Notes diverses

Tangente et dérivée

C'est en Première A, B, C, Moderne, Technique, que la dérivée fait son apparition ; aux programmes de ces cinq classes, elle figure dans les termes suivants :

« *Définition et signification géométrique de la dérivée d'une fonction pour une* « *valeur donnée de la variable.*

« *Applications à la détermination des tangentes aux courbes $y = f(x)$ étudiées* « *antérieurement.* »

Ce libellé donne à penser que la dérivée est l'instrument indispensable à la recherche analytique d'une tangente.

On calcule donc la dérivée pour la valeur *donnée* x_0, puis, à l'aide de la dérivée-formule ainsi trouvée, on calcule le coefficient angulaire de la tangente au point *donné* M_0 d'abscisse *donnée* $x_0 = -3$ par exemple.

On aperçoit alors rapidement, au contact avec les élèves, combien ce formalisme, certes commode, est dépourvu de substance et de valeur éducative.

Et on arrive ainsi à proscrire, plus ou moins officieusement, l'emploi de la dérivée-formule et à exiger que tout calcul de dérivée se fasse à partir de la définition de la dérivée : limite de $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ lorsque x_1 tend vers x_0.

Mais, alors, quel détour inutile ! Les élèves de Première savent depuis longtemps :

1° que la tangente à une courbe en M_0 est la limite de la sécante M_0M_1, lorsque M_1 tend vers M_0 ;

2° que le coefficient angulaire de la droite M_0M_1 est $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$; d'où il résulte immédiatement que le coefficient angulaire de la tangente en M_0 à la courbe $y = f(x)$ est la limite de $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ lorsque x_1 tend vers x_0.

Pour qu'un élève soit à même d'opérer ainsi, il n'est pas nécessaire qu'il ait entendu parler de la dérivée ; il est même bien préférable qu'il n'en ait jamais entendu parler.

Sa curiosité toute neuve s'attachera en effet à cette recherche *directe* du coefficient angulaire d'une tangente ; en multipliant les applications de cette méthode directe, il prendra lui-même conscience du rôle essentiel que joue la limite de $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, après quoi il trouvera naturel :

1° de donner un nom à cette limite, et de l'appeler, par exemple, « dérivée » ;

2° de calculer cette dérivée pour la valeur donnée, mais littérale, $x = x_0$, de manière à disposer, pour la pratique, d'une dérivée-formule commode jouant le même rôle de *formule* que toutes celles dont il connaît déjà l'emploi :

$$L = 2\pi R, \qquad S = \pi R^2, \qquad V = abc, \text{ etc...}$$

Au lieu d'aller de la dérivée à la tangente, comme le prescrit le programme, on aura ainsi conduit cet élève de la tangente à la dérivée, ce qui est à la fois l'enchaînement naturel et le déroulement historique.

On m'objectera sans doute que le programme ne *prescrit* pas, mais qu'il laisse chaque professeur libre de sa méthode, libre de l'ordre dans lequel il traite les questions.

Sans doute ; on ne saurait cependant nier l'influence indicative et suggestive du libellé des programmes ; leurs éminents auteurs ne doivent pas, par excès de modestie, sous-estimer cette influence.

Quoi qu'il en soit de cette responsabilité des programmes, j'incline à penser que, sur ce point, nous avons tous plus ou moins à faire notre *mea culpa* : imprégnés de dérivées au cours de nos études mathématiques, il ne nous est pas facile de nous remettre dans l'esprit d'un élève de Première, c'est-à-dire, à peu de chose près, dans l'esprit des chercheurs qui abordèrent les premiers le « Problème les tangentes ».

Comme le dit Jules TANNERY dans la préface de ses *Notions de Mathématiques* (1) : « A force de manier les choses, on oublie souvent ce qu'elles sont ; on « ne se rappelle plus que la façon de s'en servir. »

Je dois dire que, dans ce magistral traité, la dérivée n'apparaît qu'après une initiation qu'on est tenté de qualifier d'affectueuse, tant elle est délicatement progressive ; en voici les étapes :

§ 1 : tangentes déterminées géométriquement (cercle, parabole) ;

§ 2 : tangentes déterminées analytiquement (cercle, parabole, courbes $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$) ;

§ 3 : dérivée (à partir de la tangente, et aussi à partir de la vitesse).

Ce qui est déplaisant dans la situation actuelle, c'est qu'on ne sait plus bien ce qui est permis et ce qui est défendu. Dans notre *Bulletin* de mai 1951, pages 208 à 213, on nous a affirmé que l'emploi de la fonction-dérivée était formellement interdit. Je veux bien, mais :

(1) Ouvrage édité en 1903 chez Delagrave, et destiné aux élèves de Philosophie, du P.C.N., etc...

1° si c'est vrai, qu'on le dise explicitement, officiellement et non plus sous le manteau, en catimini ;

2° à supposer que ce soit vrai, qu'on nous explique alors à quoi peut bien servir la dérivée en Première.

Il est interdit, et à bon droit, de l'employer pour la variation ; si, vraiment, il était également interdit d'employer la formule-dérivée pour calculer le coefficient angulaire d'une tangente, la dérivée ne serait plus qu'une étiquette posée sur ce coefficient angulaire, c'est-à-dire du pur verbalisme ; il vaudrait beaucoup mieux n'en pas parler du tout.

Le même commentaire peut être fait au sujet de la *vitesse à un instant donné*, qui figure au programme de Première C et Moderne.

C'est pourquoi je ne crois pas à cette interdiction absolue de l'emploi de la dérivée-formule pour construire une tangente ou calculer une vitesse.

Mais ceci n'est que mon opinion personnelle ; je ne la donne pas comme un écho de l'Olympe.

J'ai d'ailleurs l'impression que mon incrédulité à ce sujet est partagée par un grand nombre d'entre nous ; dans ce même *Bulletin* de mai 1951, nous lisons en effet, à la page 240 : « Il est entendu que le Bureau demandera à l'Inspection géné-
« rale de préciser que les élèves ont le droit d'utiliser la formule $y' = 2ax + b$ (s'il
« y a par exemple une douzaine de tangentes à construire à une parabole).

« On pourra ainsi parler de « vitesse » dans le mouvement uniformément varié
« et en faire le graphique. »

Je suis ainsi naturellement amené à demander que cette question soit reprise, dans une atmosphère de libre discussion.

Après quoi notre Président, mandaté par son Comité, pourrait signaler à la haute autorité compétente la nécessité de préciser ce point important, soit en revoyant le texte des programmes, soit en élaborant une circulaire explicative.

F. BRACHET.