination de l'inconnue. »

Cette affirmation me paraît bien pessimiste ! L'exemple conduisait à :

$$-1 < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$$

la *totalité des solutions* est fournie sans conteste par $-45^\circ < x + k.180^\circ < 60^\circ$. Cette présentation est toujours possible, *à la condition de localiser le module* (180° ou 360°) *contre l'argument inconnu*. Les bornes sont des valeurs particulières ; ici on pourrait prendre aussi bien 135° et 240°.

On peut ainsi faire résoudre complètement aux élèves toute équation immédiate présentant un seul argument inconnu de la forme $u = nx + \varphi$ (n entier positif). Par exemple, soit l'inéquation $\cos u > \cos \alpha$ si l'on prend pour α l'angle positif inférieur à 180°, on a $-\alpha < u + k.360^\circ < \alpha$ d'où l'on tire facilement

$$-\frac{\alpha+\varphi}{n} < x + k.\frac{360^\circ}{n} < \frac{\alpha-\varphi}{n}.$$

La différence entre les bornes est $\frac{2\alpha}{n}$, positive et inférieure à l'arc de symétrie rotative $\frac{360^\circ}{n}$; l'image graphique de la solution, sur le cercle trigonométrique, se compose donc de n arcs égaux sans empiétement.

Pour $\cos u < \cos \alpha$ on aurait $\alpha < u + k.360^\circ < 360^\circ - \alpha$.

Pour les autres équations immédiates en *sin* ou *tg*, on choisira pour α l'angle aigu, positif ou négatif :

$$\sin u > \sin \alpha \qquad \alpha < u + k.360° < 180° - \alpha$$

$$\sin u < \sin \alpha \qquad 180° - \alpha < u + k.360° < 360° + \alpha$$

$$\operatorname{tg} u > \operatorname{tg} \alpha \qquad \alpha < u + k.180° < 90°$$

$$\operatorname{tg} u < \operatorname{tg} \alpha \qquad -90° < u + k.180° < \alpha$$

Si n est un entier négatif, il suffit de changer le sens des inégalités lorsqu'on divise par n.

A mon avis, ces résolutions sont bien du niveau de la classe ; les résultats sont concrétisés sans difficulté par une image graphique sur le cercle trigonométrique.

Il n'en est plus de même si n n'est pas entier. *La double inégalité reste correcte,* mais l'image graphique peut devenir illusoire, à cause des chevauchements des arcs suivant certaines valeurs de k.

Les complications augmentent encore s'il y a plusieurs arguments inconnus. Chacun devant être accompagné d'un terme $k.360°$, $h.360°$ ..., il y a lieu, dans la résolution, de considérer h, k ... : comme des inconnues ; on pourra ainsi écrire complètement les solutions.

Voici un exemple où l'image graphique reste concrète au départ :

$$\cos(3x + 10°) < \cos(x + 30°).$$

En rassemblant dans le premier membre et factorisant, on obtient un produit de deux sinus. On est amené à résoudre deux systèmes dont l'un est :

$$\begin{cases} \sin(2x + 20°) > 0, \\ \sin(x - 20°) > 0, \end{cases}$$

qui conduit facilement au système :

$$\begin{cases} -10° < x + k.180° < 80°, \\ 20° < x + h.360° < 200°, \end{cases}$$

la solution graphique se compose des deux arcs (20°, 80°) et (170°, 200°) qui résultent de l'analyse directe de l'image graphique, ou du calcul suivant :

Cherchons la relation entre h et k, en éliminant x. Pour cela, on change les signes (et les sens) dans la seconde ligne, on retourne les inégalités pour retrouver le sens $<$, et on ajoute membre à membre. On obtient : $-230° < (k - 2h).180° < 60°$ d'où les deux possibilités : $k = 2h - 1$ et $k = 2h$; remplaçons k par sa valeur dans le système initial ; en posant $y = x + h.360°$, on trouve bien :

$$170° < y < 200° \qquad \text{et} \qquad 20° < y < 80°.$$

Voici maintenant un exemple où les solutions sont distribuées au départ sur tous les points du cercle (mais toutes les déterminations ne sont pas valables)

$$\cos 2x < \cos(x + 30°),$$

qui donne aussi un produit de sinus, et l'un des systèmes (sinus positifs) donne les solutions :

$$\begin{cases} 30° < x + k.720° < 390°, \\ -30° < x + h.240° < 110°. \end{cases}$$

L'élimination de x donne ici, entre h et k, la relation

$$-80° < (3k - h).240° < 400°.$$

d'où les deux possibilités : $h = 3k - 1$ et $h = 3k$.

Dans le premier exemple, k (avec les valeurs $2h - 1$ et $2h$) pouvait prendre toutes les valeurs possibles ; ici, au contraire, on ne peut pas donner à h les valeurs de la forme $3k + 1$.

En remplaçant h par ses valeurs dans le système initial, et en posant

$y = x + k.720°$ (k entier quelconque), on obtient

$$30° < y < 110° \qquad \text{et} \qquad 230° < y < 350°.$$

Remarquons que, pour chaque point solution, une détermination sur deux seulement est acceptable.

Si nous prenons maintenant le second système (les deux sinus négatifs), on obtient, par une résolution analogue : $-330° < y < -250°$ et $-130° < y < -10°$. Les bornes de ces intervalles sont les mêmes que celles du premier système, avec un décalage de $360°$. Comme y a pour module $720°$, il en résulte que, pour ces arcs, les déterminations qui n'étaient pas solutions du premier système sont solutions du second. Finalement, les solutions complètes de l'inéquation sont (p entier quelconque)

$$30° < x + p.360° < 110° \qquad \text{et} \qquad -130° < x + p.360° < -10°.$$

G. THOVERT,
Professeur au Lycée Ampère, Lyon.