

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Publication trimestrielle

Administration : 23, Boulevard Saint-Germain, Paris (5^e)

SOMMAIRE

PREMIÈRE PARTIE

- | | |
|---|----|
| I. Documents officiels : <i>Agrégation de Mathématiques (Hommes). Rapport de M. l'Inspecteur général ROBERT, Président du Jury, sur le concours de 1952</i> | 10 |
| <i>Concours général de Mathématiques (Classe de Première), en 1952. Rapport de M. l'Inspecteur général DESFORGE, Président du Jury.</i> .. | 45 |
| II. Réunion du Comité : <i>Séance du 30 octobre 1952</i> | 56 |

DEUXIÈME PARTIE

- | | |
|--|----|
| I. Initiation à la pensée mathématique. — <i>Réunion du 15 mai 1952</i> | 57 |
| 1. <i>Les groupes au travail</i> (Mlle Lucienne FÉLIX, M. VIOLETTE) | 57 |
| 2. <i>Les difficultés non logiques de l'enseignement des Mathématiques</i> (M. FOUCHÉ) | 61 |
| II. Notes diverses : | |
| F. BRACUET : <i>Tangente et dérivée</i> | 65 |
| G. THOVERT : <i>Sur les inéquations trigonométriques</i> | 67 |
| A. LENTIN : <i>Sur l'unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers</i> | 69 |
| R. MAILLARD et A. MILLET : <i>Symbolisme, terminologie</i> | 69 |
| III. Bibliographie : Y. CROZES, A. FOUCHÉ, A. HUISMAN | 70 |
| Vient de paraître | 71 |

Cotisations : 400 fr.

Abonnements : 800 fr.

Expédition des Bulletins : 29, rue d'Ulm, Paris 5^e

Abonnement d'un an au *Bulletin* (prix net) : France

800 fr.

Prix d'un numéro du *Bulletin* ou d'un *Supplément* (prix net) : France. 200 fr.

Les membres de l'Association (cotisation : 400 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Énoncés*.

Régler par chèque postal en utilisant l'adresse suivante :

Paris, Cc. 5708-21

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5^e)

Couverture page II

Présidents d'Honneur

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

- Président :* M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris (5^e).
Vice-Présidents : Mlle MASSON, 3, avenue de la Porte-de-Montrouge, Paris (14^e).
M. BIGUENET, 41, rue Mad.-Michelis, Neuilly (Seine).
M. CAGNAC, 53, rue de Babylone, Paris (7^e).
M. GIRAULT, 5, rue Isabey, Paris (16^e).
Secrétaires : M. BENOIST, Collège Diderot, 60, bd de La Villette, Paris (19^e).
M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16^e).
M. ROSTOLLAND, professeur au Lycée Marcel-Roby, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).
Trésorier : M. LEGRAND, 3 bis, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).

Comité :

Membres élus

Sortants en 1953 : Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (E.N.P. St-Ouen) ; M. CHAZAL (*Saint-Louis*) ; M. GIRARD (*Arago*) ; M. GUITTON (*Saint-Louis*) ; M. LEGRAND (Compiègne).

Sortants en 1954 : Mlle BARBIER (*Victor-Duruy*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. GIRAULT (*J.-B. Say*) ; M. JACQUEMART (*Pasteur*) ; M. MINOIS (*Lakanal*) ; M. RUFF (*Voltaire*).

Sortants en 1955 : M. CAGNAC (*Louis-le-Grand*) ; M. DURRANDE (*St-Louis*) ; M. HUISMAN (*Montaigne*) ; M. MARVILLET (Strasbourg, *Kléber*) ; M. MONJALLON (*St-Louis*) ; M. SINGIER (*St-Louis*).

Sortants en 1956 : Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; M. BAY (*Condorcet*) ; M. CARALP (*Montaigne*) ; M. CROZES (*Henri-IV*) ; M. DELTHEIL (Fac. Sc. Toulouse) ; M. PÉTRUS (*Janson*).

Membres de droit

Mme NICOU (Lyon, *Marie-Vidalenc*) ; M. CANONGE (Castres) ; M. DUVAL (*Dorian*) ; M. POUX (Saint-Cloud).

Rapporteurs

Classes Nouvelles : Mlle MASSON ; *Enseignement moderne court :* M. GIRAULT ; *Enseignement technique :* M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. GIRAULT ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, M. MINOIS, Mlle PROTIN (S. Ex.) ; *Mathématiques Supérieures :* M. DURRANDE ; *Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques : Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — Concours général : M. SINGIER ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Mathématiques et Psychologie scolaire :* M. MONAVON ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (Besançon) ; *Dijon :* M. EUVRARD (Dijon) ; *Lille :* M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (Lyon, *Ampère*) ; *Montpellier :* M. DUSSOL (Montpellier) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (Nancy, *Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENNAULT (Rennes) ; *Strasbourg :* M. EHRHART (Strasbourg, *Kléber*) ; *Maroc :* M. QUEYSANNE (Casablanca, *Lyautey*) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (Tunis, *Carnot*).

MATHÉMATIQUES

Ouvrages conformes aux nouveaux programmes

A PARAÎTRE JUILLET 1953 :

LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Troisième.

Edition Lycées et Collèges, 1 vol. br. : cart. :
Edition Cours Compl. et Enseignement court, 1 vol., br. : cart. :

SPECIMEN GRATUIT SUR DEMANDE

LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Quatrième.

L'ouvrage débute par l'étude des puissances des nombres arithmétiques et son application à la théorie de la décomposition en facteurs premiers, du P.G.C.D. et du P.P.C.M. L'initiation à l'algèbre utilise des exemples concrets d'où émanent des schémas conduisant à la relation de Charles, souvent utilisée par la suite, afin d'habituer les élèves.

Dans la partie réservée à la géométrie, la simplicité a été recherchée, de même que la mise en relief des réciproques. Un grand nombre d'exercices et de problèmes ont été classés par ordre de difficulté, avec renvoi aux différents paragraphes du cours, ainsi que dans tous les ouvrages de la collection.

Enfin, quelques solutions types, complètement rédigées, fourniront aux élèves les techniques fondamentales pour la résolution de certains problèmes classiques qui ne sont pas une application immédiate du cours.

Edition Lycées et Collèges, 1 vol. br. : 450 f., cart. : 550 f.
Edition Cours Compl. et Enseignement court, 1 vol. br. : 490 f., cart. : 590 f.

LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Sixième.

En plus de la mise au point des méthodes de calcul et du rappel des bases du système métrique déjà étudié antérieurement, les auteurs se sont efforcés de faciliter aux élèves l'acquisition des méthodes de résolution des problèmes en les classant suivant des types déterminés et en utilisant très tôt les règles de trois. Le choix des problèmes est très varié. Ils sont précédés d'une lettre : A, pour les applications immédiates du cours, B, pour les problèmes normaux de devoirs, C, pour les exercices plus difficiles. Le contact étroit entre le cours et les exercices d'application est assuré par des renvois placés à la fin de chaque paragraphe. Les données numériques ont été adaptées aux cours actuels. Les notations abrégées utilisées pour les unités du système métrique sont conformes au décret du 28 février 1948.

Edition Lycées et Collèges Br. : 250 f., cart. 350 f.
Edition Cours Complémentaires Br. : 270 f., cart. 370 f.

LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Cinquième.

675 exercices (805 pour l'édition Cours Complémentaires) classés selon le degré de difficulté, rattachés à chaque paragraphe du cours, permettent d'en vérifier la compréhension, la solution de certains exemples-types facilitant l'acquisition des méthodes de résolution. Chaque chapitre du cours est terminé par un résumé qui rassemble les propriétés et les théorèmes dont la connaissance est indispensable.

Edition Lycées et Collèges, 1 vol. Br. : 320 f., cart. 400 f.
Edition Cours Complémentaires, 1 vol. Br. : 330 f., cart. 430 f.

Classe de SCIENCES EXPERIMENTALES :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — MATHÉMATIQUES. (Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie, Mécanique, Cosmographie).

Tout le programme se trouve réuni en un volume qui donne aux élèves des méthodes pratiques ; les questions sont traitées avec le maximum de simplicité, sans toutefois sacrifier l'essentiel de l'esprit mathématique Br. : 860 f., cart. 960 f.

Classe de PHILOSOPHIE :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — ALGÈBRE ET COSMOGRAPHIE Br. : 360 f., cart. 440 f.

Classe de MATHÉMATIQUES : COURS COMPLET

LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE Br. : 730 f., cart. 830 f.
" — GEOMETRIE DESCRIPTIVE ET COTÉE Br. 290 f.
" — ARITHMETIQUE Br. 300 f.
" — MECANIQUE Br. : 260 f., cart. 350 f.
LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — COSMOGRAPHIE, Br. : 350 f., cart. 450 f.
LESPINARD et PERNET. — ALGÈBRE Br. : 640 f., cart. 740 f.
" — TRIGONOMETRIE Br. : 395 f., cart. 495 f.
" — SOLUTIONS DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Bac.,
2^e partie, classe de Mathématiques 350 f.

Classe de Première C. et M.

LESPINARD et PERNET. — SOLUTIONS DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Bac.,
1^{re} partie, séries C. et M. 295 f.

MASSON & C^{ie}, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6^e

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES

G. CAGNAC
Professeur de Math. Spéc.
au Lycée Louis-le-Grand

L. THIBERGE
Inspecteur Général
de l'Éducation Nationale

Nouveauté :

GÉOMÉTRIE

CLASSES DE TROISIÈME

PAR

L. THIBERGE
Inspecteur Général
de l'Éducation Nationale

E. GILET
Censeur des Études
au Lycée J.-B. Say

Un vol. avec figures, exercices et problèmes de révision, cartonné 650 fr.

Rappel :

Arithmétique, Algèbre, cl. de 3^e, par L. THIBERGE et E. GILET.

Un vol. avec figures, exercices et problèmes de révision, cart. 800 fr.

[L'ouvrage complet, en un volume unique, cart. 1.400 fr.]

Précédemment parus :

Arithmétique, cl. de 6^e, par L. THIBERGE, E. GILET et J. SIROS.

Un vol. avec fig., exercices et problèmes ; cart. 480 fr.

Géométrie et Arithmétique, cl. de 5^e, par L. THIBERGE et E. GILET.

Un vol. avec fig., exercices et problèmes ; cart. 580 fr.

Arithmétique, Algèbre et Géométrie, cl. de 4^e, par L. THIBERGE

et E. GILET. Un vol. avec fig., exercices et problèmes ; cart. 600 fr.

Géométrie plane, cl. de 2^e C et Mod., par J. DOLLON et E. GILET.

Un vol. avec fig., exercices et problèmes ; cart. 650 fr.

Algèbre, cl. de 2^e C et Mod., par J. DOLLON et J. SIROS. Un volume

avec fig., exercices et problèmes ; cart. 520 fr.

Géométrie dans l'espace, cl. de 1^e C et Mod., par J. DOLLON et

E. GILET. Un vol. avec fig., exercices et problèmes ; cart. 720 fr.

Bulletin de l'Association
des
Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement public

PREMIÈRE PARTIE

I. Documents officiels

Agrégation de Mathématiques (Hommes)

Rapport de M. l'Inspecteur général ROBERT, Président du Jury
(SESSION 1952)

Le Jury était composé de M. ROBERT, inspecteur général de l'Instruction publique, président ; M. MILLOUX, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, vice-président ; M. ROGER, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux ; M. CAGNAC, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand ; M. DOLLON, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Louis-le-Grand.

EPREUVES ECRITES

Elles ont eu lieu les 26, 27, 29 et 31 mai.

Dans le texte du sujet de Mathématiques Élémentaires, figurait une lettre dont la signification n'était pas antérieurement indiquée. La rectification de cette omission, faite le 26 mai, ne put atteindre tous les centres de compositions écrites, ce qui entraîna l'annulation de l'épreuve de Mathématiques Élémentaires. Une nouvelle composition fut effectuée le 18 juin.

Sur cent soixante-neuf candidats inscrits, cent quarante-neuf ont composé le premier jour, cent quarante-cinq le deuxième, cent quarante et un le troisième jour, cent trente-sept le quatrième jour. A l'épreuve de Mathématiques Élémentaires du 18 juin ne prirent plus part que cent trente-cinq candidats.

Le jury, réuni le 7 juillet, a déclaré admissibles les candidats ayant obtenu un total au moins égal à 29 (sur 80) pour l'ensemble des quatre épreuves. La liste des admissibles a compris quarante-six candidats. Ce nombre dépasse de quatre unités celui des admissibles de 1951, année où les notes d'écrit ont été anormalement basses. La comparaison des épreuves avec celles de 1950 montre que le niveau des admissibles est sensiblement le même (7,25 sur 20 comme moyenne inférieure atteinte par les admissibles en 1952 contre 7 en 1950). Toutefois, le nombre des candidats ayant effectivement composé tend à décroître : de cent quatre-vingts en 1950, comme en 1951, il est passé à cent quarante-neuf en 1952 : les concours de recrutement, dont le nombre était deux en 1950, ont été au nombre de quatre en 1952 (agrégation ; certificat d'aptitude à l'enseignement dans les collèges, section mathématiques-physique ; C.A.P.E.S. (ancienne formule) ; concours d'admission aux centres pédago-

riques régionaux). Ceci explique la diminution du nombre des candidats tentant l'agrégation. Mais le pourcentage des admissibles est passé de 30 % (en 1950) à 31 % en 1952 après n'avoir été que de 23 % en 1951.

La liste des admissibles de 1952 a compris sept professeurs des lycées, dix professeurs des collèges, deux professeurs des collèges techniques, deux professeurs (délégués) des écoles normales, deux assistants des Facultés, quatre stagiaires d'enseignement, un adjoint d'enseignement, un instituteur, soit au total vingt-neuf candidats participant à des charges d'enseignement ou de surveillance. Du côté des étudiants, neuf élèves de l'École Normale de la rue d'Ulm, deux auditeurs, quatre élèves de l'École Normale de Saint-Cloud, un ancien élève de cette école en congé pour service militaire, un seul étudiant libre.

Parmi les quarante-six admissibles figuraient quinze admissibles des sessions antérieures.

*

**

Les compositions écrites (1) ont donné lieu aux observations qui suivent :

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES : M. DOLLON

Le problème proposé n'exigeait que des connaissances élémentaires sur les déplacements : il était relativement court et la plupart des candidats ont su exploiter le sujet dans des limites fort honorables. Nous avons même eu la grande satisfaction de trouver une copie ayant complètement traité le sujet, d'une rédaction nette et vigoureuse, où la pensée s'affirme aussi claire que précise. Compte tenu du temps limité, qui exclut la possibilité de faire une étude et une rédaction très détaillées, le jury a estimé que la note maximum pouvait être attribuée à cet excellent travail.

I. — 1° Il semble que la notion de déplacements (V) équivalents (mod. D), c'est-à-dire transformant tout point p de la droite (D) en le même point p' de (D') transformée de (D), ait un peu dérouté une forte fraction des candidats.

Ceux-ci se sont tirés d'affaire en envisageant un vecteur $\vec{hp_2}$ porté par (D) transformé par le vissage (V) en un vecteur $\vec{h'_1p'_2}$ de (D'), l'existence d'une rotation (R) associant ces deux vecteurs est alors classique, mais l'inconvénient de la méthode tient à la disparition des données naturelles du vissage : translation et rotation.

Précisons la réduction canonique d'un déplacement (V₁) équivalent à (V) : à cet effet soient (C) et (C') deux demi-tours d'axes T et T', T étant la perpendiculaire commune AB (A sur Z et B sur D) à l'axe Z de (V) et à (D) :

$$(V) = (C) \cdot (C')$$

Soit (C₁) un demi-tour dont l'axe est une perpendiculaire en B à (D). Le déplacement (V₁) (V)⁻¹ change un point p de (D) en lui-même et, par suite, l'équivalence (mod. D) se traduit par

$$(V_1) (V)^{-1} = (C_1) \cdot (C)$$

entraînant

$$(V_1) = (C_1) \cdot (C')$$

(V₁) se réduit à une rotation si les axes T₁ et T' sont concourants. L'existence et l'unicité de (R) sont ainsi mises en évidence.

Le cas d'exception évident est celui où l'axe Z de (V) et la droite (D) sont parallèles.

L'existence de la rotation (R) met en évidence l'enveloppe des plans médiateurs M(p) des segments pp' .

La proposition inverse exigeait un peu de soin : tout plan passant par l'axe R de la rotation (R) est-il un plan M(p) ? La rotation (R) est déterminée par son axe et son angle $2\alpha_1$. Si l'on se donne un plan arbitraire passant par R ce sera un

(1) Cf. *Bulletin* n° 149.

plan $M(p)$ s'il existe sur D un point p tel que l'angle (R, p) avec $M(p)$ soit égal à $\alpha_1 \pmod{\pi}$; p se trouve ainsi déterminé, réserve faite que D n'est pas parallèle à R (cas exclu). Seul, fait exception, le plan passant par R et perpendiculaire à T' .

2° (\mathcal{R}) est donnée ainsi que D ; la réduction canonique de (\mathcal{R}) à un produit de deux demi-tours (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}') liés au vissage (V) fait apparaître l'axe Z de tous les vissages (V) équivalents à (\mathcal{R}) .

Prenons comme axe d'un demi-tour (\mathcal{C}_1) la droite T_1 perpendiculaire commune à R et D (A_1 sur R et B sur D), la droite T est une perpendiculaire quelconque à D en B . Dans ces conditions $(V) = (\mathcal{C})(\mathcal{C}')$ équivalent à (\mathcal{R}) (module D).

Par suite T' étant fixe, ainsi que T_1 , l'axe Z de (V) est la perpendiculaire commune à la droite T' , fixe, et à une droite variable T passant par un point fixe B et située, en outre, dans le plan perpendiculaire en B à la droite D . Il est bien connu que la surface, lieu de Z , est un conoïde de Plücker. Il était indiqué de caractériser de façon élémentaire la section de cette surface par le plan perpendiculaire en B à D en la projetant sur un plan perpendiculaire à T' : cette projection est un cercle et l'on retrouve une génération connue du cylindroïde.

Le cas où R a la direction de D était réservé: le lieu des axes Z est alors un plan.

3° Trois points marqués p_1, p_2, p_3 d'une droite D et trois points marqués q_1, q_2, q_3 sur une droite L , sont les données du problème. On propose de chercher les rotations (\mathcal{R}) telles que les plans $M(p_1), M(p_2), M(p_3)$ relatifs à p_1, p_2, p_3 , passent par les points q_1, q_2, q_3 respectivement.

L'existence d'une telle rotation étant supposée acquise, on a:

$$(Rp_1, Rq_1) = (Rp_2, Rq_2) = (Rp_3, Rq_3) \pmod{\pi},$$

Rp_1 désigne le plan contenant l'axe R et le point p_1 . Ainsi les axes R sont soumis à deux conditions et forment une congruence.

Si l'on se donne la direction Δ de l'axe R d'une telle rotation, en projetant sur un plan H perpendiculaire à Δ , les projections des droites $p_i q_i$ ($i = 1, 2, 3$) sont tangentes à une conique ayant pour foyer la trace sur H de R . Cette conique, déterminée par cinq tangentes, admet en général deux foyers, exceptionnellement un seul.

De nombreuses fautes sont apparues dans ce paragraphe. La notion de correspondance homographique est trop souvent mal connue: que signifie une phrase de ce genre: « les faisceaux $R(p_1 p_2 p_3)$ et $R(q_1 q_2 q_3)$ sont en correspondance homographique !!! »

...une corrélation simple est une homographie... une correspondance involutive de points sur des bases distinctes... les "gerbes" de plans (R, p_i) (R, q_i) sont en correspondance homographique et le lieu de R est une quadrique... » ?

La notion de correspondance homographique entre des êtres algébriques ou géométriques requiert une définition adaptée du birapport de quatre de ces éléments et une démonstration complète de la conservation du birapport, faute de quoi les pires erreurs sont à redouter.

4° Trois points marqués p'_1, p'_2, p'_3 sur une droite D' décrivaient trois sphères fixes S_1, S_2, S_3 dont les centres q_1, q_2, q_3 sont alignés. Il fallait montrer que tout point marqué p' sur D' décrit une sphère fixe S' .

L'existence d'une rotation (\mathcal{R}) établie au paragraphe précédent montre que les transformés p'_1, p'_2, p'_3 , de p_1, p_2, p_3 , sont sur une droite D' , $p_1 p'_1 \dots$ étant sur une sphère de centre q_1 (on ne demandait pas d'étudier les régions des sphères S_i décrites par les points p'_i): p et p' étant deux points homologues de D et D' , soit le point q de la droite L défini par l'égalité des birapports

$$(q_1 q_2 q_3 q) = (p'_1 p'_2 p'_3 p') = (p_1 p_2 p_3 p).$$

Si nous projetons sur un axe perpendiculaire à l'axe de la rotation la projection de $p q$ reste tangente à une conique déjà considérée plus haut, ce qui permet d'établir que le plan médiateur $M(p)$ passe par q et que $q p' = q p$.

Ainsi p' appartient à la sphère fixe S de centre q et de rayon pq et cela pour toutes les positions de la tige rectiligne variable $p'_1 p'_2 p'_3 p'$.

Exceptionnellement q peut être à l'infini si l'on a

$$(p_1 p_2 p_3 p) = (q_1 q_2 q_3 \infty) = \frac{q_3 q_1}{q_3 q_2}$$

pp' est orthogonale à L , et p' décrit le plan « fixe » mené par p et perpendiculaire à L .

II. — 1° On donnait un déplacement hélicoïdal (V) par ses éléments : rotation d'angle 2α autour d'un axe Z et translation parallèle à Z de grandeur algébrique $2h$.

P est un plan donné de l'espace, p un point de P et p' son homologue par (V).

Les plans médiateurs des segments pp' forment une famille à deux paramètres. Si P coupe Z en A [P non perpendiculaire à Z (\mathcal{I})] on remplace (V) par le produit de deux demi-tours (\mathcal{C}).(\mathcal{C}'), l'axe T de (\mathcal{C}) étant la droite de P perpendiculaire en A à Z . L'axe T' de (\mathcal{C}') perce en O le plan Q perpendiculaire à P mené par T ; O est le point par lequel passent les plans médiateurs $M(p)$.

O est d'ailleurs invariant dans l'antidépacement (\mathcal{Q}), (\mathcal{C}), produit de la symétrie (\mathcal{Q}) par rapport au plan Q par le demi-tour, (\mathcal{C}').(\mathcal{P}) étant la symétrie par rapport au plan P on a (\mathcal{C}) = (\mathcal{P}).(\mathcal{Q}), et, par suite,

$$(\mathcal{Q}) = (\mathcal{P})(\mathcal{C}) \quad (\mathcal{Q})(\mathcal{C}') = (\mathcal{P})(\mathcal{C})(\mathcal{C}') = (\mathcal{P})(V)$$

antidépacement ayant O pour point invariant et équivalent (mod. P) à (V).

O n'existe pas si le plan P est parallèle à Z (ou le contient). L'étude de la correspondance p, p' faite en projetant sur un plan perpendiculaire à Z montre que la droite pp' reste parallèle à un plan fixe et que les plans $M(p)$ sont parallèles à une direction de droite fixe. Restait à montrer que tous les plans passant par O sont des plans médiateurs $M(p)$.

On peut chercher directement le couple p, p' des points tels qu'un plan donné soit médiateur de pp' .

On considère un plan M' passant par O et l'on se propose de trouver un point p dans P tel que le plan donné M' soit le plan médiateur de pp' .

On passe de p à p' par l'antidépacement (\mathcal{P}) (V), puisque (\mathcal{P}) conserve p . On passe de p' à p par la symétrie (\mathcal{M}') par rapport au plan M' . Donc le produit (\mathcal{M}')(\mathcal{P}) (V) fait passer de p' à p . O est invariant dans (\mathcal{M}') ; (\mathcal{P}) change O en O'' symétrique de O par rapport à P (ou T). (\mathcal{C}) change O'' en O et (\mathcal{C}') laisse O invariant puisque O est sur T' . Donc O est invariant dans le déplacement (\mathcal{M}')(\mathcal{P}) (V). ce déplacement est une rotation dont l'axe R passe par O ; p' est le point commun à R et à l'homologue P' de P par (V).

La discussion tient dans l'étude des déplacements (\mathcal{M}')(\mathcal{P}) (V) et à la position de l'axe R par rapport au plan P' , ce qui exclut le cas d'un plan M' passant par O et parallèle à l'axe Z de (V).

2° Désormais, on envisage un plan P non parallèle à Z . L'énoncé suggérait de rapporter la figure à un plan horizontal H , perpendiculaire à l'axe Z de V , z_0 étant la cote de O relativement au plan H .

Il y a correspondance biunivoque entre un point p de P et sa projection orthogonale \bar{p} sur H .

Le plan médiateur $M(p)$ coupe H selon une droite μ , car si $M(p)$ était parallèle à H , pp' serait parallèle à Z , cas exclu (à moins que p n'appartienne à Z).

Si le point \bar{p} décrit une droite du plan H , p décrit une droite D du plan P . Or on a montré dans I, 1° que les plans médiateurs $M(p)$ des points p de D passaient par une droite fixe R : R est l'enveloppe des plans $M(p)$, tels que p appartienne à D , R passant naturellement par O .

(1) Cas facile à étudier.

La trace μ de $M(p)$ sur le plan H passe par la trace φ de la droite R sur H : c'est le point φ à distance finie ou non.

Il apparaît que la correspondance K_1 , point $\bar{\omega}$, droite μ , semble être une corrélation linéaire. C'est ce qu'on se propose de préciser dans ce dernier paragraphe.

3° A cet effet, le lecteur est prié de faire une épure. Soit pq la perpendiculaire à Z menée de p et que nous choisissons pour axe T du premier demi-tour (\mathcal{C}), l'axe T' est tel que $(V) = (\mathcal{C}) (\mathcal{C}')$. Nous bornant à transformer p en p' , s , milieu de pp' , sera sur T' et le plan médiateur de pp' est le plan O, T' dont la trace sur H est parallèle à la droite $z\sigma$, z trace de Z sur H, σ projection de s .

Désignons par O, ω , ω' , les projections de O, p , p' , sur H, par z_0 la cote de O, par k la projection orthogonale de O sur (μ) . En exprimant l'orthogonalité de Ok et pp' , il vient entre les mesures algébriques des deux vecteurs parallèles \vec{Ok} , $\vec{\sigma\omega'}$ la relation : $\vec{Ok} \cdot \vec{\sigma\omega'} = hz_0$.

Evaluant $\vec{\sigma\omega}$ sur la demi-droite $z\chi$ de sens $z\sigma$ on trouve :

$$\vec{\sigma\omega'} = \vec{z\omega'} \sin \alpha = \vec{z\omega} \cdot \sin \alpha \quad \text{et} \quad \vec{Ok} \cdot \vec{z\omega} = \frac{hz_0}{\sin \alpha}.$$

Le passage de $\vec{z\omega}$ à \vec{Ok} se fait donc :

1° par une rotation de α autour de Z, puis de $+\frac{\pi}{2}$, $\vec{z\omega}$ se transforme en un vecteur $\vec{z\nu}$ porté par $Y'\gamma$ [tel que $(z\chi, Y'Y) = +\frac{\pi}{2}$], $\vec{Ok} \cdot \vec{z\nu} = \frac{hz_0}{\sin \alpha}$;

2° par la translation $\vec{z_0}$ suivie de l'inversion (I) de pôle O et de puissance $\frac{hz_0}{\sin \alpha}$ on passe de $\vec{z\nu}$ à \vec{Ok} .

En résumé, on passe de $\bar{\omega}$ à k par un déplacement suivi de l'inversion (I).

Si $hz_0 > 0$ on passe de $\bar{\omega}$ à μ par un déplacement suivi d'une polarité par rapport à un cercle de centre O et de rayon R, tel que $R^2 = \frac{hz}{\sin \alpha}$.

Si $hz_0 < 0$ on posera $\frac{zh}{\sin \alpha} = -R^2$ et l'on aura une transformation analogue.

Si $\bar{\omega}$ décrit une droite de H, μ passe par un point fixe.

Si $\bar{\omega}$ est en z , μ est rejetée à l'infini (p en A, $z\nu = z\bar{\omega} = 0$, ok infini).

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES : M. CAGNAC

Le correcteur doit noter avant tout son impression de découragement à la lecture des copies d'un trop grand nombre de candidats ; si vraiment, « faire des Mathématiques », c'était imiter ce que font ces candidats, les esprits sains, normalement équilibrés, renonceraient à faire des Mathématiques...

Tous les candidats devraient être persuadés que, lorsqu'on leur demande l'équation d'une courbe, cette équation est suffisamment simple pour qu'on puisse la noter en une seule ligne d'écriture normale. Comment ne pas signaler le candidat qui, pour trouver l'équation tangentielle de \mathcal{C} , demandée au I, 2°, écrit deux équations (1) et (2) du second degré en x_0 , dont la seconde mesure 46,5 cm. de longueur, et ajoute « on éliminera x_0 entre les équations (1) et (2) ».

Les candidats devraient se douter que si on leur demande d'examiner les questions du problème dans un certain ordre, si on leur propose d'abord l'étude d'un cas particulier, c'est que probablement cet ordre conduit à des calculs de difficulté croissante, et que l'étude du cas particulier peut permettre de « roder » la méthode générale qu'ils utiliseront par la suite. Comment ne pas signaler le candidat qui, ayant négligé l'étude du I, 1°, aborde directement celle du I, 2°, pose correctement ce qu'il avait à faire pour trouver \mathcal{L} , introduit des notations auxiliaires, λ , λ_+ , λ_- , μ , μ_+ , μ_- , λ_i , λ_j , μ_i , μ_j , et s'y embourbe tellement qu'au bout de sept pages de

calculs il n'a pas encore terminé. Tous les candidats devraient savoir qu'on exigera d'eux — avant les connaissances en frange du programme et qui, certes, ne sont pas à dédaigner — la connaissance des méthodes les plus élémentaires de la géométrie analytique et l'humble correction matérielle de leurs travaux, correction dont ils devront donner en tout temps l'exemple à leurs élèves. Comment ne pas signaler les trop nombreux candidats qui, cherchant la sécante joignant les points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ de la parabole $C(y^2 - 2px = 0)$, écrivent d'abord $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. On ne leur a donc jamais appris que $x = \frac{y^2}{2p}$ donne une représentation rationnelle de C , que l'équation aux y des points communs avec la droite $\Delta(ux + vy + w = 0)$ s'écrit $u \frac{y^2}{2p} + vy + w = 0$, et que les fonctions symétriques des racines donnent immédiatement u, v, w , en fonction de y_1 et y_2 ?

Comment ne pas signaler le candidat qui, après avoir parlé de cercle harmoniquement circonscrit à la conique C ose écrire des groupements de termes tels que $4X + A\sqrt{AB}Y, 16 + A^2B^2, X^2 + 2p^2X - 2p^4$. On ne lui a donc jamais appris à vérifier l'homogénéité de ses calculs ?

Dans la recherche du lieu des centres des triangles U (ou T), les trois sommets du triangle jouaient évidemment des rôles symétriques. Pourtant 31 candidats ont cherché à placer le centre Ω d'un triangle U en se donnant d'abord arbitrairement, sur C , un sommet M_0 d'un tel triangle. Ils ont ensuite cherché la pente d'un côté de U issu de M_0 : le fait qu'il y ait deux côtés issus de M_0 , jouant des rôles symétriques, une fois M_0 fixé, ne les a pas troublés. Ayant obtenu une équation du troisième degré, la réalité de ses racines ne les a pas tourmentés. Ils ont alors porté dans une direction faisant 30° avec l'une des directions obtenues (dans un sens non précisé), un segment égal à la longueur de la corde interceptée, multipliée par $\frac{1}{\sqrt{3}}$... et ont abandonné leurs calculs plus ou moins tôt, sans rien obtenir.

Vingt-sept candidats ont introduit symétriquement les coordonnées des sommets $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3)$, liées par les relations qui expriment que ces points appartiennent à C ; ils ont exprimé que ce triangle est équilatéral en écrivant $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1$, ou en exprimant que l'orthocentre coïncide avec le centre de gravité. Certains d'entre eux ont pu terminer le I, 1^o, aucun d'eux n'a pu aborder utilement le I, 2^o : on a introduit des radicaux, on a cherché une représentation paramétrique de C en posant $x = \sqrt{A} \cos \varphi, y = \sqrt{B} \sin \varphi$, puis $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$. . que d'héroïsme dépensé en vain dans les relations symétriques de t_1, t_2, t_3 !

Deux méthodes permettaient d'aborder rapidement l'étude proposée du lieu \mathcal{Q} (I, 2^o).

1) On pouvait écrire l'équation d'un cercle Γ , de centre $\Omega(\xi, \eta)$; les quatre points communs à C et Γ sont tels que $\Sigma x_i = \frac{4A\xi}{A-B}, \Sigma y_i = \frac{4B\eta}{B-A}$.

Si trois de ces points forment un triangle U ,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3\xi, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 3\eta,$$

et le quatrième point M_4 est donné par $x_4 = \xi \frac{A+3B}{A-B}, \quad y_4 = \eta \frac{B+3A}{B-A}$.

Puisque M_4 est sur C , nécessairement

$$(1) \quad \xi^2 \frac{(A+3B)^2}{A} + \eta^2 \frac{(B+3A)^2}{B} - c^2 = 0.$$

Dix-neuf candidats ont utilisé cette méthode ; treize d'entre eux ont obtenu

l'équation (1) ; mais deux seulement se sont soucié de la réciproque : étant donné un point Ω , réel, sur la conique (1), existe-t-il un triangle U de centre Ω ? Le cercle Γ [$\Omega, \Omega M_3$] est réel ; il recoupe C en trois points $M_1 M_2 M_3$ tels que le centre de gravité coïncide avec le centre du cercle circonscrit ; l'un au moins de ces points, soit M_1 , est réel ; le milieu de $M_2 M_3$ étant l'homothétique de M_1 dans l'homothétie ($\Omega, -\frac{1}{2}$), la droite, réelle, $M_2 M_3$ coupe Γ , donc C , en deux points réels M_2 et M_3 ; le triangle $M_1 M_2 M_3$ est équilatéral, réel, et c'est alors seulement qu'on peut affirmer que le lieu \mathcal{L} est la conique représentée par (1), lorsque celle-ci est réelle.

II) On pouvait aussi introduire le rayon R du cercle Γ , désigner par $\theta, \theta + \frac{2\pi}{3}, \theta - \frac{2\pi}{3}$ les angles polaires des vecteurs $\vec{\Omega M}_1, \vec{\Omega M}_2, \vec{\Omega M}_3$, joignant Ω aux trois sommets de U . En exprimant que M_1, M_2, M_3 appartiennent à C , on obtient trois relations dont on peut déduire ξ, η, R , en fonction de θ . Cinquante et un candidats ont utilisé cette méthode, vingt et un ont obtenu correctement l'équation (1).

Plus élégamment, trois candidats ont introduit $t = e^{i\theta}$, et ont exprimé que le polynôme du quatrième degré dont les zéros donnent les t des points communs à C et Γ est de la forme $(t^3 - \lambda)(t - \mu)$, ce qui donne très rapidement

$$(2) \quad R^2(A + B) + 2(B\xi^2 + A\eta^2 - AB) = 0$$

$$(3) \quad \cos 3\theta = \frac{4B\xi}{c^2 R}, \quad \sin 3\theta = \frac{4A\eta}{c^2 R} \quad (c^2 > 0).$$

Les relations (3) entraînent

$$(4) \quad R^2 = \frac{16}{c^4} (B^2 \xi^2 + A^2 \eta^2).$$

La comparaison de (2) et de (4) montre que, nécessairement, Ω appartient à la conique (1).

Malheureusement, là encore, on n'a pas songé à la réciproque ; on s'est borné généralement à ajouter membre à membre les trois équations qui expriment que M_1, M_2, M_3 sont sur C , et comme on obtenait une relation entre ξ et η , on en a conclu immédiatement que c'était « l'équation du lieu demandé \mathcal{L} ». Reposons donc la question : Ω étant un point réel de (1), existe-t-il un triangle U de centre Ω ? Ω étant un point réel de (1), (4) donne une valeur réelle pour R , compatible avec (2), d'après (1), et alors les formules (3) donnent à 2π près, l'angle 3θ , c'est-à-dire donnent les angles polaires $\theta, \theta + \frac{2\pi}{3}, \theta - \frac{2\pi}{3}$ des trois rayons de U : le lieu \mathcal{L} cherché est donc la courbe (1) lorsqu'elle est réelle.

L'équation (1) est celle d'une conique propre, sauf dans le cas d'une hyperbole C dont les asymptotes font l'angle de 60° . Si C est dans l'angle aigu des asymptotes, (1) représente deux droites imaginaires, il n'existe pas de triangle U dont les sommets sont à distance finie ; si C est dans l'angle obtus des asymptotes, \mathcal{L} comprend les deux directrices de C .

L'équation tangentielle de \mathcal{C} a été trouvée par cinq candidats ; deux l'ont déduite de l'équation d'un côté

$$x \cos \theta + y \sin \theta + \frac{R}{2} - \xi \cos \theta - \eta \sin \theta = 0,$$

ξ, η, R, θ étant liés par (2) et (3) ; mais ils n'ont pas vu la présence du facteur $Au^2 + Bv^2$ au numérateur et au dénominateur de l'expression qu'ils ont donnée de w^2 . Trois autres l'ont obtenue directement en partant d'une sécante Δ

$$ux + vy + w = 0,$$

en évaluant la distance des deux points M_1 et M_2 communs à Δ et C ,

$$M_1 M_2^2 = \frac{4AB(u^2 + v^2)(Au^2 + Bv^2 - w^2)}{(Au^2 + Bv^2)^2},$$

en cherchant les coordonnées d'un point M_3 sur la médiatrice de M_1M_2

$$(5) \quad \begin{cases} x_3 = -\frac{Auw}{Au^2 + Bv^2} + \rho u \\ y_3 = -\frac{Bvw}{Au^2 + Bv^2} + \rho v \end{cases}$$

à une distance de Δ égale à $M_1M_2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, et en écrivant que M_3 est sur C , ce qui donne

$$(6) \quad (Au^2 + Bv^2 - w^2) [(3B - A)u^2 + (3A - B)v^2]^2 = 12ABw^2 (u^2 + v^2)^2.$$

Toute tangente à la courbe (6) coupant C en deux points réels, l'équation (6) est celle de \mathcal{C} .

Il est regrettable qu'une dizaine de candidats, qui avaient abordé les calculs précédents, ont cru que, dans les formules (5), ρ mesurait la distance de M_3 à Δ , et que la faute d'homogénéité, ainsi commise, leur ait totalement échappé par la suite.

Deux candidats seulement ont construit les courbes R et \mathcal{C} du I, 4° ; ils ont oublié l'un et l'autre qu'aux points d'inflexion de R correspondent des rebroussements de \mathcal{C} . Mais ils ont su, l'un et l'autre, déduire d'une parabole asymptote à R une parabole asymptote à \mathcal{C} .

Trois candidats ont obtenu le lieu K du II, 2°, personne n'a obtenu le lieu \mathcal{S} .

Deux copies se détachent nettement des autres, avec les notes 17 et 16 ; les notes dépassant la moyenne sont 14 ; 13 ; 12,5 ; 12 (2 fois) ; 11,5 (4 fois) ; 11 (3 fois). Les notes les plus fréquemment données sont 6 et 1, chacune 13 fois ; la moyenne générale de l'épreuve est 4,99.

COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL : M. MILLOUX

Le problème, d'allure classique, ressort en gros de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Il comporte six paragraphes qui, dans l'ensemble, sont de difficulté graduée. Les deux derniers étaient réservés aux candidats à la fois très bons et très rapides. Quant aux quatre premiers, ils ne recèlent aucun piège vraiment sérieux ; leur but était double : préparer la venue des deux derniers paragraphes, et éprouver les connaissances des candidats sur certaines parties à la fois élémentaires et importantes du programme, telles que : définition et conditions d'existence de l'intégrale d'une fonction réelle continue, tantôt positive, tantôt de signe variable, dans un intervalle infini ; convergence uniforme ; maniement des majorantes, applications du théorème des résidus.

Avant de passer à des considérations d'ordre général, nous allons examiner un à un les six paragraphes, les réactions des candidats (141 ont composé en Analyse), et les erreurs les plus fréquentes. Pour mieux suivre ces observations, le lecteur est prié de se reporter à l'énoncé.

Premier paragraphe. — Un seul candidat a remis copie blanche. Presque tous les autres ont correctement traité les deux premières questions, mais se sont trouvés en général arrêtés par la dernière : limiter inférieurement par une constante numérique positive le module de $\cos(\pi z)$ sur les cercles de centre O et de rayon entier. Beaucoup de candidats ont commis des erreurs ; 20 seulement ont résolu cette question, partie en démontrant *correctement* que le module, considéré sur chaque cercle, est minimum sur l'axe réel, partie par une méthode géométrique intuitive, qui consiste à utiliser le résultat de la deuxième question et à ne considérer que les arcs de cercle situés dans une bande entourant l'axe réel, puis à faire intervenir la périodicité du module pour ne conserver, finalement, que des arcs de cercle issus de O et tendant vers un segment de l'axe imaginaire.

(Signalons une erreur de principe trouvée à de multiples exemplaires : le mini-

mum du module sur le cercle de rayon n est positif, donc la suite des minima est supérieure à une constante positive.

Deuxième paragraphe. — La première question consiste à placer le point X de façon que l'intégrale $I(X, 1, \frac{\pi}{2})$ soit absolument convergente. Presque tous les candidats ont attaqué cette question et trouvé le résultat correct, mais tant de fautes grossières ont été commises que 64 candidats ont 12 ou plus sur 20 pour cette question (le plus fréquemment 18 ou 20). Quelques erreurs seront signalées plus loin. Une faute assez fréquente, puisque commise par 34 candidats, provient de l'utilisation d'une majoration de la fonction à intégrer, sans la minoration en contre-partie : on n'obtient ainsi qu'une condition *suffisante* de convergence, que six candidats seulement ont conservée comme telle, honnêtement et intelligemment. Les 28 autres ont commis la regrettable confusion de transformer la condition suffisante en condition nécessaire et suffisante.

La deuxième question consiste à montrer que le domaine d'absolue convergence de l'intégrale précédente coïncide avec le domaine de convergence. Bien des sottises ont été dites dans cette question, pour laquelle 17 candidats seulement ont 12 ou plus sur 20. Parmi les erreurs commises par 14 candidats, une ou plusieurs fois au cours de ces deux premières questions, signalons :

$f(x)$ étant continue positive, pour que $\int^{\infty} f(x) dx$ existe, il faut, il suffit, ou il faut et il suffit que $f(x)$ tende vers 0 ; que $xf(x)$ tende vers 0. Pour que $\int^{\infty} f(x) \sin x dx$ existe, il faut que $f(x)$ tende vers 0 (la démonstration est magnifique : si la condition n'est pas réalisée, alors $f(x) > k > 0$, et chacun sait que $\int^{\infty} k \sin x dx$ diverge). Pour que $\int^{\infty} e^{-\alpha(x)} dx$ existe, il suffit que $\alpha(x)$ soit positif.

Ne passons pas sous silence de telles sottises : ne prouvent-elles pas qu'un groupe réduit de candidats ne perdrait pas leur temps en suivant à nouveau les cours de Mathématiques Générales ? Enfin, de trop nombreux candidats ont donné des solutions inconsistantes et très longues, alors qu'une simple représentation graphique de la fonction à intégrer les eût renseignés immédiatement.

La troisième question a eu encore moins de succès, malgré un énoncé charitable, où la deuxième formule de la moyenne est évoquée, 13 candidats ont eu 12 ou plus sur 20. Beaucoup de compositions sont très confuses ; 16 candidats commettent une erreur de principe qui, simplifiée, se présente comme suit : si $f(x)$, fonction continue et positive, est équivalente à $g(x)$ pour les grandes valeurs de x , alors les intégrales suivantes sont convergentes ou divergentes en même temps :

$$\int^{\infty} f(x) \sin x dx ; \quad \int^{\infty} g(x) \sin x dx,$$

les candidats ne sont pas tous faibles, aussi, proposons-leur de trouver eux-mêmes un contre-exemple, en utilisant, s'ils le veulent, la sinusoïde amortie classique, et en modifiant quelque peu, pour la seconde fonction, les arches d'ordonnées positives.

Troisième paragraphe. — La première question se présente comme une généralisation de celle du paragraphe précédent. De nombreux candidats l'ont traitée, mais 43 seulement d'entre eux ont 12 ou plus sur 20. On retrouve ici les mêmes erreurs que précédemment.

La deuxième question — calcul effectif de l'intégrale I par la méthode des résidus appliquée à un parallélogramme dont deux côtés s'éloignent indéfiniment — a eu plus ou moins de succès pour sa partie automatique. Avant tout, il s'agissait de démontrer correctement que les intégrales prises sur les côtés qui s'éloignent, tendent vers 0 ; neuf candidats seulement ont su justifier cette propriété fondamentale ; la plupart des autres n'y attachent aucune importance, ou trouvent de curieuses rai-

sons telles que la suivante : « Les deux extrémités du segment sur lequel on intègre s'éloignent sur deux parallèles, ils se rejoignent à l'infini, de sorte que l'intégrale est nulle. » Notons encore, au passage, l'expression : « pôle singulier essentiel ».

La dernière question (convergence de I vers O) est immédiate sur le résultat ; 12 candidats l'ont réellement résolue.

Quatrième paragraphe. — La première question, bien traitée par neuf candidats, consiste à montrer que l'intégrale $I(X, \lambda, \omega)$ existe quel que soit X lorsque λ (positif ou nul) est inférieur à 1 ; c'est une conséquence immédiate de la majoration du cosinus indiquée dans le premier paragraphe. Beaucoup de candidats ont gâché leur solution en commettant l'erreur de considérer comme équivalents $e^{\alpha(x)}$ et $e^{\beta(x)}$ lorsque $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont équivalents.

Cette dernière erreur se retrouve dans la question suivante (modification des demi-droites d'intégration sans modification de la valeur de I) ; il s'y joint l'essoufflement des candidats, dont six ont 12 ou plus sur 20 pour cette question.

La fin du paragraphe, un peu plus délicate, et pour laquelle on pouvait utiliser partiellement la majoration du début, n'a été réussie que par deux ou trois.

Cinquième paragraphe. — Les 17 candidats qui l'ont abordée n'y ont à peu près rien vu. Cependant, la première partie (étude des coefficients A_n) n'était vraiment pas difficile dans le cas $\lambda < 1$; pour le cas $\lambda = 1$, il fallait remplacer le cosinus hyperbolique du dénominateur par l'exponentielle équivalente qui s'impose, et surtout porter toute son attention à l'erreur commise ; la série entière étudiée se trouvait décomposée en deux séries à rayons de convergence différents. Quant à la justification du développement formel, on y arrive par des considérations d'uniforme convergence ; c'est une des questions les plus délicates du problème.

Sixième paragraphe. — Celui-ci commence par des considérations du même genre, se développe et conduit à la conclusion du problème, dont il met en lumière

l'unité : la fonction $\frac{1}{ch \frac{X}{2}}$ est développable en série de polynômes dans le plan X

coupé suivant deux demi-droites situées sur l'axe imaginaire, et issues des zéros du cosinus hyperbolique les plus proches de l'origine.

Quatre candidats ont abordé ce paragraphe ; deux sont très faibles et cette constatation d'inconscience ne surprendra personne ; un autre est plutôt moyen ; l'échec de ces trois candidats est total. Par contre, après la défaillance générale du paragraphe précédent, le correcteur a eu l'heureuse surprise de trouver une composition où, après un début quelque peu hésitant dans son développement, mais bien tracé, l'essentiel de ce sixième paragraphe a été magistralement traité. Il est regrettable que le reste de la composition soit loin d'être de la même valeur, et qu'il n'ait pas permis de réserver au candidat intéressé la place de premier en Analyse.

Conclusions. — De l'exposé qui vient d'être fait, il résulte clairement qu'à part le cas d'exception précédent, les candidats n'ont pu être jugés que sur les quatre premiers paragraphes, les plus faciles. Le meilleur d'entre eux a eu la note 19. C'est, en quelque sorte, l'unité de mesure. Sa composition est presque partout parfaite. Complète, elle est, de plus, concise, et compte seulement cinq pages et demie de rédaction ; cette remarque peut servir d'avis à ceux de ses concurrents qui ont remis de 15 à 20 pages inconsistantes, où l'on ne trouve rien de précis ni de rigoureux.

Les deux suivants (note : 16) sont moins parfaits que le premier, mais ils présentent de très solides qualités. L'un d'eux est celui qui a résolu le dernier paragraphe.

Puis les notes se dispersent, après deux bonnes compositions (note : 14,5) ; elles s'affaiblissent rapidement : dix candidats ont la moyenne ou davantage ; vingt et un candidats ont 7 ou plus. Ce sont les « isolés ». Ensuite, la masse vient former la courbe en cloche classique, avec maximum pour la note 3. De 4,5 à 6,5 inclus, on

trouve quarante candidats, dont le trentième avec 6, le quarantième avec 5,5, le cinquantième avec 5, le soixantième avec 4,5. De 0 à 4 inclus, quatre-vingts candidats viennent étaler pour la plupart des notions incertaines d'analyse.

Les généreux coefficients adaptés aux différentes questions auraient permis aux candidats ayant correctement traité les deux premiers paragraphes d'avoir 9,5 ; les trois premiers auraient rapporté 13. Il semble que les résultats globaux, qui sont faibles (moyenne générale : 4,6 sur 20) eussent été meilleurs si chaque candidat, mesurant ses forces, avait imposé une juste limite à son ambition, en renonçant au besoin à s'attaquer à des questions délicates, pour traiter avec plus de soin et de rigueur ce qui était à sa portée. Certains, peu nombreux, l'ont compris, et leurs notes s'en ressentent avantageusement.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE : M. ROGER

Le problème proposé comportait trois parties. Presque tous les candidats ont porté leur effort sur la première ; aucun n'a rien donné de valable sur la deuxième, et bien rares sont ceux qui, sur la troisième, ont obtenu des résultats substantiels, encore que trop souvent entâchés d'erreurs.

Dans la première partie, beaucoup de candidats ont vu que la trajectoire du centre C de la roue avant était portée par une droite ; mais pas assez ont donné de ce fait une démonstration rigoureuse. On pouvait, à l'ensemble formé par la roue avant, son essieu et la fourche, appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe CD sur lequel il était monté fou (pour les roues (A) et (B), on a trop souvent oublié que les réactions du châssis avaient, outre une résultante générale passant par le centre correspondant, un moment résultant en ce point). D'où $\psi' + \delta' = C^{te} = 0$ d'après les conditions initiales, puis $\psi + \delta = C^{te} = 0$ en choisissant convenablement l'orientation de O_1x_1 . Ensuite, tirant parti de la nullité de la vitesse absolue de la molécule de la roue au contact du sol (roulement sans glissement), on pouvait montrer que le support de la vitesse absolue du centre C gardait une orientation fixe.

Compte tenu de $\psi + \delta = 0$, les conditions de roulement sans glissement pouvaient toutes s'intégrer, ce qui donnait une représentation analytique des trajectoires des points O et G. Trop peu de candidats ont obtenu ces trajectoires par des considérations cinématiques simples : on pouvait démontrer que la vitesse absolue du point O était portée par Ox (soit au moyen de l'axe instantané de rotation du châssis, soit par demi-somme des vitesses des centres A et B) ; d'où la tractrice (courbe aux tangentes égales à b) portant la trajectoire de O et les développantes de chaînette (courbes parallèles à la précédente), portant les trajectoires de A et B.

Pour ce qui est de la discussion du mouvement, pas assez de candidats ont compris que, les résultats précédents étant acquis, l'intégrale des forces vives résolvait entièrement la question. Compte tenu des conditions de roulement sans glissement et de l'intégrale première $\psi + \delta = 0$, elle pouvait se mettre sous la forme :

$$F(\psi) \cdot \psi'^2 = 2 \frac{\Gamma_0}{x} (\cos x \alpha_0 - \cos x \alpha) \text{ où } \alpha = \alpha_0 - \frac{l}{a} (\psi - \psi_0) + \frac{b}{a} L \frac{\sin \psi}{\sin \psi_0}$$

d'où la discussion du mouvement.

Dans la troisième partie, trop rares sont les candidats qui ont vu qu'à partir des conditions de roulement sans glissement et des équations de Lagrange avec multiplicateurs, l'élimination de ces multiplicateurs, des variables linéaires x et y et de l'angle β conduisait d'une manière simple aux équations définissant les variables angulaires ψ , φ et α .

Les fautes dans l'expression de la force vive (au I comme au III) ont été innombrables ; depuis la confusion du centre de gravité G du chariot tout entier avec celui du châssis jusqu'aux oublis les plus grossiers dans les composantes des vecteurs rotations. C'est ainsi qu'au III, α et β ont été trop souvent employés là où il eût fallu $\varphi + \alpha$ et $\varphi + \beta$.

En définitive aucun candidat ne tranchait franchement sur l'ensemble des autres. Ainsi les bonnes notes (un 17, deux 16, deux 15, un 14 1/2, deux 14) ont récompensé des copies dont les auteurs avaient fait preuve de plus ou moins de qualités de fonds et de forme. Puis les notes se sont échelonnées régulièrement (cinq 13, quatre 12 1/2, quatre 12, un 11 1/2, un 11, trois 10 1/2, trois 10) ; au total 29 notes supérieures à la moyenne ; puis 29 jusqu'à 7 1/2, 31 jusqu'à 5 et 48 au-dessous.

EPREUVES ORALES

Elles ont eu lieu au lycée Saint-Louis pour les quarante-six admissibles. L'un d'eux déclara abandonner l'épreuve, le 15 juillet, après avoir pris connaissance du texte de sa première leçon.

Chacun des admissibles avait à traiter une leçon de Mathématiques Élémentaires et une leçon de Mathématiques Spéciales. Voici d'abord la liste de ces quarante-cinq questions : les numéros accompagnant chacun des textes d' « Élémentaires » et de « Spéciales » indiquent le groupement, effectué par le Jury avant le tirage au sort des sujets, des deux leçons exposées par un même candidat.

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

1. Cosmographie : Soleil : mouvement propre apparent sur la sphère céleste. Ecliptique. Année tropique, année sidérale. Heure sidérale ; heure moyenne (Classe de Mathématiques).
2. Géométrie : Une tangente variable à une parabole détermine sur deux tangentes fixes des divisions semblables. Réciproque. Applications (Classe de Mathématiques Supérieures).
3. Définition et signification géométrique de la dérivée d'une fonction pour une valeur donnée de la variable. Application à la détermination des tangentes aux courbes représentatives du trinôme du second degré et de la fonction homographique (Classe de Première C et Moderne).
4. Formules de transformation en produit de la somme ou de la différence de deux sinus et de deux cosinus. Problème inverse. Donner des applications (Classe de Mathématiques).
5. Géométrie : Hyperbole définie par ses asymptotes et un point (classe de Mathématiques Supérieures).
6. Première leçon sur la résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques à une inconnue (l'étude de $a \cos x + b \sin x = c$ n'est pas comprise dans la leçon) (Classe de Mathématiques).
7. Cosmographie : Inégalité des jours et des nuits (Classe de Mathématiques).
8. Conique définie par un foyer, la directrice correspondante et l'excentricité ; tangente en un point ; lieu de la projection orthogonale du foyer sur les tangentes (Classe de Mathématiques).
9. Problèmes du second degré (Les théories relatives au signe du trinôme du second degré, à sa représentation graphique, ont fait l'objet de leçons antérieures) (Classe de Première C et Moderne).
10. Géométrie descriptive et géométrie cotée (les changements de plan, rotations, rabattements, ont été étudiés). Problèmes de distances et d'angles (Classe de Mathématiques).
11. La théorie de l'inversion dans le plan et dans l'espace est supposée faite. Indiquer et traiter des applications (Classe de Mathématiques).
12. Résolution et discussion de l'équation $a \cos x + b \sin x = c$. On traitera complètement un exemple numérique à l'aide d'une table de logarithmes (Classe de Mathématiques).
13. Géométrie (Les notions de pôle et polaire par rapport au cercle sont supposées

connues). Transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle. Applications (Classe de Mathématiques Supérieures).

14. Même sujet que 5.

15. Arithmétique : Définition et propriétés élémentaires des nombres premiers. Application aux diviseurs et aux multiples (Classe de Mathématiques).

16. Trigonométrie : Exercices sur la résolution et la discussion de quelques équations trigonométriques simples à une inconnue (Classe de Mathématiques).

17. Similitude plane directe définie comme produit d'une homothétie et d'un déplacement. Forme canonique (Classe de Mathématiques).

18. Parallélisme des droites et des plans (Classe de Première C et Moderne).

19. Cinématique. Vecteur vitesse et vecteur accélération. Application au cas du mouvement circulaire uniforme (Classe de Mathématiques).

20. Fonction logarithme népérien de x (Lx). Formule $Lab = La + Lb$. Logarithme vulgaire (Classe de Sciences Expérimentales).

21. Statique. Equilibre d'un point matériel pouvant glisser sans frottement ou avec frottement sur un plan ou une sphère. Réaction. Même question pour un point sur une droite ou sur un cercle. Exemples (Classe de Mathématiques).

22. Exemples de fonctions de la forme $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ où les coefficients sont numériques. Représentation graphique (Classe de Mathématiques).

23. Première leçon sur la mesure des grandeurs. On ne traitera que de la notion de fraction ; égalité, inégalité entre fractions ; opérations sur les fractions (Classe de Mathématiques).

24. Droite et plan perpendiculaires (Classe de Première C et Moderne).

25. Géométrie. Surface cylindrique à bases circulaires et surface conique à directrice circulaire. Définitions : section par un plan parallèle au plan de la directrice. Plan tangent (Classe de Première C et Moderne).

26. Volume des parallélépipèdes et des prismes (Classe de Première C et Moderne).

27. Etude des fonctions $\frac{1}{x}, \frac{a}{x}$. Représentation graphique (Classe de Seconde C et Moderne).

28. Algèbre. Etude de la variation et construction de la courbe représentative de deux fonctions à coefficients numériques du type $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ a' n'étant pas nul (Classe de Mathématiques).

29. Combinaisons. Probabilités simples (Classe de Sciences Expérimentales)

30. Géométrie. Problèmes sur la détermination et la construction d'un cercle satisfaisant à des conditions telles que : 1) passer par un point ; 2) être tangent à une droite ; 3) être tangent à un cercle ; 4) être orthogonal à un cercle, etc... (Classe de Mathématiques Supérieures).

31. Exposer les règles d'emploi des logarithmes décimaux et l'usage des tables à cinq décimales (Classe de Mathématiques).

32. Algèbre. Variation du trinôme du second degré ; représentation graphique. Application à la comparaison d'un nombre aux racines d'une équation du second degré (Classe de Première C et Moderne).

33. Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues (Classe de Seconde C et Moderne).

34. Géométrie. Faisceaux linéaires de cercles. Points limites. Faisceaux orthogonaux (on n'emploiera pas les procédés de la géométrie analytique) (Classe de Mathématiques Supérieures).

35. Géométrie cotée. Rabattement d'un plan sur le plan horizontal, angle de deux droites, distance d'un point à une droite (Classe de Première C et Moderne).

36. Géométrie. Centre de rotation de deux figures planes directement égales. Exercices (Classe de Mathématiques Supérieures).

37. Equivalence des deux définitions suivantes : 1° lieu des centres des cercles passant par un point, tangents à un cercle ou à une droite ; 2° lieu des points dont le rapport des distances à un point et à une droite est constant (Classe de Mathématiques).

38. Division harmonique. Faisceau harmonique. Lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant (Classe de Seconde C et Moderne).

39. Géométrie plane. Cercles passant par deux points donnés, tangents à un cercle donné. Intersection d'une droite avec une ellipse et avec une hyperbole définies par un foyer et le cercle directeur ayant pour centre l'autre foyer (Classe de Mathématiques).

40. Exemple de résolution trigonométrique d'un triangle dans un cas non classique ; cet exemple devra comporter une solution géométrique. On ne demande pas d'application numérique (Classe de Mathématiques).

41. L'inversion dans l'espace (Classe de Mathématiques).

42. Inégalités dans les triangles. Perpendiculaire et obliques menées d'un point à une droite (Classe de Seconde C et Moderne).

43. Homothétie dans l'espace ; la translation a été étudiée (Classe de Mathématiques).

44. On considère une conique définie comme lieu des centres des cercles passant par un point et tangents à une droite ou à un cercle. On suppose connues la théorie de la tangente en un point et celle des asymptotes. Problèmes sur les tangentes. Théorèmes de Poncelet (Classe de Mathématiques).

45. Variation de la fonction $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$. Représentation graphique (on suppose étudiée la fonction $\frac{a}{x}$) (Classe de Première C et Moderne).

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

1. Emploi de la dérivée pour l'étude de la variation d'une fonction (Classe de Mathématiques Supérieures).

2. Les premières notions sur les séries étant acquises, exposer les méthodes d'étude de la convergence des séries à termes positifs.

3. Application du calcul des intégrales simples à la rectification des courbes (planes et gauches). Exemples.

4. Séries entières à coefficients réels d'une variable réelle ; intervalle de convergence ; à l'intérieur de l'intervalle de convergence on obtient la dérivée ou une primitive de la fonction définie par la série en dérivant ou en intégrant terme à terme.

5. L'intégration des fractions rationnelles en x , ainsi que des polynômes entiers en $\sin x$ et $\cos x$ ayant été traitée, on exposera les méthodes qui permettent d'intégrer une fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$.

6. Etude des branches infinies des courbes définies, en coordonnées polaires, par une équation $\rho = f(\omega)$. Exemples numériques (Classe de Mathématiques Supérieures).

7. Etude de la fonction logarithmique définie comme une primitive de la fonction $\frac{1}{x}$ (Classe de Mathématiques Supérieures. On rappelle que l'intégrale définie n'est pas au programme de cette classe).

8. Séries à termes quelconques réels ou complexes, séries absolument convergentes. Multiplication des séries absolument convergentes. (L'étude des séries à termes positifs est supposée faite).

9. Mécanique. Mouvement d'un point sous l'action d'une force centrale attractive proportionnelle à la distance.

10. Courbes en coordonnées polaires [$\rho = f(\omega)$] ; détermination de la tangente en un point ; disposition par rapport à cette tangente. Application à des exemples simples (Classe de Mathématiques Supérieures).
11. Mécanique. Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné avec ou sans frottement, la vitesse initiale étant dirigée suivant une ligne de plus grande pente.
12. Géométrie descriptive. Première leçon sur le paraboléide hyperbolique (l'étude analytique ou géométrique de cette surface est supposée connue).
13. Intégration de $f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, $a \neq 0$, où $f(x, y)$ est une fraction rationnelle.
14. Première leçon sur les équations différentielles du premier ordre. Champ de tangentes, courbes intégrales. Equations à variables séparées, cas simples qui s'y ramènent. (Le cas des équations linéaires ne fait pas partie de la leçon).
15. Enveloppe, définie paramétriquement, d'une droite dont l'équation dépend d'un seul paramètre. Point caractéristique (Classe de Mathématiques Supérieures).
16. Application des quadratures à l'évaluation de l'aire d'une zone de révolution et du volume d'un solide de révolution.
17. Formule de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Série de Taylor.
18. Etude de la fonction $\varphi(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ étant positive et décroissante pour $x \geq x_0$. Exemples. Application aux séries.
19. Première leçon sur les déterminants.
20. Courbe gauche. Tangente, plan osculateur.
21. Systèmes d'équations linéaires. Résolution au moyen des déterminants.
22. Mécanique. Travail, le long d'une trajectoire, pour une loi donnée du mouvement, d'une force pouvant dépendre de la position du point mobile, de sa vitesse et du temps. Cas où l'expression de ce travail se simplifie.
23. Géométrie descriptive. Intersection de deux cônes du second ordre ayant en commun une conique donnée.
24. Géométrie analytique. Génératrices rectilignes des surfaces du second ordre.
25. Intégration des équations différentielles, $y'' + ay' + by = Ae^{mx}$, A, a, b, m constantes réelles ; on ne supposera pas traitée de théorie générale pour les équations d'ordre supérieur au premier.
26. Enveloppe d'une famille de courbes planes représentées par $f(x, y, \lambda) = 0$.
27. Géométrie analytique. Lieux géométriques dans le plan.
28. Courbes gauches ; normales, normale principale. Courbure des courbes gauches.
29. Courbure d'une courbe plane. Développée d'une courbe plane.
30. Intégration d'un polynôme en $\sin x$ et $\cos x$. Application à l'intégration de certaines fonctions rationnelles.
31. Géométrie analytique. Foyers et directrices dans les coniques.
32. Géométrie analytique. Cônes : propriétés principales ; forme de l'équation ; sa recherche.
33. Birapport de quatre points d'une conique et de quatre tangentes à une conique. Divisions homographiques et divisions en involution sur une conique.
34. Extension au domaine complexe des notions de limite d'une suite, convergence d'une série, absolue convergence. Multiplication de deux séries absolument convergentes.
35. Exposer sur des exemples simples les méthodes pratiques de recherche des points doubles d'une courbe plane définie paramétriquement (Classe de Mathématiques Supérieures).
36. Séries absolument convergentes ; multiplication de deux séries absolument convergentes.
37. Théorème de Rolle et formule des accroissements finis ; représentation gra-

pique. Emploi de la dérivée pour l'étude des variations d'une fonction. (On se bornera aux théorèmes généraux, sans traiter aucun exemple).

38. Formes linéaires. Rang d'un système de formes. Notion d'indépendance. On pourra, ou non, supposer acquise la théorie des équations linéaires.

39. Fonction inverse d'une fonction continue monotone. Exemples : $\sqrt[n]{x}$, Arc sin x , Arc cos x , Arc tg x . Représentations graphiques (Classe de Mathématiques Supérieures).

40. Systèmes de vecteurs glissants. Moment résultant. Axe central. (La théorie du moment d'un vecteur par rapport à un point est supposée connue) (Classe de Mathématiques Supérieures).

41. Etude du mouvement rectiligne sous l'action d'une force dépendant seulement de la distance x du point mobile à un point fixe de sa trajectoire ; choisir un exemple où l'on peut pousser jusqu'au bout le calcul de x en fonction du temps, et un exemple où l'intégrale des forces vives permet de déterminer l'allure du mouvement.

42. Surface ; plan tangent ; cas où l'on donne l'équation sous la forme $z=f(x, y)$; cas de la représentation de la surface par $x=f(u, v)$, $y=g(u, v)$, $z=h(u, v)$.

43. L'étude des exposants rationnels est supposée faite. Définition de la fonction a^x pour x réel quelconque. Etude de ses propriétés (on ne parlera pas de la dérivation). On ne considérera pas comme connue la fonction logarithmique et on n'en parlera pas (Classe de Mathématiques Supérieures).

44. Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables. Exemples.

45. Surfaces du second ordre : points conjugués, plan polaire d'un point ; droites conjuguées.

[Les leçons de Mathématiques Spéciales où l'on ne spécifie pas : Classe de Mathématiques Supérieures, devaient être traitées dans la classe de Mathématiques Spéciales].

Il y a peu de leçons élémentaires qui aient présenté des lacunes graves. Cependant ce ne fut pas le cas pour la leçon de cosmographie sur le mouvement apparent du soleil ; les élèves y auraient appris que la ligne des apsides coïncide avec celle des solstices ; n'auraient rien conçu de net sur les trajectoires des deux soleils fictifs qu'il est coutume d'introduire pour la définition du jour solaire moyen. Tout candidat à l'agrégation doit avoir médité et analysé approximativement les inégalités dites « équation du centre » et « réduction à l'équateur » qui expliquent le mouvement du soleil en ascension droite.

Dans la leçon d'Elémentaires n° 2, l'existence d'une parabole tangente à une droite T_1 en un point M_1 , à une droite T_2 en un point M_2 , n'a pas été justifiée. De même l'existence d'une parabole tangente à quatre droites données.

A propos des représentations graphiques en algèbre, peu de candidats s'émeuvent de la possibilité d'adopter des unités différentes pour les deux axes de coordonnées, alors que le professeur de physique profite couramment de cette latitude. Que vaut, dans ces conditions, l'affirmation que la pente d'une droite est la tangente de son inclinaison sur l'axe des x ? Y a-t-il deux sortes d'hyperboles équilatères représentatives de $y = \frac{1}{x}$, selon qu'on adopte ou non la même unité pour l'axe des x et l'axe des y ?

Il nous faut regretter ici que l'effort moderne pour rendre l'enseignement moins dogmatique soit totalement indifférent à la plupart des étudiants préparant l'agrégation et qu'il n'y ait aucune osmose entre le travail qui s'accomplit dans les classes et les efforts de mémoire que ces étudiants considèrent comme nécessaires et suffisants pour apprendre à être en mesure d'enseigner les mathématiques.

En voici un exemple ; dans la leçon de mathématiques élémentaires n° 4, un candidat veut traiter comme application, un peu prématurée, le calcul de simplification

de l'expression $S = \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2} + \dots + \cos \frac{nx}{2}$, (sans signaler d'ailleurs que n est un entier impair).

Au lieu d'employer à cet effet un procédé qui est nettement antinaturel (multiplions les deux membres de l'égalité précédente par $2 \sin \frac{x}{2}$) que ne s'est-il avisé de partir de la formule qu'il avait établie $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$. Il apparaît que si on applique cette formule en prenant pour p et q les termes successifs d'une progression arithmétique, on aura une suite de relations où $2 \sin \frac{p-q}{2}$ jouera le rôle de facteur constant, et où les premiers membres seront les accroissements successifs de la fonction $\sin x$ lorsqu'on donne à x les valeurs successives des termes de la progression arithmétique ; d'où, par addition, une formule donnant $\sin l - \sin a$, a et l étant le premier et le dernier terme de la progression, de raison r . Si donc $\sin \frac{r}{2}$ est non nul, on aperçoit ainsi le moyen de transformer une somme de termes du type $\cos \frac{p+q}{2}$ dont les arguments $\frac{p+q}{2}$ sont, eux aussi, en progression arithmétique.

L'auteur de la leçon sur l'inégalité des jours et des nuits a gravement compromis son succès en faisant un calcul où il supposait que la déclinaison du soleil varie proportionnellement au temps ! C'est tourner trop le dos aux idées de fonctions (non linéaires), de maximum et de minimum, et le jury a sanctionné sévèrement cette faute. Décidément, on ne distingue pas bien l'enseignement de la cosmographie en Mathématiques de celui du même nom en classe de Philosophie, si grossièrement qualitatif et anecdotique parfois.

La leçon sur les problèmes du second degré a été cette année mieux réussie qu'à l'habitude ; mais en conseillant impérieusement de former, dans les discussions, le traditionnel Δ avant toute autre constatation, on fausse un peu les idées des élèves : au delà du second degré, personne ne sait plus l'expression qui jouerait le rôle de Δ ; cependant, on peut avoir à discuter des équations de degré supérieur au second, et l'étudiant en a vu des exemples en Mécanique.

La leçon n° 11 a pour objet d'apprendre à l'élève à utiliser des méthodes de transformation des figures et, ce qui est plus malaisé, à conclure à des propriétés, nouvelles, de figures dont l'examen direct n'est pas commode, c'est-à-dire familier à l'élève. Chaque application a un caractère dualistique à souligner : si, par exemple, en transformant une propriété simpliste comme celle de la relation entre les distances mutuelles de trois points alignés, on obtient une relation entre côtés et diagonales d'un quadrilatère inscriptible — il reste encore à considérer une nouvelle figure où la donnée est un tel quadrilatère *arbitraire*, et à s'assurer que par un processus inverse, le résultat découvert (théorème de Ptolémée) s'applique à cette figure.

Les élèves peuvent avoir l'impression que ce théorème, ne servant que rarement, est une acquisition de pure curiosité. Nous serions heureux qu'une telle impression soit dissipée : il suffirait de signaler qu'à la naissance de la trigonométrie, on évaluait le sinus d'une somme ou différence d'arcs en faisant usage de ce théorème de Ptolémée.

Ce qui a paru mal conçu dans cette leçon, c'est l'énumération, qui n'était qu'une ébauche, de ce que deviennent les figures habituelles dans une inversion quelconque. Cela n'exerce pas le débutant à choisir heureusement l'inversion particulière qui lui permettrait de simplifier un problème donné.

Comme à l'ordinaire, la leçon sur l'équation $a \cos x + b \sin x = c$ a été franchement dogmatique. Il y a deux recettes, celle qui consiste à poser $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, celle

où l'on part de $\frac{b}{a} = \text{tg } \varphi$. Mais la nécessité de présenter en fin de leçon une application numérique utilisant les tables a sans doute été la cause de cette présentation abrégée du sujet.

Dans la leçon 14, le candidat s'est illusionné : ce n'est pas la même chose de partir d'une hyperbole donnée élémentairement, et de partir, en sens inverse, d'une équation en axes obliques $XY = C''$. Dans cette seconde éventualité, il faut *mettre en place* une hyperbole qui se confond avec le lieu défini par la dite équation. D'ailleurs l'exemple de la constante nulle est de nature à laisser planer un doute sur la valabilité de cette réciproque.

Dans une leçon sur les nombres premiers, il faut tendre à donner un modèle logique et toute incorrection de langage y prend un fâcheux relief.

Nous avons touché au maximum du vague et du fuligineux dans l'étude du vecteur vitesse et du vecteur accélération (leçon 19). Une notion bien savante et mal précisée, de mouvements équivalents, a paralysé le candidat, rivé à ses notes : il a paru mépriser la clarté de l'exposé traditionnel, ce qui est une prise de position *a priori* fâcheuse pour réussir.

Certes, il y a bien des exposés traditionnels qui sont très perfectibles, et le jury sait à l'occasion apprécier un travail constructif de bonne logique, comme celui accompli par les auteurs de deux excellentes leçons de géométrie de la classe de Première (leçons 18 et 24).

Dans les leçons concernant l'homothétie et la similitude, il est concevable que l'emploi des vecteurs hypnotise un peu trop les candidats, qui envisagent volontiers, à titre de réciproque une proposition du type suivant : « Toute transformation qui associe à *un* vecteur d'une figure un vecteur de la figure transformée (donnant lieu avec le premier à un certain lien, à la fois angulaire et métrique) », est, etc... Il est très important de substituer, dans cet énoncé « *tout* vecteur » à « *un* vecteur », et il serait largement suffisant de se borner à considérer un vecteur tel que \vec{AM} , A étant un point fixe et M pouvant désigner *tout* point de la figure. On oppose souvent à la notion d'homothétie celle de translation, qui, le plus tôt que possible, devrait être annexée à l'homothétie.

Le recours à une démonstration purement vectorielle pour l'alignement des centres d'homothétie dans le produit de deux homothéties est certes un exercice non dénué d'intérêt, mais qui n'éclaircit pas la question autant que la considération des droites invariantes, si directement simple.

Dans une leçon sur le logarithme népérien en sciences expérimentales, que venait faire le théorème de la projection d'une aire plane ? L'emploi des aires est permis à ce stade, mais il n'a rien d'indispensable, et il faut, pour rester dans le climat de cette classe, adoucir l'âpreté de la théorie générale de l'aire limitée par une courbe, l'axe des abscisses, et deux ordonnées ; ce qui n'a guère été fait.

Deux bonnes leçons sur l'étude des fonctions du type $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, et $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, encore que cette dernière n'ait pas été exempte de naïvetés : « $y^2 = 2px$ représente une parabole, parce que x s'exprime par un trinôme du second degré en y . »

La leçon sur les fractions ordinaires mérite d'être soigneusement méditée : si l'origine de l'introduction de ces fractions est la considération de la mesure des grandeurs, la théorie arithmétisée des symboles $\frac{n}{d}$ gagne à conserver une certaine primauté : elle la manifeste dès que la condition d'égalité de deux fractions, établie grâce à une réduction au même dénominateur, apparaît, non seulement comme nécessaire pour l'égalité des grandeurs que ces fractions mesurent, mais aussi comme

suffisante, quelle que soit d'ailleurs la grandeur (non nulle) prise comme unité. Cette considération se retrouve opportune à propos de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et permet d'en saisir sans vérification la raison profonde.

En terminant la théorie des fractions par la notion de division, on oublie trop souvent de signaler qu'une fraction est le quotient de son numérateur par son dénominateur !

Une leçon sur l'emploi des logarithmes (n° 31) a été tout à fait fantaisiste en matière d'approximations, et utilisait l'affirmation que $\text{Log}(1 + \epsilon)$ est équivalent à ϵ , Log désignant un logarithme de base quelconque ! L'explication de l'usage des

symboles $S = \log \frac{\sin x}{x}$, $T = \log \frac{\text{tg } x}{x}$ nécessite absolument une double notation pour la mesure d'un petit angle en radians (soit x) et sa mesure en centigrades (n_x , par exemple) qui est indiquée dans les tables.

La variation du trinôme du second degré, en Première, ne doit pas reposer sur des théorèmes généraux relatifs à des dérivées qui sont hors programme.

La leçon de Première, sur le rabattement d'un plan sur le plan horizontal a révélé une ignorance stupéfiante de la géométrie cotée ; le candidat se donnant, avant tout autre propos, une charnière et édifiant chaque fois les données des problèmes traités à partir de cette charnière.

Le texte de la leçon 37 indiquait assez clairement qu'il était complètement inutile de parler d'ellipse, d'hyperbole, de parabole, d'intérieur et d'extérieur, et un lourd mélange de toutes ces notions, plein de dogmatisme, a remplacé dans cette leçon l'insistance sur les choses essentielles, malgré la perche tendue charitablement au candidat, dans la rédaction de l'énoncé.

L'étude des cercles tangents à un cercle (C), et passant par deux points A et B, ne devrait laisser aucun doute sur la fixité de l'intersection avec AB de l'axe radical de (C) avec un cercle quelconque passant par AB. La saine méthode consiste à laisser tout d'abord de côté l'hypothèse du contact et à étudier franchement le problème de l'enveloppe de l'axe radical considéré plus haut.

Signalons une excellente leçon sur la résolution d'un triangle dans un cas non classique, où l'auteur ne s'est pas inséré dans une « tradition des cas non classiques », et a accompli un effort méritoire et très éducatif.

Une leçon sur les tangentes à une conique et le théorème de Poncelet a été marquée par trop d'imprécision dans la technique des angles de droites ou de vecteurs, point qui peut sembler secondaire en soi ; mais il est très opportun dans les classes d'exercer les élèves à cette technique, qui a apporté aux anciens exposés de très nets progrès.

Si l'on considère les leçons de Spéciales, qui ont été beaucoup moins réussies que celles d'Elémentaires, elles se rattachent généralement à trois espèces, de caractères assez différents :

1° celles qui comportent une initiation aux notions essentielles de l'analyse, et où les qualités d'analyste du candidat sont évidemment passées au crible (n°s 2, 3, 4, 7, 8, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 25, 34, 36, 37, 38, 43, 44) ;

2° celles de pure technique, où ce candidat doit s'affirmer au moins supérieur à un bon élève de Mathématiques Spéciales, classe dont on peut estimer qu'il doit garder un souvenir précis, et où le choix d'exemples intéressants est un élément important de l'appréciation (n°s 1, 5, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 22, 23, 26, 27, 30, 32, 35, 39, 41) ;

3° celles touchant à des questions fondamentales de géométrie analytique ou de mécanique qui dépassent le cadre des Spéciales, mais dont tout caractère trop théorique est peu désirable au niveau de l'initiation (n°s 11, 20, 24, 28, 29, 31, 33, 40, 42,

45). Ces leçons jouent un rôle intermédiaire entre ceux des leçons du premier et du second groupe. La tendance constante des étudiants à les concevoir comme des leçons du programme de licence n'est pas soutenable : cependant elles permettent de juger, presque autant que celles du premier groupe, l'admissible sur des qualités de fond.

Les lacunes constatées ont concerné toutes ces leçons, de genres fort divers, mais surtout celles où le maître a à faire un choix bien équilibré entre ce qui est théorie et application ; celle-là étant généralement trop poussée aux dépens de celle-ci.

Les meilleures leçons, presque parfaites, ont été faites sur les sujets 24, 19, 45. Toutefois, la leçon sur les déterminants, d'un caractère moderne, a manqué de clarté et de précision sur la distinction en deux espèces des permutations de n objets numérotés de 1 à n , et sur les propriétés élémentaires du « groupe alterné » des substitutions portant sur ces permutations.

Trop peu d'applications instructives dans la leçon relative aux enveloppes, et dans celle relative aux lieux géométriques (dans le plan). Le texte de la leçon relative à $y'' + ay' + by = Ae^{mx}$ a été mal compris, l'auteur l'ayant alourdie de généralités inutiles dont on lui suggérerait de se passer, et n'ayant, par suite, pu la terminer : la partie fondamentale était la théorie des intégrales linéairement indépendantes de l'équation sans second membre, qui a été cependant bien esquissée.

Un lapsus non corrigé dans la leçon sur la courbure d'une courbe plane a fait très pénible impression, le développement de Maclaurin-Young d'une fonction y de x étant écrit sous la forme
$$y = y_0 + xy'_0 + \frac{x^2 + \varepsilon}{2} y''_0 !$$

Dans la leçon 30, à propos des primitives de $\sin^2 x \cos^3 x$, pas de distinction nette des cas où on peut, à la rigueur, se passer de formules de réduction (α, β entiers ; l'un d'eux positif impair ; ou bien $\alpha + \beta$ négatif pair, ou nul) et de ceux où l'intégration par parties s'impose. L'auteur aurait eu le droit de se borner au cas de α, β , tous deux entiers positifs, mais il eût fallu montrer nettement qu'on peut ramener la fonction à un « polynôme trigonométrique »,

$$\sum A_p \cos px + B_p \sin px, \quad p \text{ entier } \geq 0.$$

Dans la leçon 35, le candidat n'a pas vu que le système

$$\begin{cases} P(t_1) R(t_2) - P(t_2) R(t_1) = 0, \\ Q(t_1) R(t_2) - Q(t_2) R(t_1) = 0, \end{cases}$$

employé pour trouver les points doubles (à distance finie) de la courbe unicursale $x = \frac{P(t)}{R(t)} \quad y = \frac{Q(t)}{R(t)}$ a les solutions étrangères du type (τ, τ') τ et τ' étant des racines distinctes de $R(t) = 0$: il s'en est ensuivi des décomptes de géométrie énumérative largement fantaisistes, y compris l'affirmation qu'une courbe unicursale n'a pas généralement de points doubles.

Deux des trois leçons sur la multiplication des séries absolument convergentes ne considéraient pas le tableau des produits $u_i v_j$ qui apporte une clarté indispensable dans l'examen des réductions qu'offre la différence $U_n V_n - W_n$ (notations classiques).

La leçon sur le birapport de quatre points d'une conique, faite sans aucun soin ni effort d'adaptation à un auditoire d'élèves, eût laissé, à nos collègues belges, une impression beaucoup plus lamentable que celle, assez mitigée, qu'ils ont emportée de leur passage à l'École Normale, à l'audition d'une leçon d'un candidat en cours d'année.

Beaucoup de confusion dans la leçon sur les formes linéaires, où le candidat supposait traitée au préalable la discussion des systèmes d'équations linéaires ; ceci aurait dû permettre une présentation impeccable distinguant nettement les conditions nécessaires d'indépendance des conditions suffisantes.

Dans la leçon 37, le théorème de Rolle a été assez bien exposé, mais des imprécisions, des inexactitudes mêmes se sont trouvées dans l'application de la formule des accroissements finis à la recherche du sens de variation d'une fonction ; après

avoir donné une définition correcte du maximum ou minimum relatif, l'auteur a entrepris de prouver qu'il se rattache toujours à un changement du signe de la dérivée. La considération de la fonction $y = x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$, pour $x = 0$, aurait pu le convaincre du contraire.

Chaque année, la leçon sur la convergence des séries entières révèle la persistance d'illusions de débutants sur bien des points. Il est assez grave d'enseigner que la convergence est uniforme à l'intérieur de l'intervalle de convergence $-R, +R$ (on ne peut établir cette uniforme convergence, en toute généralité, que sur le segment $-r, +r$, r étant un nombre positif inférieur à (R)). De plus, le candidat s'est inspiré d'une leçon, tout à fait exceptionnelle celle-là, faite il y a deux ans sur le même sujet, où avait été correctement établie la formule, due à Cauchy :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

[la limite surlignée, dite par Cauchy plus grande des limites, a été depuis dénommée limite supérieure d'indétermination, ou plus brièvement, *limite supérieure* de la suite $|a_n|$]. Mais le candidat n'a pas défini cette notion de manière correcte, et l'usage de celle-ci est apparu au jury comme un masque, dispensant l'auteur de la leçon d'une présentation minutieuse et élémentaire de certains raisonnements ; notamment ceux qui sont relatifs à l'étude de la convergence de la série des dérivées de la série entière.

La leçon sur l'extension, aux valeurs réelles quelconques de x , de la définition de a^x , a encore été bien mauvaise ; on y oublie trop souvent qu'il y a une infinité de manières de définir un nombre irrationnel X (ou même rationnel) par deux ensembles adjacents de rationnels que ce nombre sépare ; il y a donc une infinité de définitions correspondantes de a^x , qu'il est essentiel de comparer et dont on montre la concordance.

Une médiocre leçon a été faite sur les séries à termes positifs, avec imprécision des idées et du langage. Deux fautes graves ont été relevées dans l'énoncé, que le candidat a donné de la règle $n^a u_n$. Les nuances de l'emploi de $\sqrt[n]{u_n}$ (se rattachant, précisément, à la notion de limite supérieure d'une suite) n'ont pas été exposées.

Les exemples de courbes $\rho = f(\omega)$ donnés pour illustrer les théories ont été, cette année, plutôt pauvres.

Le mouvement d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance s'étudie simplement sans l'intervention du théorème des aires et du théorème des forces vives. Mais ces théorèmes généraux se trouvent expliquer les propositions traditionnelles d'Apollonius sur les diamètres conjugués de l'ellipse. Le candidat n'a pas été bien inspiré d'admettre comme connus ces théorèmes.

Une leçon sur le glissement d'un point pesant le long d'une ligne de pente d'un plan incliné, bien dominée par son auteur, lui a assuré une grande part de son succès.

La leçon sur la différentielle totale, facile lorsqu'on n'adopte pas le point de vue, relativement récent, des fonctions linéairement différentiables, a été mal reconstituée et contenait l'erreur, classique autrefois : « La différentielle totale d'une fonction est la partie principale de l'accroissement de la fonction. » On ne définit d'ailleurs de telle partie principale, habituellement, que pour une fonction d'une seule variable.

Trop de dogmatisme dans l'exposé de l'obtention de la formule de Taylor. On peut certes la déduire de la formule d'intégration par parties généralisée :

$$\int_a^b uv^{(n)} dx = \left[uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \dots + (-1)^n u^{(n-1)}v \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)} v dx$$

mais c'est une démonstration élégante découverte après coup dans l'histoire de l'Analyse.

Une leçon d'initiation sur le plan osculateur comporte un choix : il faut croire que celui-ci est bien douloureux pour nos candidats qui ne peuvent se résigner à laisser de côté les vecteurs $V(p)$, $V(q)$, dérivées vectorielles du vecteur \overline{OM} par rapport au paramètre t , dont il dépend, quand p et q sont des entiers quelconques. Une présentation n'utilisant que les second et troisième ordres au plus est suffisamment suggestive pour les élèves de Spéciales. En procédant ainsi, le candidat aurait du temps de reste pour étudier la position d'une courbe, dans le voisinage d'un de ses points par rapport au plan osculateur en ce point, pour donner des conditions relatives au cas du plan osculateur constamment stationnaire (cas d'une courbe plane), et enfin pour montrer, s'il a du temps de reste, que pratiquement on peut se libérer de la tyrannie théorique de la considération des dérivées d'ordre supérieur — avec des applications.

**

Bien des notes honorables, dans ces leçons, ont été dues à des qualités pédagogiques, qui ont joué un rôle très loin d'être négligeable. Par contre, les défauts de soin, de présentation, ont été fréquents. Le langage ne fait pas non plus l'objet d'une attention suffisante. En voici, sur des citations, quelques exemples :

« Il faudrait, ici, refaire un calcul en forme. » (Le candidat dispose de deux vastes tableaux noirs).

« L'ascension droite (du Soleil) croît constamment, et, au bout d'un an, reprend la même valeur. »

« Projétons sur Ox le principe de la dynamique. »

« La vérification collera-t-elle (*sic*) ? Oui, elle colle. »

« Comme à l'habitude, les premier, second, troisième, quatrième quadrants se succèdent dans le sens des aiguilles d'une montre. » (Sur la figure la disposition de ces quadrants étant tout à l'opposé).

« Σ_n tend vers pas de limite. »

« α est plus petit que φ . Donc si $\varphi = 0$, α ne peut être que nul. »

« $y = \sqrt{4x + 3} - \alpha x - \beta$ (quand x tend vers $+\infty$), tend vers $-\alpha x$. »

« La courbe est croissante », etc. .

Les notes de l'oral se répartissent ainsi qu'il suit :

Élémentaires : un 19, un 18, un 17, deux 16, cinq 15 ; six 14, quatre 13, trois 12, six 11, trois 10 ; quatre 9, cinq 8, trois 7, un 5. Moyenne de l'ensemble des leçons 12 (moyenne de l'an dernier 12,25).

Spéciales : un 19, six 16, trois 14, trois 13, quatre 12, un 11, cinq 10 ; trois 9, sept 8, cinq 7, six 6, un 3, soit presque autant de notes au-dessous de la moyenne qu'au-dessus. Moyenne de l'ensemble des leçons 10,27 (moyenne de l'an dernier 12,4).

EPREUVES PRATIQUES

Elles ont été effectuées le 16 juillet au Lycée Saint-Louis.

COMPOSITION D'ÉPURE : *Sujet*. — Les données, exprimées en centimètres, sont rapportées à trois axes rectangulaires Ωxyz . L'axe Ωy est le petit axe de la feuille, orienté positivement vers la droite ; le plan $a\Omega y$ est le plan horizontal de projection, le plan $y\Omega z$ est le plan frontal de projection, le plan $x\Omega z$ est de profil, suivant le grand axe de la feuille ; Ωx est orienté positivement vers le bas, Ωz vers le haut.

Un hyperboloïde H contient les droites

$K(x=12 ; z=6)$; $K_0(y=-6 ; x+z-12=0)$; $K_1(x=6 ; z-2y-12=0)$

Une surface \mathcal{C} est engendrée par les droites Δ qui rencontrent orthogonalement la droite K et qui s'appuient sur la ligne \mathcal{G} représentée par les équations :

$$y - z + 12 = 0 ; (x - 12)^2 + y^2 = 36.$$

1° Construire la partie non rectiligne \mathcal{L} de l'intersection des surfaces H et \mathcal{C} .
On justifiera brièvement la construction du point M où une droite Δ recoupe H (en dehors du point P où elle s'appuie sur K), ainsi que des points et des tangentes remarquables.

2° La ligne \mathcal{L} présente un point double apparent en projection horizontale : déterminer ce point, et les tangentes correspondantes.

3° On construira, en justifiant cette construction, la tangente à \mathcal{L} au point courant M déterminé au § 1°.

4° Deux génératrices, Δ et $\bar{\Delta}$ de \mathcal{C} , s'appuient sur K au même point P ; il leur correspond les points M et \bar{M} de \mathcal{L} . Soit \mathcal{S} le solide engendré par la surface du triangle $MP\bar{M}$. Représenter la portion de \mathcal{S} située au-dessus du plan horizontal de cote 6.

OBSERVATIONS (M. CAGNAC). — L'énoncé proposait l'étude de l'intersection d'un hyperboloïde réglé H et d'un conoïde de Plücker \mathcal{C} ; l'axe de \mathcal{C} était une génératrice K de H, parallèle à la ligne de terre, et, en outre une génératrice G_0 de H appartenait à \mathcal{C} , si bien que la ligne \mathcal{L} qu'on demandait de construire était une cubique gauche ; 11 candidats seulement ont reconnu l'existence de G_0 .

Tous les candidats, à l'exception d'un seul, ont vu qu'en coupant H et \mathcal{C} par un plan Π contenant K, on déterminait une génératrice Δ dans \mathcal{C} , une génératrice G dans H, et que le point M commun à Δ et G était un point courant de \mathcal{L} .

La plupart des candidats ont déterminé G par les points où Π coupe les génératrices données K_0 et K_1 : que de maladresses dans ces constructions ! En outre, dès qu'on trace les projections de diverses génératrices G de H, il est élémentaire de contrôler que ces droites sont tangentes au contour apparent en projection de H : hélas ! le correcteur a constaté que cette notion est ignorée de la grosse majorité des candidats : six seulement ont reconnu que le contour apparent en projection horizontale de H est un cercle γ , inscrit dans le carré formé par les projections de K, K_0 , K_1 et G_0 . Dès lors, une génératrice quelconque G s'obtenait aisément en coupant H par un plan vertical tangent à γ , et en marquant les points où ce plan est percé par K et K_1 .

Le cercle γ est la projection d'une section elliptique de H, située dans un plan de bout parallèle au plan \mathcal{E} , ce qui justifiait le caractère circulaire de la projection horizontale de \mathcal{L} .

Dans aucune épure, le point à distance finie où \mathcal{L} s'appuie sur G_0 n'a été déterminé. Le point double apparent a été placé correctement dans quelques épreuves, mais sans justification suffisante ; trois candidats ont reconstitué la génération cissoïdale de la cubique circulaire à partir d'une droite et d'un cercle.

Un seul candidat a construit la tangente au point courant M de \mathcal{L} .

Personne n'a reconnu le parabolôïde hyperbolique engendré par les droites MM .

Les meilleures notes sont 17, 16, 15, 14, 12 (deux fois) et 11 ; la moyenne générale de l'épreuve est 5,82.

COMPOSITION DE CALCUL NUMÉRIQUE : *Sujet*. — On considère un cercle de rayon 1 et un triangle isocèle $A'B'C'$ circonscrit à ce cercle ; $B'C'$ étant la base de ce triangle, on désigne par 2φ l'ouverture de l'angle opposé A' ; On projette la figure sur un plan parallèle à $B'C'$. Le cercle se projette suivant une ellipse E d'excentricité e , et le triangle $A'B'C'$, suivant un triangle ABC, isocèle, circonscrit à E, et dont le périmètre est désigné par $2p$.

1° Lorsque φ varie, ce périmètre varie. Il est minimum lorsque l'on a la relation

$$(1) \quad e = \frac{\sqrt{1 - 2 \sin \varphi}}{(1 - \sin \varphi) \cos \varphi}$$

et le minimum est donné par la relation

$$(2) \quad \rho = \frac{(2 - \sin \varphi) \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi)^2}$$

N.-B. — L'épreuve n'ayant qu'une durée de trois heures, on ne demandait pas de retrouver les formules (1) et (2).

2° Dans la suite du problème, on choisit $e = 0, 1$ et φ de façon que 2ρ soit minimum. Calculer d'abord $\sin \varphi$, en s'aidant d'une représentation graphique, puis 2ρ , avec la précision que permet l'usage de la table de logarithmes à cinq décimales.

3° On se propose de calculer les valeurs précédentes avec plus de précision. A cet effet on pose :

$$\sin \varphi = \frac{1}{2} - z.$$

L'équation (1), mise sous forme entière, peut s'écrire (1') $f(z) = u$ où $f(z)$ est un polynôme en z , nul pour $z = 0$, et dont le terme en z a pour coefficient 1. Quant à u , il est égal à une constante numérique u_0 .

La relation (1'), où u est considéré comme une variable complexe, fixe une dépendance entre les deux variables complexes u et z . Démontrer les propriétés suivantes :

a. La fonction $f(z)$ est univalente pour $|z| \leq 3$ [et même un peu au delà] : autrement dit, si elle prend une valeur v en un point z de module au plus égal à 3, elle la prend une fois en ce point, et les autres points z où $f(z) = v$ sont extérieurs au cercle $|z| = 3$.

b. Lorsque z décrit un arc de longueur l ($|z| \leq 3$), le point u décrit un arc de longueur $L < kl$ (k numérique).

c. Lorsque z décrit une fois, dans le sens direct, le cercle $|z| = r$ ($r \leq 3$), le point u décrit une fois, dans le sens direct, une courbe $C(r)$ sans point double, entourant l'origine $u = 0$.

d. Comment se comporte $C(r)$ quand r croit de 0 à 3 ?

e. Si l'on désigne par $g(u)$ la branche de la fonction inverse de $f(z) = u$ qui s'annule pour $u = 0$, cette branche est uniforme et holomorphe dans et sur $C(3)$.

Déduire de ce qui précède une majoration (en fonction de l'indice n) de la dérivée n^{me} de $g(u)$ pour $u = 0$.

4° Au voisinage de l'origine, la fonction $g(u)$ est développable en série entière de la forme $g(u) = u + a_2 u^2 + \dots$. Combien faut-il calculer de termes pour connaître $g(u)$, c'est-à-dire z , à 10^{-9} près ?

Application. — On ne conserve que les deux premiers termes de la série précédente. Calculer une valeur approchée de $\sin \varphi$ basée sur cette approximation, et préciser une limite supérieure de l'erreur commise.

Se servir de cette valeur approchée pour calculer 2ρ , en précisant de même une limite supérieure de l'erreur commise.

OBSERVATIONS (M. MILLOUX). — La composition de Calcul numérique comporte quatre parties. La première montre l'origine géométrique du problème ; quoiqu'elle soit très simple, l'énoncé précise les résultats desquels vont dépendre les paragraphes ultérieurs.

La seconde partie consiste essentiellement dans le calcul numérique d'une racine x , d'une certaine équation du quatrième degré, et dans l'application au calcul approché de la longueur géométrique 2ρ de la première partie. Une étude élémentaire très rapide de l'équation permet de situer x au voisinage de $\frac{1}{2}$. Un calcul plus précis,

effectué à l'aide de la table de logarithmes, et en employant des procédés classiques, fournit x à un millième près et même avec une précision plus poussée.

On propose ensuite une méthode basée sur un développement en série, dont avant tout il importe de savoir majorer chaque terme : la troisième partie forme l'armature théorique de cette méthode, par l'emploi de propriétés bien connues de la théorie des fonctions d'une variable complexe ; la quatrième partie est l'application pratique, qui consiste en premier lieu à calculer x avec une grande précision — dans les conditions de l'énoncé on peut garantir plus de 10 décimales exactes. Il reste enfin à calculer la grandeur géométrique $2p$.

Presque tous les candidats se sont arrêtés au voisinage de la fin de la deuxième partie. La barrière théorique de la troisième partie les a stoppés en les dispersant. Deux candidats seulement sont arrivés à trouver x , dans la quatrième partie, avec une bonne précision. Leurs notes s'en ressentent : 19 et 16 sur 20. Quant aux autres, trente-cinq d'entre eux ont obtenu des notes moyennes, entre 7 et 13 (un seul candidat a 13). Enfin, la moyenne générale des quarante-cinq candidats ayant composé en Calcul numérique est 8,75.

Certains candidats à l'Agrégation ont tort de négliger cette épreuve, pourtant très abordable ; leur impréparation est manifeste. Il n'est pas douteux que dans quelques cas, la note obtenue est décisive dans le résultat final de l'Agrégation, malgré le modeste coefficient. Il est à souhaiter qu'à l'avenir, les candidats s'intéressent davantage, en temps utile, au Calcul numérique.

RESULTATS GENERAUX

Pour l'ensemble des épreuves écrites, orales et pratiques, les totaux de notes obtenues par les admissibles varient de 121 à 356 sur 400, soit de 6,05 à 17,8 sur 20.

Le candidat en tête de la liste des admissibles, et qui était déjà classé premier à l'écrit, a réalisé des épreuves d'une rare perfection et est appelé à un bel avenir. Son total de points n'a été dépassé, dans les annales de l'Agrégation, que par le regretté Frédéric Marty, en 1931, et de 3 points seulement.

Le jury a proposé pour l'admission définitive les trente-quatre premiers candidats, avec deux *ex-æquo* en queue de liste. Ces deux derniers candidats, sur la liste des agrégés, ont comme moyenne de toutes les épreuves 8,95 sur 20 (contre 9,1 en 1951). La moyenne générale est 10,64 (10,6 en 1951 ; 11,08 en 1950). Le candidat classé trente-cinquième n'a atteint que 8,5.

Il y a de grandes variations entre le classement de l'admissibilité et le classement final ; en tête, si les premier et quatrième des deux listes concordent, le second de l'écrit passe vingt-troisième du classement final : le huitième et le dix-septième de l'écrit deviennent deuxième (*ex-æquo*) de la liste des agrégés.

Le groupe des trente-quatre nouveaux agrégés comprend neuf élèves de l'Ecole Normale Supérieure de la rue d'Ulm ; deux auditeurs à cette école dont le premier du classement ; un élève — et un ancien élève — de l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud ; deux assistants de Facultés ; douze professeurs de l'Enseignement du Second Degré ; deux professeurs de l'Enseignement technique ; deux professeurs (délégués) des Ecoles Normales d'instituteurs ; deux stagiaires d'enseignement et un étudiant de la Faculté de Lille, classé deuxième.

On compte parmi cette liste onze admissibles à l'un, au moins, des concours précédents.

Sur les douze admissibles non reçus figurent quatre professeurs de lycées et un professeur de collège, un instituteur, un adjoint d'enseignement, trois élèves de Saint-Cloud, deux stagiaires d'enseignement, l'un de seconde, l'autre de première année.

La dispense du Certificat d'aptitude à l'enseignement dans les collèges a été accordée à un seul admissible ; les autres la possédaient déjà, sauf les stagiaires d'enseignement et l'adjoint d'enseignement.

Sur ces douze admissibles non reçus, on compte trois triadmissibles et un biadmissible.

*
**

Nous regrettions l'an dernier que le niveau des épreuves, affaibli notamment par le niveau de l'écrit, n'ait pas permis un recrutement en agrégés permettant de faire face aux besoins, à ceux de l'Enseignement du Second Degré, en particulier. Cette année, le jury a éprouvé une impression analogue, et regrettait presque que des représentants des Associations, qui ont soutenu la thèse d'un allongement désirable des listes d'agrégés, ne fussent pas présents à l'oral. Il a l'impression d'avoir été aussi loin que le souci du prestige de l'Agrégation le permettait.

Les statistiques justifiant la thèse en question n'ont pas paru tenir compte de l'arrêt des sessions spéciales ou des classements spéciaux accordés à ceux dont les études ont été entravées par la guerre ; de 1945 à 1950, de larges possibilités d'acquiescence licence d'enseignement et diplôme en un temps très court avaient été légitimement accordées, dont ont profité des esprits que les dures circonstances de la guerre avaient mûri. Les jeunes étudiants de 1952, privilégiés par rapport à ces aînés, ne sont cependant pas placés dans des conditions analogues et les comparaisons qui ont été faites touchant le pourcentage des agrégés avant et après 1950 ne sont pas absolument légitimes.

Est-il possible d'améliorer le recrutement ? Certainement l'institution des Centres Pédagogiques régionaux y contribuera, mais il ne faut pas se dissimuler qu'elle reste, dans son rendement touchant l'Agrégation, subordonnée au niveau général des étudiants qui s'orientent vers la licence, en passant par l'année de propédeutique, et cette filière assez longue leur fait fréquemment perdre de vue, sinon oublier, ce qu'est l'Enseignement du Second Degré.

Et, pour les Mathématiques, une proportion importante des sujets les mieux doués a obliqué vers les grandes Ecoles scientifiques. A notre avis, il y aurait là, au moins en ce qui concerne la culture de connaissances, un courant perdu en grande partie pour l'Agrégation.

Que ceux qui ont la charge d'étudier des équivalences possibles ne l'oublient pas, et qu'ils n'objectent pas des insuffisances pédagogiques, qui, actuellement, il faut bien le reconnaître, s'étendent fâcheusement à celles des grandes Ecoles dépendant du Ministère de l'Education Nationale.

De plus, actuellement, il y a de précieuses ressources en nos professeurs eux-mêmes, dont certains n'avaient pas l'idée de préparer l'Agrégation, ou y ont échoué autrefois par malchance, et se sont résignés à ne plus s'y réparer. Tous les ans, le jury a l'agréable surprise de constater, par exemple, que des titulaires de l'ancien Certificat d'Aptitude à l'Enseignement des Ecoles Normales et Primaires Supérieures se révèlent comme excellents agrégés.

Pour conclure, n'oublions pas qu'un titre plein de prestige comme celui d'agrégé n'est pas suffisant et qu'il reste à ceux qui ont fait la preuve de leur science et de leur travail qu'ils fassent aussi, ultérieurement, la preuve de leur désir de communiquer ce qu'ils savent aux élèves qui leur seront confiés. Nous pouvons, cependant, éprouver à ce sujet un profond optimisme.

P. ROBERT,

Inspecteur général de l'Instruction publique.

Concours général de Mathématiques pour les classes de Première en 1952

Rapport de M. l'Inspecteur général DESFORGE, Président du Jury

Le Jury était ainsi composé : M. DESFORGE, inspecteur général, président ; Mme DOMANGE, professeur de Mathématiques (classe de Fontenay) au Lycée Fénelon ; Mlle LECONTE, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Fénelon ; M. Charles DURAND, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Buffon ; M. LEBOSSÉ, professeur de Mathématiques au Lycée Claude-Bernard ; M. TATON, professeur de Mathématiques au Lycée de Suresnes.

Le problème proposait d'abord l'étude de quelques propriétés des quadrilatères gauches circonscriptibles, au sens strict, à une sphère, c'est-à-dire tels qu'il existe au moins une sphère tangente à leurs quatre côtés, chacun des points de contact étant à l'intérieur ou à l'une des extrémités du côté sur lequel il se trouve.

Il est presque évident que les longueurs a, b, c, d des côtés successifs AB, BC, CD, DA d'un tel quadrilatère vérifient la relation $a + c = b + d$. La démonstration de cette propriété constituait le début de la première partie du problème ; elle ne présentait aucune difficulté ; cependant certains candidats paraissent hésitants, peinant quelque peu, parfois, pour retrouver, ou pour découvrir, une propriété bien classique des tangentes à une sphère passant par un point.

L'énoncé précisait que cette question liminaire était destinée à préparer l'essentiel de l'étude demandée ensuite, et dont l'aboutissement, après quelques étapes, est une démonstration de la réciproque du résultat précédent.

D'abord, il s'agissait d'établir l'existence de quadrilatères gauches tels que la somme des longueurs de deux côtés opposés soit égale à la somme des longueurs des deux autres. Un mode simple, parmi bien d'autres, de construction de ces quadrilatères (A B C D) était proposé, à partir de quatre segments donnés dont les longueurs a, b, c, d , vérifient la relation (1) $a + c = b + d$, et de deux points donnés A et C : deux points B et D définis comme appartenant l'un aux deux sphères (A, a) et (C, b) ayant respectivement pour centres A et C et pour rayons a et b , l'autre aux deux sphères analogues (A, d) et (C, c), déterminent avec les points A et C les quatre sommets d'un quadrilatère (A B C D) satisfaisant évidemment à la condition que l'on cherche à réaliser pour les longueurs des côtés, ce quadrilatère étant gauche si le point D est choisi hors du plan ABC. Cette construction, qui permet d'obtenir tous les quadrilatères étudiés, est possible si chacun des deux couples de sphères considérés est formé de sphères sécantes, c'est-à-dire si la longueur AC est comprise en même temps entre $|a - b|$ et $(a + b)$, et entre $|c - d|$ et $(c + d)$: en tenant compte de la relation (1), qui peut aussi être écrite sous la forme $a - b = d - c$, ces deux conditions simultanées se réduisent à l'unique condition suivante, d'ailleurs « nécessaire et suffisante » : la distance AC doit être supérieure à $|a - b|$ et inférieure à la plus petite des deux longueurs $(a + b)$ et $(c + d)$.

Faut-il attribuer à cette sorte de « complexe d'infériorité », déjà souvent signalé, que manifestent nombre d'élèves dès qu'il s'agit, si peu que ce soit, d'algèbre, les insuffisances relevées dans bien des compositions à propos de cette petite discussion, pourtant banale ? Cela n'est pas impossible ; ne voit-on pas apparaître dans maintes copies, au sujet des inégalités imposées à la longueur AC, des tentatives de transformations qui s'apparentent nettement à certains calculs plus ou moins habituels lorsqu'on manie des égalités ou des équations, et dont les débutants peuvent croire qu'ils possèdent quelque privilège d'infailibilité, leur application automatique dispensant de toute réflexion ? Notons, entre autres, une faute fréquente qui consiste à remplacer le système des deux inégalités simultanées concernant AC par une inégalité unique obtenue par addition « membre à membre » des relations initiales (heureusement écrites, la plupart du temps, dans le même sens).

Au point de vue géométrique, cette même question a révélé une trop grande proportion de candidats — plus de la moitié — qui semblent ignorer que l'existence d'un cercle commun à deux sphères, dont on connaît les centres et les rayons, n'est acquise que sous une double condition d'inégalité, identique à celle que l'on rencontre dans la recherche d'un triangle ayant pour côtés trois segments donnés. Nombreux sont ceux qui se bornent à exprimer que la distance des centres est inférieure à la somme des rayons.

Après avoir fait préciser les lieux géométriques des sommets B et D de tous les quadrilatères obtenus par la construction précédente, les sommets A et C étant fixes, ainsi que les longueurs a, b, c, d , l'énoncé demandait, afin d'attirer l'attention sur certaines formes de ces quadrilatères, à quelles conditions ces deux lieux sont situés dans un même plan. Beaucoup ont rattaché très normalement cette question au théorème classique sur le lieu géométrique des points dont la différence des carrés des distances à deux points, A et C, est donnée, et ont ainsi obtenu correctement une relation caractérisant ces figures particulières : $b^2 - a^2 = c^2 - d^2$. Mais il convenait d'aller plus loin, en tenant compte de l'hypothèse (1), qui conduisait, par un calcul bien élémentaire, à la condition, toujours caractéristique : $(b - a) \cdot (b - c) = 0$. Ainsi apparaissent les deux solutions :

$a = b$, entraînant $c = d$, correspondant aux quadrilatères admettant comme plan de symétrie le plan médiateur du segment diagonal AC, les cercles lieux de B et D étant alors concentriques et non nécessairement égaux ;

$b = c$, entraînant $a = d$, correspondant, naturellement, aux quadrilatères admettant comme plan de symétrie le plan médiateur du segment diagonal BD, les cercles lieux de B et de D étant alors confondus.

Bien entendu, ces deux solutions algébriquement distinctes, ne définissent géométriquement qu'une seule solution formée par ceux des quadrilatères de la famille étudiée qui admettent un plan de symétrie, ce plan ne pouvant être que le plan médiateur de l'un des segments diagonaux.

Là encore, l'algèbre intervenant quelque peu, discrètement du reste, dans le raisonnement, les obstacles classiques n'ont pas manqué de provoquer des accidents, dont le plus courant fut la disparition de l'une des solutions, par la voie d'une « simplification » pourtant maintes fois interdite.

Pour préparer la mise en place des éléments intervenant ultérieurement dans le problème, une fois démontrée l'existence de quadrilatères gauches dont les côtés vérifient la relation (1), l'on demandait d'établir que les longueurs a, b, c, d , peuvent être rangées dans un ordre facile à définir en remarquant d'abord que l'un des couples de côtés opposés comprend nécessairement les deux côtés extrêmes. Il s'agissait là de propriétés banales : si a désigne la plus petite des quatre longueurs, les relations $b - a = c - d$, $d - a = c - b$, montrent que c est forcément la plus grande, et si l'on suppose alors que b est la plus petite des deux longueurs moyennes, le classement s'établit sous la forme $a \leq b \leq d \leq c$. Malgré sa simplicité, cette question, qui faisait appel au bon sens plus qu'à la virtuosité mathématique, n'a été traitée, ou comprise, que par un petit nombre, et beaucoup ont fourni de sérieux efforts pour n'aboutir qu'à quelques considérations peu convaincantes.

Les questions 3^o et 4^o constituaient l'essentiel de la première partie, puisqu'elles conduisaient, par une succession d'étapes, mettant d'ailleurs en évidence quelques propriétés intéressantes de la figure, à la démonstration de l'existence de sphères tangentes, au sens strict, aux quatre côtés d'un quadrilatère gauche dont les côtés a, b, c, d , vérifient la relation (1).

En se plaçant dans l'hypothèse générale $a < b \leq d$, qui entraîne $d < c$, on étudiait d'abord le groupe de quatre points M, N, P, Q, obtenus à partir d'un point M, arbitrairement choisi sur le plus petit côté AB, et défini par la distance : $AM = u$ ($0 \leq u \leq a$), en partant successivement sur les droites BC, CD, DA, respectivement dans le sens de B vers C, de C vers D, de D vers A, les segments

$BN = BM$, $CP = CN$, $DQ = DP$. Une raison bien évidente, que l'on ne demandait d'ailleurs pas d'indiquer, justifie la prise en considération de tels points, qui sont les seuls pouvant être les points de contact des quatre côtés du quadrilatère avec une sphère « inscrite », s'il en existe une.

Il est facile d'établir que les points N , P , Q , sont effectivement situés sur les segments BC , CD , DA , et non sur leurs prolongements, et que l'on a

$$BN = a - u, \quad CP = b - a + u = c - d + u, \quad DQ = d - u,$$

d'où l'on déduit $AM = AQ$.

Dans chacun des cas limites $u = 0$ et $u = a$, le quadrilatère $MNPQ$ est remplacé par un triangle : AN_0P_0 pour $u = 0$, BP_1Q_1 pour $u = a$.

L'observation un peu attentive des constructions ainsi effectuées met en évidence que, quel que soit u , les quatre segments MN , NP , PQ , QM restent parallèles à des droites fixes, qui sont les bissectrices extérieures des quatre angles \widehat{ABC} , \widehat{BCD} , \widehat{CDA} , \widehat{DAB} (que l'on désignera en abrégé par les lettres B , C , D , A). En particulier, les deux triangles AN_0P_0 et BP_1Q_1 ont deux couples de côtés parallèles : N_0P_0 et BP_1 parallèles à la bissectrice extérieure de l'angle C , AP_0 et P_1Q_1 parallèles à la bissectrice extérieure de l'angle D . Les plans de ces deux triangles sont donc eux-mêmes parallèles ; comme les côtés AN_0 et BQ_1 , respectivement parallèles aux bissectrices extérieures des angles B et A , sont parallèles à la direction commune des plans des deux triangles, il est établi que les bissectrices extérieures des quatre angles du quadrilatère sont parallèles à une même direction de plans, définie par exemple par l'un des plans V_0 ou V_1 des triangles AN_0P_0 ou BP_1Q_1 . Il en résulte que tout quadrilatère $MNPQ$ est un quadrilatère plan, dont le plan V est parallèle à V_0 .

Il est tout indiqué de poursuivre l'étude des deux triangles AN_0P_0 et BP_1Q_1 : non seulement les segments N_0P_0 et BP_1 sont parallèles, mais, de plus, ils ont la même médiatrice, et, par conséquent, le même plan médiateur, qui est le plan perpendiculaire au plan BCD passant par la bissectrice intérieure de l'angle C ; ce plan sera appelé le plan bissecteur intérieur de l'angle C . De même, les segments AP_0 et P_1Q_1 ont le même plan médiateur, qui est le plan bissecteur intérieur de l'angle D . Ces deux plans médiateurs sont perpendiculaires aux plans V_0 et V_1 , qu'ils coupent respectivement suivant les médiatrices de deux des côtés des triangles AN_0P_0 et BP_1Q_1 . Ces deux plans médiateurs sont donc sécants, leur intersection Z étant, pour chacun des deux triangles, l'axe du cercle qui lui est circonscrit. Les propriétés classiques des trois médiatrices, ou des trois plans médiateurs, des côtés d'un triangle font alors apparaître que la droite Z appartient aussi aux plans médiateurs des segments AN_0 et BQ_1 , c'est-à-dire aux plans bissecteurs intérieurs des angles B et A .

Ayant ainsi découvert que les plans bissecteurs intérieurs des quatre angles A , B , C , D avaient une droite commune Z , on remarque que ces plans sont également les plans médiateurs des segments MN , NP , PQ , QM , pour chacun des quadrilatères plans $MNPQ$. On en déduit qu'il existe un lieu géométrique de points équidistants des quatre sommets M , N , P , Q d'un tel quadrilatère, ce lieu étant la droite Z , bien entendu perpendiculaire au plan V ; en particulier le point ω où Z coupe le plan V est le centre d'un cercle passant par les points M , N , P , Q . Tout quadrilatère $MNPQ$ est donc inscriptible. Le centre ω du cercle qui lui est circonscrit, étant à l'intersection de la droite fixe Z et du plan V , n'est autre que la projection orthogonale sur Z du point M , qui décrit, par hypothèse, le segment AB ; le lieu géométrique du centre ω est donc la projection orthogonale sur la droite Z du segment AB , c'est-à-dire le segment $\omega_0 \omega_1$ de la droite Z compris entre les plans V_0 et V_1 .

L'énoncé signalait incidemment que le quadrilatère plan $MNPQ$ est convexe. Cette affirmation se justifie facilement : deux quelconques des sommets consécutifs de ce quadrilatère, M et Q par exemple, étant des points intérieurs aux segments AB

et AD sont d'un même côté du plan BCD (dans celui des deux « demi-espaces », déterminés par le plan BCD, qui contient le point A), et par conséquent sont, dans le plan V, d'un même côté du support du côté NP (dans celui des deux demi-plans situé par rapport au plan BCD du même côté que le point A) ; le raisonnement étant valable pour les quatre côtés, le quadrilatère MNPQ vérifie bien les conditions de la définition élémentaire d'un polygone convexe.

Poursuivant l'inventaire des propriétés simples résultant de l'examen de la figure, on voit que la droite Z, appartenant à l'un des plans bissecteurs de l'angle A, fait des angles égaux avec les supports des côtés AB et AD ; il en est de même pour les trois autres couples de droites BA et BC, CB et CD, DC et DA. La droite Z fait donc des angles égaux avec les quatre droites AB, BC, CD, DA, ce qui peut s'exprimer, comme le proposait l'énoncé, en disant que les quatre côtés du quadrilatère gauche (A B C D) sont parallèles à quatre génératrices d'un cône de révolution autour de la droite Z. On peut remarquer en passant qu'il s'agit bien d'un véritable cône, la droite Z n'étant ni parallèle, ni perpendiculaire aux côtés de (A B C D).

Le terrain ainsi préparé, de nouvelles propriétés, concernant maintenant les points de la droite Z, sont faciles à mettre en évidence. Exploitant plus complètement le fait que Z est dans le plan bissecteur intérieur de l'angle A, ou, ce qui revient au même, que la projection orthogonale Z_a de Z sur le plan BAD est la droite qui

porte la bissectrice intérieure de cet angle \widehat{BAD} , on peut construire les projections orthogonales m et q d'un point quelconque F de Z sur les droites AB et AD en projetant orthogonalement d'abord le point F sur la droite Z_a , puis le point ainsi obtenu F_a sur les droites AB et AD : les points m et q étant symétriques par rapport à Z_a , le segment mq est parallèle à la bissectrice extérieure de l'angle A. Si n et p sont les projections orthogonales de F sur les droites BC et CD, on voit de même que les segments mn , np , pq sont parallèles respectivement aux bissectrices extérieures des angles B, C, D. Les quatre bissectrices extérieures des angles A, B, C, D étant parallèles à un même plan, V_0 par exemple, les quatre points m , n , p , q sont dans un même plan v parallèle à V_0 . Le plan v n'est pas nécessairement l'un des plans V contenant les quadrilatères MNPQ déjà étudiés, car certains des points m , n , p , q peuvent être sur les prolongements des segments AB, BC, CD, DA ; plus précisément, lorsque le point F décrit toute la droite Z, sa projection orthogonale m sur la droite AB décrit cette droite AB tout entière, puisque Z et AB ne sont pas orthogonales — chaque point de AB étant du reste la projection orthogonale d'un point et d'un seul de Z —, et le plan v correspondant prend toutes les positions parallèles à V_0 .

On est ainsi sur la voie de la réciproque de la propriété précédente : un plan quelconque v' perpendiculaire à Z coupe les droites AB, BC, CD, DA en des points m' , n' , p' , q' ; ces points sont-ils les projections orthogonales sur ces droites d'un même point de Z ? Un raisonnement par identification s'établit facilement : le plan perpendiculaire à AB au point m' coupe la droite Z en un point F' ; les projections orthogonales de ce point F' sur les droites BC, CD, DA sont des points n'' , p'' , q'' , qui, d'après les résultats antérieurs, sont situés dans le plan passant par m' et parallèle à V_0 , donc dans le plan v' ; les points n'' , p'' , q'' coïncident par conséquent avec les points n' , p' , q' . La réciproque est donc exacte.

Revenant à un point quelconque F de Z, les distances de F aux droites AB, BC, CD, DA sont les longueurs des segments Fm , Fn , Fp , Fq ; ces segments sont manifestement égaux, puisque F appartient à l'un des plans bissecteurs de chacun des angles A, B, C, D. La sphère (F) ayant pour centre le point F et passant par m , par exemple, passe également par n , p , q ; elle est tangente en ces points aux droites AB, BC, CD, DA.

Pour compléter ces remarques générales, l'énoncé proposait d'établir qu'il existe, parmi les points F, un point particulier F_0 situé dans le même plan v_0 que ses projections orthogonales m_0 , n_0 , p_0 , q_0 sur les droites AB, BC, CD, DA. La recherche

d'un tel point F_0 est équivalente à celle d'un point F de Z , tel que la droite Fm soit perpendiculaire à Z , c'est-à-dire tel que Fm soit perpendiculaire commune aux droites Z et AB . Ces deux droites n'étant pas parallèles, elles admettent une seule perpendiculaire commune, dont le pied sur Z est le point F_0 cherché. Ce point F_0 est le centre du cercle circonscrit au quadrilatère $m_0 n_0 p_0 q_0$; la sphère (F_0) admettant ce cercle comme grand cercle est tangente en ces points m_0, n_0, p_0, q_0 aux quatre droites AB, BC, CD, DA ; elle est, parmi les sphères (F), celle dont le rayon, égal à la plus courte distance des droites Z et AB (ou BC, CD, DA), est minimum.

Il est maintenant facile d'adapter ces résultats au cas des quadrilatères $MNPQ$. Le plan V d'un tel quadrilatère est une position particulière du plan v , correspondant à un point m confondu avec un point M intérieur au segment AB : les quatre points M, N, P, Q sont donc les projections orthogonales sur AB, BC, CD, DA d'un certain point de Z , soit O , qui est le centre d'une sphère S tangente aux quatre côtés du quadrilatère ($ABCD$), les points de contact, qui sont justement les points M, N, P, Q , étant intérieurs aux segments AB, BC, CD, DA . Le quadrilatère gauche ($ABCD$) est donc « circonscriptible », au sens précis défini au début du problème; il existe même une infinité de sphères « inscrites », au sens strict; elles sont obtenues en faisant décrire au point M le segment AB . Le centre O de l'une quelconque de ces sphères est défini comme le point de Z qui se projette orthogonalement en M sur AB ; le lieu géométrique de ces centres est donc le segment de la droite Z compris entre les deux plans perpendiculaires à AB aux deux points A et B .

On peut ajouter que le cercle (ω) circonscrit à un quadrilatère $MNPQ$ appartient à la sphère S tangente en M, N, P, Q aux côtés du quadrilatère ($ABCD$); le centre ω de ce cercle se déduit du centre O de la sphère S en projetant orthogonalement sur la droite Z le point M projection orthogonale de O sur AB . Les points O et ω ne peuvent être confondus que si le point O coïncide avec le point F_0 défini précédemment; cette coïncidence n'est possible que si le pied m_0 sur la droite AB de la perpendiculaire commune à AB et à Z est un point du segment AB , c'est-à-dire si le plan v_0 est parmi les plans V .

D'autres remarques simples complétaient cette étude: M étant un point intérieur au segment AB , il existe un quadrilatère plan $A_1B_1C_1D_1$ dont les côtés successifs $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$ sont tangents au cercle (ω) correspondant au point M , respectivement aux points M, N, P, Q . Les deux droites distinctes AB et A_1B_1 , tangentes en M à la sphère S correspondant au point M , déterminent le plan tangent en M à cette sphère; de même les plans tangents à S aux points N, P, Q , sont déterminés respectivement par les couples de droites BC et B_1C_1, CD et C_1D_1, DA et D_1A_1 . La droite AA_1 est donc la droite d'intersection des plans tangents à S aux points M et Q ; on peut définir de façon analogue les droites BB_1, CC_1, DD_1 , chacune appartenant à deux des quatre plans tangents à S aux points M, N, P, Q . Comme ces points sont situés sur le cercle (ω) de la sphère, les plans tangents en ces points sont tangents au cône, ou au cylindre, circonscrit à la sphère S le long du cercle (ω); ces quatre plans tangents ont en commun le sommet σ du cône circonscrit, sommet situé sur l'axe de révolution Z du cône, ou bien (cas du cylindre) sont parallèles à Z . Les droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sont, en conséquence, concourantes au point σ de Z , ou bien parallèles à Z ; ce cas particulier du parallélisme ne se rencontre que si le cercle (ω) est un grand cercle de la sphère S , c'est-à-dire lorsque S coïncide avec la sphère (F_0), ce qui, nous l'avons vu, n'est pas toujours possible.

Cependant, le raisonnement précédent, qui ne fait intervenir que des propriétés des plans tangents à une sphère en des points situés sur un même cercle de la sphère, est encore valable si l'on remplace le plan V et les points M, N, P, Q par l'un quelconque des plans v et les points m, n, p, q correspondants. On est ainsi conduit à considérer le plan v_0 qui contient à la fois le point F_0 et ses projections orthogonales m_0, n_0, p_0, q_0 sur les côtés de ($ABCD$). Que ce plan soit ou non un plan V , le quadrilatère $a'b'c'd'$, dont les côtés successifs $a'b', b'c', c'd', d'a'$ sont portés par

les tangentes au cercle (ω_0), circonscrit au quadrilatère mon_0po_0 , respectivement aux points m_0, n_0, p_0, q_0 , est tel que les droites Aa', Bb', Cc', Dd' sont parallèles à Z , puisque (ω_0) est un grand cercle de la sphère (F_0). Le quadrilatère $a'b'c'd'$ est donc la projection orthogonale du quadrilatère gauche ($ABCD$) sur le plan v_0 .

Il en résulte que la projection orthogonale du quadrilatère $ABCD$ sur l'un quelconque des plans V est un quadrilatère $A'B'C'D'$ qui se déduit de $a'b'c'd'$ par la translation parallèle à Z qui transforme le plan v_0 en le plan V . Le quadrilatère $A'B'C'D'$ est circonscriptible au cercle (ω') déduit du cercle (ω_0), par la même translation.

Comme application des propriétés ainsi obtenues, il était demandé de représenter la projection orthogonale sur l'un des plans V , par exemple sur V_0 , de la figure formée par le quadrilatère ($ABCD$), par les triangles AN_0P_0 et BP_1Q_1 et par celui des quadrilatères $MNPQ$ dont le plan est équidistant de V_0 et de V_1 , ainsi que par les cercles circonscrits correspondants. Il s'agissait simplement de rassembler sur un schéma clair quelques-uns des résultats précédents, et, en particulier, de mettre en évidence le fait que la projection orthogonale de ($ABCD$) est un quadrilatère dont les côtés sont tangents à un cercle concentrique aux cercles circonscrits aux quadrilatères $MNPQ$, les points de contact étant eux-mêmes les sommets d'un quadrilatère dont les côtés sont respectivement parallèles aux côtés de $MNPQ$. D'ailleurs, ce quadrilatère des points de contact, déduit du quadrilatère mon_0po_0 par une translation parallèle à Z , n'est pas nécessairement convexe, puisque certains des points m_0, n_0, p_0, q_0 peuvent être sur les prolongements des segments AB, BC, CD, DA (le raisonnement fait précédemment pour établir la convexité du quadrilatère $MNPQ$ s'appuie essentiellement sur la position des quatre sommets à l'intérieur des segments AB, BC, \dots ; il peut facilement être prolongé pour montrer que certains quadrilatères $mnpq$ ne sont pas convexes); il en est de même du quadrilatère-projection $A'B'C'D'$.

Il n'était pas question, naturellement, d'aller plus loin dans cette étude, et, par exemple, de rechercher quels étaient les éléments suffisants pour déterminer complètement la projection demandée, ou bien de décrire toutes les formes possibles de la figure.

Si l'on se place maintenant dans l'hypothèse particulière $a = b \leq d$, qui entraîne $d = c$, les résultats précédents subissent quelques modifications de détail, les démonstrations, parfois plus simples, restant valables. Lorsqu'on suppose $b < d$, les quadrilatères ($ABCD$) admettent un seul plan de symétrie, qui est le plan médiateur du segment AC . Les quadrilatères $MNPQ$ sont alors des trapèzes isocèles dont les bases MN et PQ sont parallèles à la diagonale AC ; le triangle AN_0P_0 se réduit ici au segment AC , et le cercle circonscrit à ce triangle est remplacé par le cercle passant par A et C et tangent en ces points aux bissectrices extérieures des angles A et C ; le triangle BP_1Q_1 est isocèle; la droite Z est, bien entendu, dans le plan de symétrie du quadrilatère. La projection orthogonale de ($ABCD$) sur un plan V est un quadrilatère $A'B'C'D'$ circonscriptible admettant comme axe de symétrie la médiatrice du segment $A'C'$. Il est facile, dans ce cas particulier, d'avoir confirmation du fait que la projection orthogonale d'un quadrilatère ($ABCD$) sur un plan V peut n'être pas convexe: il suffit, par exemple, de prendre, dans un plan W , un triangle isocèle $D'A'C'$ ($D'A' = D'C'$) et un point B , intérieur au triangle, situé sur la médiatrice de $A'C'$. — puis de marquer, sur les côtés $A'D'$ et $C'D'$ les points Q_1 et P_1 tels que $A'Q_1 = A'B = C'B = C'P_1$, — enfin de construire les points de rencontre, A et C , les normales en A' et C' au plan W respectivement avec les droites DQ_1 et DP_1 joignant les points Q_1 et P_1 à un point D arbitrairement choisi sur la normale en D' au plan W ; le quadrilatère ($ABCD$) ainsi obtenu est bien du type étudié ($a = b, c = d$), le plan W n'est autre que le plan V_1 (triangle BP_1Q_1) de la théorie générale (les triangles ABQ_1 et CBP_1 sont isocèles comme leurs projections orthogonales $A'BQ_1$ et $C'BP_1$ sur W), et la projection de ($ABCD$) sur ce plan est le quadrilatère non convexe $A'BC'D'$.

Le cas encore plus particulier où $b = d$ (c'est-à-dire $a = b = d = c$) est celui des quadrilatères (A B C D) ayant leurs quatre côtés égaux ; ils admettent deux plans de symétrie rectangulaires, qui sont les plans médiateurs des segments AC et BD, et un axe de symétrie, intersection de ces plans, qui joint les milieux des segments diagonaux et qui se confond avec la droite Z. Les quadrilatères MNPQ sont alors des rectangles et la projection A'B'C'D' est un losange.

Le résumé des principaux résultats obtenus depuis le début était demandé, en conclusion de cette première partie, surtout pour suggérer aux candidats de procéder à une mise au point. L'essentiel était évidemment de faire ressortir que la relation $AB + CD = BC + DA$ caractérise les quadrilatères gauches (A B C D) « circonscriptibles », l'existence de quadrilatères dont les côtés vérifient cette relation étant préalablement établie, — puis d'indiquer que ces quadrilatères admettent une infinité de sphères « inscrites », au sens strict, les centres de ces sphères étant sur une même droite Z, commune aux plans bissecteurs intérieurs des quatre angles A, B, C, D. Les propriétés des points de contact M, N, P, Q, celles des projections de (A B C D) sur un plan perpendiculaire à Z pouvaient ensuite être indiquées. L'étude plus approfondie de certaines de ces propriétés, la recherche de réciproques possibles étaient, bien entendu, hors de propos.

Les réactions des candidats en présence de l'ensemble des questions qui viennent d'être commentées (en cherchant, naturellement, à ne faire intervenir que des notions familières, et des formes de raisonnement accessibles, à des élèves de Première) ont été sensiblement celles que l'on pouvait prévoir. Les premiers résultats, très simples, concernant les triangles AN_0P_0 , BP_1Q_1 sont établis dans la plupart des copies, mais quelques déficiences se produisent déjà lorsqu'il s'agit de prouver que le quadrilatère MNPQ est plan. Environ la moitié donnent des démonstrations à peu près correctes pour les propriétés des cercles circonscrits aux deux triangles et au quadrilatère MNPQ, mais très rares sont les indications valables relatives à la convexité de ce polygone. L'étude de la droite Z et des points F de cette droite exigeait une observation plus attentive, et aussi une certaine continuité dans l'effort de raisonnement ; elle n'est abordée d'une façon suffisante que dans un tiers environ des compositions ; puis la dispersion s'accroît, et les démonstrations exactes des propositions finales, sur les sphères inscrites, sur les quadrilatères-projections de ABCD, se raréfient progressivement, mais leur nombre n'est pourtant pas nul et quelques candidats donnent sur ces points des réponses très acceptables.

En dehors des fautes classiques inévitablement rencontrées tout au long des solutions, il importe de noter une erreur de fond dont la fréquence a paru quelque peu surprenante, à ce niveau, et s'agissant d'élèves choisis parmi les meilleurs, — erreur qui, sous une forme ou sous une autre, rend manifeste l'incompréhension du sens des mots : condition nécessaire, condition suffisante. C'est ainsi que, malgré les précautions prises dans le texte, beaucoup considèrent dès le début la relation $a + c = b + d$ comme définissant une condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit « circonscriptible », alors qu'ils ont simplement démontré qu'elle était nécessairement vérifiée lorsqu'un quadrilatère est « circonscriptible » ; il va sans dire que la construction de la solution des questions suivantes se révèle alors fort laborieuse et se trouve marquée par de fâcheuses contradictions.

Le problème comportait une deuxième partie dont les débuts pouvaient être traités sans le secours des résultats acquis dans la première. Elle avait pour objet l'étude de quelques propriétés des quadrilatères gauches (A B C D) « circonscriptibles », dont deux angles consécutifs, A et B par exemple, sont droits.

Afin de rechercher un mode de construction de tels quadrilatères, il est naturel de partir des données simples : un segment AB, qui sera l'un des côtés, et deux demi-droites AX et BY perpendiculaires à AB, et non parallèles entre elles, qui seront les supports des côtés AD et BC. Si l'on désigne par D et C deux points pris respectivement sur AX et sur BY, la longueur c du segment CD se calcule aisément

en fonction des longueurs $AB = a$, $BC = b$, $AD = d$, et de l'angle θ , compris entre 0 et π , des demi-droites AX et BY ; ce calcul est presque classique, en faisant intervenir la projection orthogonale du segment CD sur un plan perpendiculaire à AB . Il est commode de faire apparaître immédiatement certains éléments géométriques utiles, en menant par exemple par le milieu I de AB les demi-droites Ix et Iy parallèles à AX et BY et de même sens qu'elles ; l'angle \widehat{xIy} a pour valeur θ ; on désignera par It et It' ses bissectrices intérieure et extérieure (It est axe de symétrie pour la figure AB, AX, BY), et par C_0 et D_0 les projections orthogonales de C et D sur le plan xIy .

Ayant ainsi calculé c , la relation (1) $a + c = b + d$ exprime, sous forme nécessaire et suffisante, que le quadrilatère ($ABCD$) est circonscriptible. Un calcul de transformation, ne présentant pas de difficulté malgré la présence d'un radical dans la formule initiale, permet de remplacer la relation (1) par une relation équivalente, indiquée par l'énoncé : $2bd \cos^2 \frac{\theta}{2} = ab + ad$. La condition ainsi écrite rappelle une formule classique dans la théorie des divisions harmoniques, et la présence des facteurs $(b \cos \frac{\theta}{2})$ et $(d \cos \frac{\theta}{2})$ suggère de faire intervenir les projections

orthogonales des segments BC et AD , ou bien IC_0 et ID_0 , sur la bissectrice intérieure It , soient IC' et ID' . En mesurant algébriquement ces projections sur la demi-droite \overrightarrow{It} intérieure à l'angle saillant xIy , on a, quels que soient les points C et D sur BX et AY : $\overline{IC'} = b \cos \frac{\theta}{2}$, $\overline{ID'} = d \cos \frac{\theta}{2}$, et la condition caractérisant les

quadrilatères « circonscriptibles » prend la forme équivalente $\frac{1}{IC'} + \frac{1}{ID'} = \frac{2 \cdot \cos \frac{\theta}{2}}{a}$,

Or, quels que soient les points C et D , la droite C_0D_0 coupe en général les bissectrices It et It' en des points G et G' conjugués harmoniques par rapport à C_0, D_0 ; les projections orthogonales de ces points sur It sont G, I, C' et D' qui forment aussi une division harmonique, c'est-à-dire que $\frac{1}{IC'} + \frac{1}{ID'} = \frac{2}{IG}$; cette relation est encore valable lorsque C_0D_0 est parallèle à It' (le point G' étant rejeté à l'infini), les points C', D' et G étant alors confondus ; elle est donc vérifiée quels que soient C et D .

La condition caractérisant les quadrilatères ($ABCD$) « circonscriptibles » se réduit donc, en définitive, à $IG = \frac{a}{\cos \frac{\theta}{2}}$, ce qui exprime que le point G où la droite

C_0D_0 coupe la bissectrice intérieure It est un point fixe, d'ailleurs facile à construire à partir des données a et θ .

Cette condition est manifestement équivalente à la suivante : la droite CD joignant un point C de BY à un point D de AX rencontre la droite fixe GA parallèle à AB menée par le point G . Cette droite GA peut être définie comme l'intersection des plans perpendiculaires à BY et AX rencontrant respectivement ces demi-droites aux points situés à la distance a des origines B et A .

On voit dès lors un mode de construction simple des quadrilatères étudiés : le sommet C étant arbitrairement choisi sur BY , le quatrième sommet D est le point de rencontre, s'il existe, de la demi-droite AX et du plan (C, GA) ; ou, ce qui revient au même, en faisant intervenir les projections orthogonales C_0 et D_0 de C et D sur Iy et Ix ; le point D_0 est le point de rencontre, s'il existe, de la droite C_0G

et de la demi-droite I_x . La discussion est facile ; il s'agit de déterminer les droites passant par G et coupant à la fois les demi-droites I_x et I_y : les parallèles menées par G à I_x et à I_y coupent respectivement I_y et I_x en des points H_0 et K_0 , tels que

$$IH_0 = IK_0 = \frac{a}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} ; \text{ les demi-droites } H_0y \text{ et } K_0x \text{ définissent les portions de}$$

I_y et de I_x décrites par les points C_0 et D_0 lorsqu'on considère tous les quadrilatères possibles ; les lieux géométriques des sommets C et D sur BY' et AX s'en déduisent immédiatement, par translations parallèles à AB : ce sont des demi-droites HY et KX .

On obtient ainsi une infinité, à un paramètre, de quadrilatères « circonscriptibles » ($ABCD$). On peut remarquer que les longueurs b et d des côtés BC et AD de ces quadrilatères peuvent prendre toutes les valeurs supérieures à la longueur IH_0 ,

$$\text{c'est-à-dire à } \frac{a}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} ; \text{ il en résulte que le plus petit des quatre côtés d'un tel quadri-}$$

latère n'est pas nécessairement a , il peut être b ou d (on a toujours $a < c$ puisque AB est la perpendiculaire commune à AX et BY) ; mais les côtés b et d sont certain-

nement supérieurs à $\frac{a}{2}$.

À chacun de ces quadrilatères ($ABCD$) sont applicables les résultats trouvés dans la première partie. On déduit de là quelques propriétés simples.

La droite Z correspondant à l'un quelconque de ces quadrilatères peut être définie comme l'intersection des plans bissecteurs intérieurs des angles \widehat{BAX} et \widehat{ABY} ; ces plans sont indépendants de la position des points C et D ; la droite Z est donc la même pour tous les quadrilatères.

La famille des sphères (F) ayant pour centres les points F de Z et tangentes aux supports des quatre côtés d'un quadrilatère ($ABCD$) est donc également la même pour tous ces quadrilatères, puisque l'une quelconque de ces sphères est complètement définie par son centre F , son rayon étant la distance de F à la droite AB par exemple. Il en est de même pour la famille des plans v contenant les projections orthogonales m, n, p, q des points F de Z sur les supports des quatre côtés. Bien entendu, les sphères S , inscrites « strictement » et les plans V correspondant aux points de contact M, N, P, Q intérieurs aux quatre côtés dépendent du choix des points C et D .

Il résulte de ces remarques que, si l'on considère une sphère (F_1), définie par son centre F_1 sur Z , toutes les droites CD correspondant aux quadrilatères de la famille sont tangentes à (F_1) ; le point de contact p_1 d'une droite CD avec (F_1), point qui n'est pas nécessairement intérieur au segment CD , se trouve toujours sur le cercle γ_1 , section de (F_1) par le plan, perpendiculaire à Z , contenant les projections orthogonales de F_1 sur les trois droites AB, BY, AX .

Il est intéressant maintenant de préciser la position de la droite Z . Les plans bissecteurs intérieurs de \widehat{BAX} et de \widehat{ABY} ont pour traces sur le plan Ixy les perpendiculaires à I_x et à I_y menées par les points Q'_0 et N'_0 de ces demi-droites situés à la distance $\frac{a}{2}$ de I ; ces traces se coupent en un point Ω de la bissectrice intérieure

It de \widehat{xy} , qui n'est autre que le milieu du segment IG . Ce point Ω appartient à Z ; ses projections orthogonales sur AX et BY sont les points Q' et N' qui se projettent eux-mêmes orthogonalement sur I_x et I_y aux points Q'_0 et N'_0 ; le plan W déterminé par les points I, Q', N' , projections de Ω sur les droites AB, AX, BY , est donc un plan de la famille v , et la droite Z lui est perpendiculaire. D'autre part, ce plan W coupe le plan Ixy suivant la bissectrice It , car le milieu du segment $Q'_0N'_0$, coin-

cidant avec le milieu de $Q'oN'o$ (diagonales d'un parallélogramme), est un point de It , distinct de I . Le plan W passe donc par le point Ω , et la droite $I\Omega$ (ou It) est la perpendiculaire commune à AB et à Z . Le point Ω est ainsi, pour tous les quadrilatères ($ABCD$), le point F_0 défini dans la première partie, et W est le plan v_0 qui lui correspond.

D'ailleurs, il est facile de voir que ce plan W est un plan de la famille particulière V : les points I, Q', N' sont en effet intérieurs aux segments AB, AD, BC , quel que soit le quadrilatère ($ABCD$), puisque les longueurs AI, BI, AQ', BN' , égales à $\frac{a}{2}$ sont toujours inférieures au plus petit des quatre côtés du quadrilatère (que ce soit a, b ou d).

L'angle φ des plans W et Ixy , n'est autre que l'angle aigu de la droite $N'Q'$ avec sa projection $N'oQ'o$ sur Ixy ; il est défini par exemple par la relation

$$\cotg \varphi = \sin \frac{\theta}{2}.$$

La sphère Σ , qui a pour centre Ω , et pour rayon ΩI , c'est-à-dire la sphère ayant pour diamètre le segment IG , est donc, pour tous les quadrilatères ($ABCD$), la sphère (F_0) en même temps qu'une sphère S (d'après les notations de la première partie) ; elle est tangente aux côtés AB, BC, AD aux points I, N', Q' , et, par conséquent, au côté CD en un point P' qui, d'après les remarques précédentes, est intérieur au segment CD . Le lieu des points P' est porté par le cercle Γ , section de Σ , par le plan W .

Comme Γ est un grand cercle de Σ , tout quadrilatère ($ABCD$) a pour projection orthogonale sur le plan W un quadrilatère $A'B'C'D'$ dont les côtés $A'B', B'C', C'D', D'A'$ sont tangents à Γ aux points I, N', P', Q' . La figure obtenue dans le plan W peut être précisée : le grand cercle Γ a pour diamètre IG ; le segment $A'B'$ est tangent à Γ en son milieu I , les segments IA' et IB' , inférieurs à $\frac{a}{2}$ (ils sont égaux à $\frac{a}{2} \sin \varphi$), sont inférieurs à *fortiori* au rayon de Γ , qui est égal à $\frac{a}{2 \cos \frac{\theta}{2}}$; les points

de contact N' et Q' des demi-droites $B'Y'$ et $A'X'$ projections orthogonales sur W de BY et AX , sont donc du même côté que I par rapport à la médiatrice du segment IG ; cette médiatrice coupe $B'Y'$ et $A'X'$ aux points H' et K' , projections orthogonales sur W des points H et K , origines des demi-droites HY et KX qui constituent les lieux géométriques des sommets C et D pour tous les quadrilatères ($ABCD$) ; la projection C' de C sur W décrit donc la demi-droite $H'Y'$ et la projection $C'D'$ de CD est portée par la tangente, autre que $B'Y'$ menée par le point C' au cercle Γ ; lorsque le point C' décrit la demi-droite $H'Y'$, le point de contact P' de $C'D'$ avec Γ décrit l'arc $N'_1GQ'_1$ du cercle Γ symétrique de l'arc $N'IQ'$ par rapport au centre Ω (ou par rapport à la médiatrice de IG). Ainsi est précisé le lieu des points de contact P' des côtés CD avec la sphère Σ . On voit également que les projections $A'B'C'D'$ de tous ces quadrilatères ($ABCD$) sur le plan W sont des quadrilatères convexes.

Ce problème comportait de nombreux prolongements, dans des directions que l'on aperçoit sans peine ; mais, qu'ils soient ou non du niveau de la classe de Première, il est inutile d'en parler ici.

La deuxième partie du problème a été abordée par plus d'un tiers des candidats. Le calcul du côté CD a été en général conduit correctement ; quant à la transformation de la formule $a + c = b + d$, si plusieurs l'ont entreprise et menée à bien au point de vue formel, aboutissant à la relation donnée par l'énoncé, nombre d'entre eux n'ont pas songé à mettre en évidence l'équivalence des conditions successivement écrites. L'interprétation géométrique, un peu plus difficile, a été plus rarement

étudiée ; quelques-uns, pour démontrer que le point de rencontre de C_0D_0 avec la bissectrice It est fixe, ont utilisé une expression de la longueur de la bissectrice intérieure d'un angle d'un triangle en fonction de cet angle et des côtés qui le comprennent ; l'idée était loin d'être mauvaise, mais cette expression ne fait pas partie du bagage rudimentaire qu'il est indispensable d'avoir à sa disposition, et les candidats ont parfaitement le droit de l'ignorer ; d'ailleurs, le procédé suggéré par l'énoncé, faisant intervenir la propriété harmonique des deux bissectrices d'un angle, constitue l'un des moyens les plus simples pour calculer les longueurs des bissectrices d'un triangle en fonction des côtés et des angles.

La fin de la deuxième partie, qui faisait surtout appel aux résultats obtenus dans la première, résultats qu'il s'agissait d'adapter à une figure particulière, n'a donné lieu qu'à un petit nombre de réponses correctes, et d'ailleurs incomplètes, la plupart portant sur la construction des quadrilatères (A B C D).

Cent soixante candidats ont pris part à cette épreuve. Puisqu'il s'agit d'un nombre relativement grand la répartition des notes, traduisant elles-mêmes les réactions parfois notablement différentes des membres du jury, avait quelques chances, sinon quelque raison, d'obéir aux lois statistiques considérées comme classiques ; elle n'y a guère manqué, bien qu'il s'agisse d'élèves « sélectionnés » dans les classes de Première des Etablissements publics de l'Union française.

La première correction des compositions, effectuée avec un barème initial défini *a priori* par le jury, a révélé une trentaine de compositions méritant des notes échelonnées entre 7 et 15 sur 20, la grosse majorité étant un peu au-dessous de 10, avec une « tête » très effilée vers les notes les meilleures. Le reste, environ les quatre cinquièmes, obtenait des notes inférieures à 7, avec une condensation très accentuée autour de 5 et 4 ; les copies faibles et très faibles sont relativement rares. Evidemment, la majeure partie des candidats a traité surtout les débuts de la première partie, et assez souvent ceux de la deuxième.

Si l'on essaye de dégager un enseignement de cette expérience, en ce qui concerne la moyenne de nos élèves, il convient sans doute de s'attacher aux constatations les plus fréquentes ; elles ont été mentionnées déjà en commentant la solution du problème. Il semble utile de souligner tout particulièrement :

— en premier lieu, la difficulté que la plupart, même parmi les meilleurs, ont éprouvée pour répondre correctement à la petite question, qui relevait plus du sens commun que des mathématiques, concernant le classement relatif de quatre nombres positifs tels que la somme de deux d'entre eux soit égale à la somme des deux autres (peut-être faut-il chercher une raison de cette défaillance dans le fait qu'il s'agit ici, non d'appliquer quelque « théorème » connu, mais de réfléchir directement sur des données, d'ailleurs bien simples ?) ;

— en second lieu, l'incompréhension, relevée à maintes reprises, et particulièrement accusée à l'occasion d'un problème dont l'énoncé s'efforçait de marquer les étapes afin de ne pas créer de confusions, des mots « condition nécessaire », « condition suffisante » (convient-il d'en rendre partiellement responsable une tendance fréquente à la concision, qui conduit, par exemple, à condenser en une phrase unique une proposition et sa réciproque ? Le gain, apparemment réalisé ainsi, n'est-il pas un peu illusoire ? L'apprentissage des jeunes dans le domaine de la logique élémentaire est souvent malaisé, et certaines formes d'expression, trop ramassées, trop riches en substance, parfois assez conventionnelles, risquent de ne pas être clairement comprises des débutants ; les pertinentes remarques, faites sur ce sujet par M. FOURCHÉ, professeur au Lycée Janson-de-Sailly, à la fin du livre qu'il a publié récemment sur la pédagogie des mathématiques, peuvent trouver ici une illustration. Cependant, les termes : « condition nécessaire », « condition suffisante », « il faut », « il suffit », « propriété caractéristique », sont abondamment utilisés et commentés dès l'initiation, et leur emploi ne devrait plus, après quatre ou cinq années, donner lieu à contre-sens ou à non-sens).

Vingt-neuf compositions ont été retenues pour une seconde lecture ; parmi leurs auteurs on trouve dix-sept élèves de Première C, onze de Première Moderne (dont deux jeunes filles), et un de Première A. Le classement final n'a pas présenté de difficultés ; deux copies, d'ailleurs assez différentes, se détachaient nettement des autres et ont mérité le premier et le second prix ; aux sept suivantes, très honorables, et présentant des qualités diverses, ont été attribués des accessits. Le groupe des neuf lauréats comprend à égalité des élèves de C et de Moderne, le candidat de Première A obtenant un second accessit.

Pour situer approximativement, par des notes, la valeur relative des vingt-neuf travaux d'abord sélectionnés, mais non tous retenus pour une récompense, on peut dire que, les deux premières étant fixées à 15 et 14, les sept suivantes, correspondant aux accessits, s'échelonnent régulièrement de 12 à 10, et que les vingt autres se situent entre 10 et 7.

Dans l'ensemble, sous les réserves déjà indiquées, l'impression est loin d'être mauvaise. Sans doute, en ce qui concerne la forme, les fautes classiques d'orthographe, qu'il est encore permis de relever aujourd'hui, les abréviations osées, les signes plus ou moins bizarres, les rédactions confuses ne sont pas rares, mais plusieurs copies ont révélé des qualités, fort appréciables à ce niveau d'une formation scientifique encore bien neuve, de netteté, d'ordre, de méthode. Et il ne faut pas oublier que, dans cette épreuve, les jeunes candidats se trouvent, pour la première fois, en présence d'un ouvrage de longue haleine, exigeant une continuité de pensée, un effort d'observation et de réflexion, qui ne peuvent guère leur être familiers ; s'ajoutent à cela les difficultés très sérieuses que rencontrent la plupart des débutants en présence d'une figure de géométrie dans l'espace dont ils ont quelque peine, bien souvent, à donner une représentation graphique correcte et suggestive. Si des résultats, somme toute, fort convenables sont ainsi obtenus par un groupe non négligeable de jeunes, il convient d'en attribuer, pour une part importante, le mérite à la qualité de l'enseignement qu'ils ont reçu et à la valeur des maîtres qui les ont formés.

Notons, en terminant, que, sur les neuf élèves de Première qui ont obtenu une nomination en mathématiques au Concours général de 1951 (un accessit attribué, en cours d'année, à un candidat de la France d'Outre-Mer, dont la copie était arrivée tardivement à Paris, avait porté à neuf le nombre des récompenses décernées l'an dernier), cinq se trouvent en 1952 parmi les lauréats les mieux placés des classes de Mathématiques, deux d'entre eux figurant même à la fois sur les palmarès de physique et de mathématiques.

J. DESFORGE,

Inspecteur général de l'Instruction publique.

II. Réunion du Comité

Séance du 30 octobre 1952

Présents : Mlles AFFRE, BARBIER, MASSON ; MM. CAGNAC, CHAZAL, CROZES, DURFANDE, GIRARD, GUITTON, HUISMAN, JACQUEMART, LEGRAND, MINOIS, MONJAL-LON, ROSTOLLAND.

Excusés : MM. BAY, BENOIST, BIGUENET, CARALP, SINGIER, MARVILLET.

Baccalauréat. — Le Président fait le compte rendu des incidents qui ont eu lieu à Alger, à propos des textes de Mathématiques, et fait part d'une lettre reçue concernant celui de New-York, très critiquable. Il est décidé qu'une intervention auprès de M. l'Inspecteur Chattelun permettra de faire connaître le point de vue de l'Association au sujet de l'organisation des Baccalauréats Outre-Mer.

A Besançon de nouvelles erreurs ont été commises, mais sans gravité.

Dans l'ensemble, les fautes se sont plutôt raréfiées cette année.

Concours d'entrée en Sixième. — Les textes ont été plus convenables cette année. Une Commission, pour le choix des sujets, a été en effet créée conformément aux vœux de l'A.P.M., elle a pu fonctionner dès 1952.

Programme de Mathématiques dans le Premier Cycle. — La question avait été mise à l'étude à la dernière Assemblée générale. La création d'une Commission, sous la présidence de Mlles DIONOT et MASSON est décidée. Il est fait appel à toutes les bonnes volontés pour y participer.

M. JACQUEMART, rappelle qu'il y a 36 heures à répartir entre les divers enseignements, pour les travaux dirigés, étude du milieu, etc..., dans la nouvelle organisation des « Classes pilotes ». Il souhaite donc une unité d'action de tous les professeurs de Mathématiques pour que cette discipline ait la part qui lui revient. Il est décidé qu'une note en ce sens paraîtra au *Bulletin*.

Nouvelles sections au Baccalauréat. — Une faute d'impression dans un article au *B.O.* ayant fait croire que dans la section A' la quatrième épreuve au Baccalauréat (1^{re} partie) porterait nécessairement sur une langue vivante, M. MONJALLON est intervenu au Ministère pour faire les rectifications nécessaires et obtenir l'assurance que l'épreuve de Mathématiques était bien maintenue (avec coefficient 3).

M. JACQUEMART estime qu'il faudra aussi veiller à maintenir l'option Mathématiques en section B, malgré l'existence de la section A'.

Axiomatique et Redécouverte : M. CROZES continue à animer cette branche de l'activité de l'A.P.M. Il annonce la conférence de M. ITARD pour le mois de novembre sur l'historique des axiomes de grandeur.

Elections au Comité

L'Assemblée générale de Pâques 1953 sera appelée à élire de nouveaux membres en remplacement des membres sortants, non immédiatement rééligibles.

Le Président fait appel à tous les collègues qui accepteraient de mettre leur dévouement et leur activité au service de l'Association, et *les prie de se faire connaître d'urgence* afin que leurs noms puissent figurer sur la liste des candidats aux prochaines élections.

DEUXIÈME PARTIE

Initiation à la pensée mathématique

Réunion du 15 mai 1952

En présence de M. l'Inspecteur général ROBERT, et sous la présidence de M. MONJALLON, les groupes de travail de Mlle DIONOT et la Commission « Axiomatique et Redécouverte » ont tenu au Lycée Henri-IV une réunion d'information réciproque. Mlle FÉLIX et M. FOUCHÉ en ont été les animateurs.

Les Groupes au travail

Témoignage de Mlle L. FÉLIX (Professeur au Lycée La Fontaine, Paris)

Le titre choisi par M. CROZES pour la séance d'aujourd'hui utilise le terme de « pensée mathématique ». Un débat toujours ouvert est de savoir jusqu'à quel point l'initiation à cette pensée est vraiment un des buts de l'Enseignement du Second

Degré. Actuellement, la question paraît être doublement d'actualité : d'une part, à cause de l'afflux des enfants et des conditions sociales qui les attendent à la sortie des établissements scolaires ; d'autre part, par suite de la révolution qui a bouleversé la pensée scientifique ces dernières décades. Le professeur du Second Degré doit nécessairement se poser les questions :

Qu'est la pensée mathématique moderne ?

Que devons-nous enseigner ? Qu'est-ce qui est utile ? vivant ?

Je voudrais seulement ici faire brièvement un rapport sur les recherches pédagogiques dont j'ai été témoin.

I. — *Groupe « axiomatique et redécouverte »* : Grâce au Bureau de l'A.P.M. et à l'action personnelle de M. CROZES, nous avons pu déjà méditer sur les conférences d'éminents mathématiciens et de professeurs de Faculté ou des hautes classes des Lycées. Des articles de revues pédagogiques nous ont aussi beaucoup appris : MM. BOULIGAND, CHATELET, CHOQUET, LICHNÉROWICZ ; MM. GLAESER et LACOMBE ; MM. MIRABEL et SIROS, nous ont exposé, les uns des introductions axiomatiques du nombre et de ses extensions, les autres différentes bases axiomatiques de la géométrie (1).

La géométrie a perdu son unité ; on ne peut plus concevoir que « des géométries » avec primauté de la géométrie linéaire. Et même, la géométrie existe-t-elle encore ? Théorie des ensembles, algèbre, topologie, calcul des probabilités... Voilà ce qui constitue les Mathématiques.

Certains mathématiciens, reniant ce qui, dans les études de leur jeunesse a peut-être contribué plus qu'ils ne croient à leur propre formation, sont prêts à rejeter de l'enseignement certains chapitres qui nous tiennent à cœur ; ainsi, M. DIEUDONNÉ, une des têtes éminentes du polycéphale Bourbaki, supprimerait volontiers du programme de Mathématiques Élémentaires, coniques, inversions, géométrie projective même, au profit de la géométrie vectorielle et de la géométrie analytique, affinée naturellement. On peut discuter sur le choix des chapitres à sacrifier, mais tout aménagement nécessite des allègements compensateurs. L'essentiel est de conduire les élèves par des voies qui ne soient, ni fausses, ni fermées.

L'évolution des programmes vers les parties jeunes et vivantes des Mathématiques, amorcée comme c'est naturel dans l'Enseignement Supérieur, et qui bouleversera bientôt les traditionnels certificats de calcul différentiel et intégral et de mécanique rationnelle (2), devra descendre de proche en proche dans l'Enseignement Secondaire. La possibilité en est prouvée par les essais que des collègues précurseurs font avec succès dans leurs classes : axiomatisation partielle en Mathématiques Élémentaires et même en Seconde (M. CROZES), organisation du cours d'après la structure (M. ESTÈVE). Mais il nous faudrait, dans cette nouvelle perspective, repenser tout notre enseignement, depuis les petites classes, car il faut tenir compte de la nécessité d'une certaine continuité, et se souvenir du grand nombre de nos élèves qui ne suivent pas la section scientifique, ou qui suivent celle-ci sans se destiner aux études purement mathématiques.

II. — *Groupe de travail de Sèvres* : Autour de Mlle DIONOT, des amies, dont beaucoup sont ses anciennes élèves ou stagiaires, se réunissaient depuis de longues années pour confronter leurs expériences pédagogiques et étudier en commun les difficultés de l'enseignement des Mathématiques. Le groupe s'est beaucoup élargi ces dernières années, en partie sous l'influence des recherches des classes nouvelles.

Ce sont surtout les classes de la Sixième à la Troisième qui sont envisagées, car c'est là que les réactions des élèves sont les plus perceptibles et que les problèmes

(1) Ajoutons, en novembre 1952, la belle conférence de M. ITARD, sur l'histoire des axiomes de grandeur.

(2) Ce dernier déjà rebaptisé en « Mécanique générale ».

pédagogiques se posent inévitablement. En outre, ces classes ne sont-elles pas essentielles pour la formation de la pensée de l'enfant et son orientation ?

Des petits groupes de travail ont été constitués, qui préparent le travail en commun. C'est ainsi que M. HUISMAN, avec quelques collègues, a composé des exercices de géométrie et d'algèbre pour préciser autant que possible les circonstances où se produisent les erreurs les plus courantes. De même, un autre groupe a rassemblé des exercices illustrant le cours de Cinquième. Et si je me trouve ici chargée de ce compte rendu, c'est pour avoir signé avec M. FOUCHÉ un questionnaire au sujet du premier enseignement de la géométrie : les réponses déjà reçues ont permis un rapport au moins provisoire qui montre bien les divergences d'attitude des divers collègues.

Il est fort difficile de traduire l'ensemble de la vie de ce groupe par des comptes rendus. La fidélité des habitués n'est pas due uniquement à leur respectueuse et reconnaissante amitié pour Mlle DIONOR ; elle témoigne du sentiment d'enrichissement que chacun ressent dans les discussions en commun.

Mais je me permets de suggérer qu'à mon avis, ce groupe, qui étudie les enfants devant notre enseignement, devrait amorcer un mouvement à la rencontre du groupe qui vient d'en haut, de la science mathématique, pour descendre vers l'élève. Si l'on se borne à voir les difficultés d'enseigner ce que nous avons l'habitude d'enseigner, à la manière habituelle, comme si c'était l'intangible vérité mathématique, les recherches risquent, je crois, de ne pas être vraiment fécondes. La connaissance réelle de l'enfant, qui fait la richesse de ce groupe, lui permettra d'étudier l'ensemble de la question suivant le degré de maturité des élèves, sans sacrifier ceux qui ne seront jamais mathématiciens, mais sans méconnaître la montée vers la pensée mathématique.

III. — D'autres groupes travaillent parallèlement : je souhaite que des rapports envoyés au Bureau de l'A.P.M. et accueillis dans le *Bulletin*, nous mettent au courant des questions posées et des conclusions obtenues.

La *Commission des psychologues scolaires pour les Mathématiques* utilise la technique des tests.

Voici, à ce sujet, les informations qui nous sont apportées par M. VIOLETTE, qui dirige un petit groupe d'étude sur la logique des élèves :

« La Sous-Commission des Mathématiques (Psychologues et Professeurs) pour les classes de Cinquième et Quatrième a choisi comme thème de travail l'étude des possibilités logiques de l'élève de Cinquième sur le plan de l'apprentissage de la géométrie. Après avoir essayé de déterminer les possibilités de raisonnement des élèves en leur soumettant des syllogismes à terminer et à justifier, il a été décidé de se placer à un point de vue plus analytique.

La réussite semble conditionnée par deux facteurs :

- la compréhension de la nécessité du raisonnement ;
- la mise en place de celui-ci. C'est à ce problème que nous nous sommes attaqués. Pour faire une démonstration l'élève doit, partant d'un énoncé, faire une figure et dégager l'hypothèse.

Nous avons commencé l'étude, de façon très modeste, en soumettant à une quinzaine de classes dix énoncés (huit de problèmes et deux de théorèmes), les élèves devant faire la figure et écrire l'hypothèse sous forme d'égalités. Exemples et exercices amènent la compréhension de la consigne qui, à l'usage, s'est révélée satisfaisante. C'est en somme un exercice de thème : passage de l'expression verbale à l'expression géométrique. Les fautes ont été analysées et classées : omissions, additions, confusions entre hypothèses et conclusions, non-sens, fautes d'énoncé .. Enfin un exercice de version (retour à un énoncé) a été essayé dans deux classes.

Nous espérons isoler ainsi les problèmes qu'il conviendra d'étudier par la suite du double point de vue de la psychologie et de la pédagogie. Il nous semble cependant

possible d'affirmer dès maintenant la grande importance des problèmes de vocabulaire et de syntaxe. »

IV. — Une « *Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des Mathématiques* » a été fondée à Pâques (1952) au quatrième Congrès réuni par M. GATTEGNO (professeur à l'Institut de pédagogie de l'Université de Londres) qui en est secrétaire général. M. CHOQUET en a accepté la présidence, assisté de M. GONSETH, M. PIAGET, M. FIALA (Université de Neuchâtel) et M. SERVAIS (professeur à Morlanwelz, Belgique).

Les deux premiers Congrès avaient rassemblé presque exclusivement des professeurs du Second Degré, mais les deux derniers ont permis de confronter, professeurs (des jardins d'enfants aux Facultés), des psychologues, des logiciens. Cette année, l'étude portait sur les relations entre structures mathématiques et structures mentales. La participation active, par des exposés et des interventions dans la discussion, des savants mathématiciens que sont MM. DIEUDONNÉ, CHOQUET, LICHNÉROWICZ, des philosophes comme MM. GONSETH et PIAGET, assurait le grand intérêt de la rencontre. L'art de M. GATTEGNO, pour amener chacun à « confesser » ses opinions, est vraiment extraordinaire. Ne nous a-t-il pas fallu, comme nos collègues suisses, belges, anglais, passer un véritable oral d'agrégation avec, comme terrible président de jury, M. GONSETH !

Un rapport détaillé doit être rédigé par M. SERVAIS. Je crois pouvoir résumer les conclusions sous la forme suivante :

Les Mathématiques sont l'étude des structures. Les structures élémentaires sont les structures d'équivalence, les structures d'ordres, les structures opératoires, les structures topologiques. Les mathématiciens ne peuvent actuellement concevoir d'autres structures que des combinaisons de celles-ci. La recherche mathématique consiste à étudier les structures « en cultures pures », à les découvrir dans les questions étudiées et, s'il le faut, à transformer les problèmes qui se posent pour y mettre les structures qui en permettront l'étude.

C'est par la comparaison de raisonnements utilisés dans les différentes théories des Mathématiques traditionnelles que l'on a pris conscience de ces structures. On peut poser la question, avec M. GONSETH, de savoir en quoi les méthodes des Grecs ou celles des siècles qui nous précèdent ne sont plus valables. Mais, puisque les structures étaient présentes implicitement, c'est sans doute que ce sont des structures mentales. En effet, M. PIAGET a pu étudier leur apparition dans la pensée du jeune enfant. Le principal objet de notre enseignement serait alors de développer et assouplir ces structures mentales pour les rendre efficaces. Il faudrait donc les étudier et chercher leur parallélisme avec les structures mathématiques.

Mais M. GONSETH considère que ceci n'est qu'un courant de la pensée du mathématicien ; marche vers l'abstrait et la formalisation. Le courant complémentaire est dirigé vers l'adéquation à la réalité physique.

— Que conclure ? La vraie nature de la pensée mathématique nous est cachée par les habitudes qui nous viennent de la tradition, de nos souvenirs d'élèves, de notre expérience d'années d'enseignement et de la lecture des manuels. Il est alors difficile d'apercevoir tout ce qui est sous-entendu par nous : c'est ce dont l'étude des structures mathématiques nous aiderait à prendre conscience, et ceci éclaircirait la cause des répugnances de nos élèves, qui n'ont pas nos habitudes, à accepter parfois la règle du jeu qui heurte leur structure mentale.

Le projet de la Commission internationale est de mettre à l'étude à tous les degrés de l'enseignement, les structures mentales présentes et leur écart avec les structures mathématiques exigées, et, plus généralement, de confronter la pensée mathématique et les exigences psychologiques et sociales.

V. — Après ce résumé trop sommaire de ces activités qui risquent de rester divergentes, je crois qu'il est opportun de souhaiter que, chaque année, quelques

questions assez précises soient posées et étudiées séparément suivant les compétences de chacun. Si quelques rapports et propositions paraissaient ensuite dans le *Bulletin*, on pourrait envisager des discussions utiles et éventuellement un vote de l'Association.

M. KAY PIENE, mathématicien et directeur de l'Institut de pédagogie d'Oslo, résume ainsi son impression après un voyage d'étude en France : « Pour les professeurs norvégiens, les lycées et collèges français sont toujours et avant tout des écoles pour l'élite. Nous savons que les sujets donnés aux examens sont difficiles et que le nombre des candidats refusés est incroyable. Ce qui frappe en France c'est le contraste entre un corps enseignant très évolué et un système scolaire conservateur. J'ai l'impression que les programmes sont déterminés dans une trop large mesure par une tradition académique. »

A vrai dire, dans l'ensemble, les programmes ne nous gênent pas trop. Ils nous laissent une liberté dont la preuve est la grande diversité de nos enseignements.

Il ne faut pas non plus croire à un abîme entre les partisans des exposés axiomatiques et les professeurs des petites classes : telle étude en Sixième ou Cinquième des grandeurs ou des fractions est bien près d'une simple réalisation concrète de l'exposé axiomatique proposé pour les hautes classes, suivant le même ordre dans l'introduction des propriétés.

Une question spéciale à la France, et relative aux programmes, me paraît assez facile à résoudre : récupérer la classe de Première de façon à pouvoir repenser le programme des deux classes de Seconde et de Première. Il faudrait pour cela ne plus laisser aux hasards de la vie le soin de former la conception de l'espace chez nos enfants entre le jardin d'enfants et cette classe de Première. Heureux si les garçons ont joué au meccano et si les filles ont fait du modelage!! En profitant du goût de l'enfant pour les constructions et les mécanismes, on pourrait, en Sixième et Cinquième, faire une étude des formes géométriques avec le vocabulaire descriptif associé ; ceci permettrait de gagner les quelques heures nécessaires en Quatrième pour faire les droites et plans parallèles et perpendiculaires et, en Troisième, le théorème de Thalès dans l'espace et le calcul de la diagonale du parallépipède rectangle.

Cette question est, du reste, liée à la continuité de l'enseignement mathématique, en arithmétique et théorie des nombres, en astronomie comme en géométrie. Il me paraît peu raisonnable de faire brusquement apparaître, en Mathématiques Élémentaires, ces sujets d'étude après les avoir si longtemps abandonnés.

Pour finir, qu'il me soit permis de rappeler un moyen bien simple de former une documentation sur la structure mentale de nos élèves : ne pourrions-nous pas noter, à l'occasion, les exclamations et remarques spontanées des enfants, ces réactions révélatrices qui font si souvent l'objet des conversations en salles des professeurs ? Nous aurions là des matériaux peut-être plus directement utilisables que les tests, et plus variés, et vivants. Les questions à mettre à l'étude s'imposeraient peut-être après lecture de ces documents !

Lucienne FÉLIX,

Professeuse agrégée au Lycée La Fontaine, Paris.

Bien vouloir envoyer ces fiches (Phrase de l'élève et circonstances), ainsi que toutes suggestions sur les questions à mettre à l'étude, à M. CROZES (Lycée Henri-IV), ou Mlle DRONOT (Sèvres).

Les difficultés non logiques de l'enseignement des Mathématiques

Témoignage de M. FOUCHÉ, Professeur au Lycée Janson-de-Sailly

Le professeur débutant est souvent surpris par la naïveté des fautes commises par ses élèves. Son ardeur à convaincre se transforme alors en irritation devant l'obstacle stupide, irritation qui se manifeste en vitupérations véhémentes ou par les

signes d'un mépris qu'il voudrait écrasant. Les années passent, l'expérience pédagogique vient, qui souvent se résume à une patience inlassable ou à une résignation découragée.

Cependant, ceux qui ne sont pas résignés, ont tenté de trouver les moyens d'accroître leur efficacité pédagogique par un examen de conscience sévère et ont acquis des résultats remarquables. Malheureusement, tous ces résultats ne sont pas facilement transmissibles aux débutants qui viennent d'un milieu où la logique et la technique mathématique sont d'un niveau très élevé, qui ont oublié totalement leur propre expérience d'élève et ne sont plus guère sensibles qu'à des arguments de logique essentiellement cohérente. Ils jugent d'après eux-mêmes, d'après ce qu'ils sont devenus et rejettent, comme illogique, voire stupide, tout fait qui ne se raccorde pas à leur réseau d'habitudes mentales.

Ils admettent bien quelques faits non logiques, par exemple, la peur des Mathématiques ou l'influence du climat familial, mais ils repoussent l'illogisme de ces sentiments derrière cette merveilleuse trouvaille du « don des maths » qui les rassure à bon compte, en même temps, et parce qu'elle les grandit à leurs propres yeux.

Nous avons tenté, dans un petit livre (1), de transmettre à nos jeunes collègues le témoignage de notre expérience personnelle, sans chercher à séparer les difficultés logiques et celles qui ne le sont pas. Ce témoignage, pour lequel nous revendiquons comme seuls mérites la sincérité et la franchise parfois un peu lourde ou brutale, ne pouvait être qu'une ébauche, en raison de l'audace prétentieuse qu'impliquait une telle entreprise, mais l'accueil de la critique a été si bienveillant que nous sommes assurés maintenant que les réflexions que nous avons présentées ont eu une résonance profonde chez ceux qui enseignent, et nous pensons qu'il faut aller plus loin, en étudiant plus franchement les difficultés non logiques de l'enseignement des Mathématiques.

Nous serons très heureux, à ce sujet, de recevoir les suggestions des collègues qu'intéressent ces études d'ordre psychologique, et pour bien montrer le chemin dans lequel nous voulons nous engager, voici quelques aspects des recherches que nous poursuivons actuellement, soit seul, soit avec le groupe d'études que dirige Mlle Dronot à Sèvres.

1° *La logique naïve des enfants.*

Nous pensons que cette logique embryonnaire est l'interpolation ou l'extrapolation, rectiligne, de souvenirs plus ou moins tronqués et déformés d'expériences vécues. Elle est donc essentiellement euclidienne, au sens large du mot. Les enfants se croient sincèrement logiques, mais en fait, ils procèdent par extension, par sympathie pour le simple, le facile, le symétrique, par une esthétique subjective et parfois sentimentale, ils mettent de la proportionnalité partout et ont un sens très aigu des compensations, bien que ce sentiment égalitaire et distributif soit, en général, faussé par une perspective individuelle dont ils ne peuvent pas se rendre compte. Cette logique naïve n'est pas nécessairement inexacte (n'est-elle pas celle dont doivent se contenter bien des adultes ?), mais peut conduire à des erreurs grossières, comme celle qui consiste à penser que pour multiplier un produit par un nombre, il faut multiplier chacun des facteurs du produit par le nombre.

Si, maintenant, on tient compte de ce que l'imagination des enfants est facilement divagante, en ce qu'elle change de direction à chaque impulsion venue de l'extérieur, il est difficile de ne pas penser à une sorte de mouvement « brownien » de ces esprits puérils, qui suivent ainsi une ligne brisée très éloignée de la ligne que le professeur voudrait leur faire suivre. Mais cette comparaison et la conclusion « euclidienne » qui s'en dégage, n'est-elle pas un exemple de logique naïve incorrecte, puisqu'elle tendrait à nier le rôle de l'imagination créatrice ? Mais (encore un « mais »), celle-ci, nous entendons l'imagination qui prétendrait créer à partir de rien, existe-t-elle vraiment ?

(1) *Pédagogie des Mathématiques*, P.U.F.

2° *Peur et habitude.*

La peur, spécialement la peur de l'échec, si néfaste en Mathématiques, est surtout une tension mentale qui résulte de la nécessité d'agir en dehors de ses habitudes. La peur disparaît souvent quand, le phénomène exceptionnel se reproduisant plusieurs fois, une habitude peut s'instaurer. Or, on peut démontrer, en mécanique, qu'une impulsion peut avoir un même résultat extérieur pour des contraintes et fatigues intérieures différentes suivant le profil de l'impulsion, et que le profil pour lequel la fatigue intérieure est minimum est celui où le maximum de la tension est le plus faible possible.

Ainsi une constatation bien connue des cyclistes, est qu'une côte est moins fatigante la nuit que le jour. Ce fait n'est pas seulement une apparence, il est bien réel : le profil de l'impulsion fournie par les muscles à la pédale a un maximum moins élevé la nuit que le jour, car il n'y a pas cette crispation nerveuse que ressent normalement le cycliste à la vue de toute la côte à monter, et qui fait que le début de chaque coup de pédale est plus tendu qu'il n'est nécessaire. La dépense énergétique, mesurée à l'extérieur, est la même, mais au point de vue physiologique, la différence est sensible. Cela tient, pour citer un exemple mécanique simple duquel on pourra « extrapoler », à ce qu'un système élastique comprimé progressivement de 0 à 2 kg. emmagasine une énergie de contraction quatre fois plus forte que s'il était tendu progressivement de 0 à 1 kg. Les énergies de déformation sont proportionnelles aux carrés des tensions finales ; or, les pertes intérieures aux systèmes élastiques sont, en gros, proportionnelles aux énergies.

L'adaptation à des circonstances nouvelles et imprévisibles est donc la recherche, naturelle, organique, du moindre effort, c'est-à-dire d'une tension mentale de réponse dont le profil a le maximum le moins élevé possible. De là viennent les rythmes fonctionnels organiques, physio- ou psychologiques, marche, respiration, cœur, parole..., dont la qualité tient au profil d'impulsion.

Toutes les considérations qui précèdent ne prétendent pas résoudre le problème de la prise d'habitude et de leur contrôle ; par exemple, l'opposition entre la technique opératoire développée en habitude et la logique consciente qui l'a créée et la contrôle. Pas davantage, de l'interaction des habitudes de deux personnes ; par exemple, l'attention d'un élève envers son professeur, étude qui reposerait surtout sur les résonances entre les rythmes de l'un et ceux de l'autre. Pas davantage, aussi, de la valeur éducative de l'exemple, du mimétisme psychologique, pour ou contre mais jamais indifférent, du climat familial, social. Cependant, nous avons voulu indiquer que toutes ces questions ont un substratum mécaniste qu'il est intéressant d'étudier, ne serait-ce que pour mieux dégager un résidu d'ordre plus élevé. D'ailleurs, avant d'aborder ces questions très complexes, il faut étudier le phénomène inverse de la prise d'habitude, c'est-à-dire le rôle des habitudes déjà prises sur la valeur de nos perceptions des faits extérieurs, c'est-à-dire encore de l'interaction du caractère et de ce qu'on appelle l'intelligence.

4° *Réflexions et réfractions des faits extérieurs à travers le réseau de nos habitudes.*

Nous percevons certains éléments ou aspects de l'extérieur et négligeons les autres par paresse, fatigue, hâte, inadaptation... à travers le réseau de nos habitudes actuelles et c'est sur cette sélection d'éléments que nous construisons ce qui est l'image de la vérité pour notre esprit. Notre mode de pensée est donc caractérisé par ce filtrage, par cette altération de l'extérieur et par notre aptitude à composer les éléments déformés qui parviennent à notre conscience. Par exemple, une ligne droite, tracée sur une feuille placée sur une table horizontale, est cependant annoncée verticale au cerveau si elle se trouve dans le plan médiateur des deux yeux.

L'image de la vérité est donc incomplète, inexacte, aussi trouble que l'aspect d'un objet vu à travers un système optique mal adapté, les actions extérieures sont partiellement réfléchies et perdues et partiellement réfractées en nous et c'est cette partie réfractée qui constitue la perception.

A cette composition des éléments déformés de l'extérieur, se mêlent des souvenirs, des habitudes mentales et d'action, tout ce qui forme notre tempérament, notre personnalité, notre caractère. Les perceptions, et ce qu'en fait notre conscience, sont donc subjectives à un degré invraisemblable, inacceptable pour les enfants et pour bien des adultes qui ne peuvent le comprendre sans une très longue éducation morale, scientifique et peut-être même artistique. Et, pour nous qui le savons, mais qui n'y pensons pas souvent, ne devons-nous pas avouer que nous ne savons pas nous écouter les uns les autres, que nous ne savons pas vraiment lire, que nous ne prenons, dans une conversation, dans un roman, que ce qui se rapporte à nous ? Faut-il voir dans cette subjectivité organique, la cause profonde de l'instinct de propriété ou d'appropriation dont l'influence, comme nous allons le voir, est prépondérante dans notre façon de penser, de chercher, de conclure ?

5° *Démarches intellectuelles, directe et « à reculons ».*

Les philosophes désignent ces démarches intellectuelles par les expressions : progression synthétique et régression analytique. Nous sommes confus de l'avouer, mais nous ne comprenons pas le sens de ces mots. Nous préférons nos expressions prises dans le langage ordinaire et refusons, pour l'instant, d'employer particulièrement le mot « synthétique », qui a, en chimie par exemple, un sens très clair qui ne convient pas pour la découverte directe qui est certainement analytique.

Nous avons écrit, dans le livre déjà cité, que pour résoudre un problème dont le résultat est indiqué, il fallait procéder à deux genres de recherche. Le premier consiste à oublier ce qui est à démontrer et à partir à la découverte en tirant les conséquences immédiates des données, et en se disant : « Puisque (ou si) ceci est vrai, cela est nécessairement vrai » : chacune des propriétés trouvées est alors contenue dans la précédente. Le deuxième consiste, au contraire, à tirer ce qu'on pourrait appeler des « préséquences » du résultat à démontrer, en se disant : « Pour que cela soit vrai, il suffirait que ceci le soit » ; chacune des propriétés trouvées contenant celle qu'il faudrait prouver. Nous avons appelé le premier genre de recherche : la découverte directe, et le deuxième : la recherche « à reculons ».

Il est bien connu que la découverte directe est très pénible, rebutante, antipathique aux élèves et à bien d'autres personnes ; la recherche à reculons est beaucoup plus sympathique parce qu'on est plus près du but à atteindre. Nous n'imposons pas aux élèves la découverte directe de façon systématique, nous les laissons libres, mais nous leur demandons de reconnaître franchement le genre de démarche intellectuelle qu'ils suivent à chaque instant. En effet, ils passent trop facilement de l'un à l'autre et il est très prudent de leur faire préciser qu'en travaillant à reculons ils devraient parler au conditionnel, sinon ils perdent le sens de l'orientation et prennent pour-démontré ce qui n'est que souhaité.

Dans le cas de problèmes où le but n'est pas indiqué, qui sembleraient imposer la découverte directe, il se passe un phénomène, également bien connu, qui semble cependant n'avoir pas encore été bien franchement étudié ; l'imagination, souvent divagante, fournit des solutions possibles, vraisemblables, sympathiques à un titre quelconque, purement accidentelles parfois, que l'on cherche à justifier à reculons, par une suite de conditions suffisantes. Dans ce cas, l'élève perd le sens de l'orientation beaucoup plus facilement, car l'instinct de propriété est plus exigeant, du fait que c'est le chercheur qui a trouvé la solution possible qu'il veut justifier. Il faut reconnaître qu'il est bien désagréable de constater qu'on s'est trompé et d'avoir à reprendre un travail qu'on croyait presque acquis. C'est pour cela que nous voyons parfois des élèves en arriver à nier l'énoncé ; n'est-ce pas aussi le cas de bien des grandes personnes qui nient une vérité en faveur d'une « préséquence » de la parcelle déformée qu'ils ont perçue de la réelle vérité ? Il nous semble que le véritable éveil de la pensée logique, telle que l'entendent les scientifiques, est précisément la reconnaissance, puis l'acceptation d'une erreur possible dans une solution imaginée,

c'est-à-dire la conscience claire et parfaitement calme, totalement affranchie de l'instinct de propriété, de l'orientation de la démarche intellectuelle suivie, directe ou à reculons.

On pourrait définir ainsi quatre stades psychologiques :

— Démarche intellectuelle toujours à reculons, par conditions suffisantes et avec justifications, malgré les données et malgré la vérité extérieure ; les incohérences qui en résultent sont acceptées et souvent non perçues.

— Démarche intellectuelle, toujours à reculons, par conditions suffisantes et avec tentatives de justifications, mais en acceptant à l'avance la sanction de l'expérience, la logique devient cohérente.

— Démarche intellectuelle directe, en moyenne ou dans l'ensemble, mais chaque pas à reculons.

— Démarche intellectuelle directe dans tous ses détails.

De l'aveu de beaucoup d'entre nous, le quatrième stade est très rare, sinon impossible. Ceci est un aveu grave, car c'est reconnaître le rôle dominant de l'imagination, qui, de façon très générale pour ne pas dire unique, puise ses projets de solutions dans les souvenirs et ne peut ainsi fournir de solutions vraiment nouvelles.

Toutes ces dernières considérations paraîtront à certains de la philosophie voire de la métaphysique, jeu d'esprit sinon jeu de mots, mais veut-on bien réfléchir, par exemple, au simple fait suivant : en Mathématiques, nous appelons hypothèse, ce qui est vrai, sûr, solide, ce sur quoi on peut construire, alors que dans le langage courant une hypothèse n'est que probable, possible, peut-être fausse. N'y a-t-il pas dans ce simple renversement de sens du mot, même si on l'appelle seulement supposition, le signe que l'orientation de la recherche doit être clairement défini ?

M. A. FOUCHÉ,

Professeur au Lycée Janson-de-Sailly.

Notes diverses

Tangente et dérivée

C'est en Première A, B, C, Moderne, Technique, que la dérivée fait son apparition ; aux programmes de ces cinq classes, elle figure dans les termes suivants :

« Définition et signification géométrique de la dérivée d'une fonction pour une valeur donnée de la variable.

« Applications à la détermination des tangentes aux courbes $y = f(x)$ étudiées antérieurement. »

Ce libellé donne à penser que la dérivée est l'instrument indispensable à la recherche analytique d'une tangente.

On calcule donc la dérivée pour la valeur donnée x_0 , puis, à l'aide de la dérivée-formule ainsi trouvée, on calcule le coefficient angulaire de la tangente au point donné M_0 d'abscisse donnée $x_0 = -3$ par exemple.

On aperçoit alors rapidement, au contact avec les élèves, combien ce formalisme, certes commode, est dépourvu de substance et de valeur éducative.

Et on arrive ainsi à proscrire, plus ou moins officieusement, l'emploi de la dérivée-formule et à exiger que tout calcul de dérivée se fasse à partir de la définition

de la dérivée : limite de $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ lorsque x_1 tend vers x_0 .

Mais, alors, quel détour inutile ! Les élèves de Première savent depuis longtemps :

1° que la tangente à une courbe en M_0 est la limite de la sécante M_0M_1 , lorsque M_1 tend vers M_0 ;

2° que le coefficient angulaire de la droite M_0M_1 est $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$; d'où il résulte immédiatement que le coefficient angulaire de la tangente en M_0 à la courbe $y=f(x)$ est la limite de $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ lorsque x_1 tend vers x_0 .

Pour qu'un élève soit à même d'opérer ainsi, il n'est pas nécessaire qu'il ait entendu parler de la dérivée ; il est même bien préférable qu'il n'en ait jamais entendu parler.

Sa curiosité toute neuve s'attachera en effet à cette recherche *directe* du coefficient angulaire d'une tangente ; en multipliant les applications de cette méthode directe, il prendra lui-même conscience du rôle essentiel que joue la limite de $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, après quoi il trouvera naturel :

1° de donner un nom à cette limite, et de l'appeler, par exemple, « dérivée » ;
2° de calculer cette dérivée pour la valeur donnée, mais littérale, $x = x_0$, de manière à disposer, pour la pratique, d'une dérivée-formule commode jouant le même rôle de *formule* que toutes celles dont il connaît déjà l'emploi :

$$L = 2\pi R, \quad S = \pi R^2, \quad V = abc, \text{ etc...}$$

Au lieu d'aller de la dérivée à la tangente, comme le prescrit le programme, on aura ainsi conduit cet élève de la tangente à la dérivée, ce qui est à la fois l'enchaînement naturel et le déroulement historique.

On m'objectera sans doute que le programme ne *prescrit* pas, mais qu'il laisse chaque professeur libre de sa méthode, libre de l'ordre dans lequel il traite les questions.

Sans doute ; on ne saurait cependant nier l'influence indicative et suggestive du libellé des programmes ; leurs éminents auteurs ne doivent pas, par excès de modestie, sous-estimer cette influence.

Quoi qu'il en soit de cette responsabilité des programmes, j'incline à penser que, sur ce point, nous avons tous plus ou moins à faire notre *mea culpa* : imprégnés de dérivées au cours de nos études mathématiques, il ne nous est pas facile de nous remettre dans l'esprit d'un élève de Première, c'est-à-dire, à peu de chose près, dans l'esprit des chercheurs qui abordèrent les premiers le « Problème des tangentes ».

Comme le dit Jules TANNERY dans la préface de ses *Notions de Mathématiques* (1) : « A force de manier les choses, on oublie souvent ce qu'elles sont ; on « ne se rappelle plus que la façon de s'en servir. »

Je dois dire que, dans ce magistral traité, la dérivée n'apparaît qu'après une initiation qu'on est tenté de qualifier d'affectueuse, tant elle est délicatement progressive ; en voici les étapes :

§ 1 : tangentes déterminées géométriquement (cercle, parabole) ;

§ 2 : tangentes déterminées analytiquement (cercle, parabole, courbes $y = x^3$,

$$y = \frac{1}{x}) ;$$

§ 3 : dérivée (à partir de la tangente, et aussi à partir de la vitesse).

Ce qui est déplaisant dans la situation actuelle, c'est qu'on ne sait plus bien ce qui est permis et ce qui est défendu. Dans notre *Bulletin* de mai 1951, pages 208 à 213, on nous a affirmé que l'emploi de la fonction-dérivée était formellement interdit. Je veux bien, mais :

(1) Ouvrage édité en 1903 chez Delagrave, et destiné aux élèves de Philosophie, du P.C.N., etc...

1° si c'est vrai, qu'on le dise explicitement, officiellement et non plus sous le manteau, en catimini ;

2° à supposer que ce soit vrai, qu'on nous explique alors à quoi peut bien servir la dérivée en Première.

Il est interdit, et à bon droit, de l'employer pour la variation ; si, vraiment, il était également interdit d'employer la formule-dérivée pour calculer le coefficient angulaire d'une tangente, la dérivée ne serait plus qu'une étiquette posée sur ce coefficient angulaire, c'est-à-dire du pur verbalisme ; il vaudrait beaucoup mieux n'en pas parler du tout.

Le même commentaire peut être fait au sujet de la *vitesse à un instant donné*, qui figure au programme de Première C et Moderne.

C'est pourquoi je ne crois pas à cette interdiction absolue de l'emploi de la dérivée-formule pour construire une tangente ou calculer une vitesse.

Mais ceci n'est que mon opinion personnelle ; je ne la donne pas comme un écho de l'Olympe.

J'ai d'ailleurs l'impression que mon incrédulité à ce sujet est partagée par un grand nombre d'entre nous ; dans ce même *Bulletin* de mai 1951, nous lisons en effet, à la page 240 : « Il est entendu que le Bureau demandera à l'Inspection générale de préciser que les élèves ont le droit d'utiliser la formule $y' = 2ax + b$ (s'il y a par exemple une douzaine de tangentes à construire à une parabole).

« On pourra ainsi parler de « vitesse » dans le mouvement uniformément varié « et en faire le graphique. »

Je suis ainsi naturellement amené à demander que cette question soit reprise, dans une atmosphère de libre discussion.

Après quoi notre Président, mandaté par son Comité, pourrait signaler à la haute autorité compétente la nécessité de préciser ce point important, soit en revoyant le texte des programmes, soit en élaborant une circulaire explicative.

F. BRACHET.

Sur les inéquations trigonométriques

Dans un manuel récent pour la classe de Mathématiques, l'auteur écrit, à propos d'un exemple d'inéquation : « On constate sur cet exemple qu'une inéquation « trigonométrique ne peut être résolue avec précision que si l'on indique dans quel « intervalle on choisit la détermination de l'inconnue. »

Cette affirmation me paraît bien pessimiste ! L'exemple conduisait à :

$$-1 < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$$

la *totalité des solutions* est fournie sans conteste par $-45^\circ < x + k.180^\circ < 60^\circ$. Cette présentation est toujours possible, à la condition de localiser le module (180° ou 360°) contre l'argument inconnu. Les bornes sont des valeurs particulières ; ici on pourrait prendre aussi bien 135° et 240° .

On peut ainsi faire résoudre complètement aux élèves toute équation immédiate présentant un seul argument inconnu de la forme $u = nx + \varphi$ (n entier positif). Par exemple, soit l'inéquation $\cos u > \cos \alpha$ si l'on prend pour α l'angle positif inférieur à 180° , on a $-\alpha < u + k.360^\circ < \alpha$ d'où l'on tire facilement

$$-\frac{\alpha + \varphi}{n} < x + k. \frac{360^\circ}{n} < \frac{\alpha - \varphi}{n}$$

La différence entre les bornes est $\frac{2\alpha}{n}$, positive et inférieure à l'arc de symétrie rotative $\frac{360^\circ}{n}$; l'image graphique de la solution, sur le cercle trigonométrique, se compose donc de n arcs égaux sans empiètement.

Pour $\cos u < \cos \alpha$ on aurait $\alpha < u + k.360^\circ < 360^\circ - \alpha$.

Pour les autres équations immédiates en \sin ou tg , on choisira pour α l'angle aigu, positif ou négatif :

$$\begin{array}{ll} \sin u > \sin \alpha & \alpha < u + k \cdot 360^\circ < 180^\circ - \alpha \\ \sin u < \sin \alpha & 180^\circ - \alpha < u + k \cdot 360^\circ < 360^\circ + \alpha \\ \operatorname{tg} u > \operatorname{tg} \alpha & \alpha < u + k \cdot 180^\circ < 90^\circ \\ \operatorname{tg} u < \operatorname{tg} \alpha & -90^\circ < u + k \cdot 180^\circ < \alpha \end{array}$$

Si n est un entier négatif, il suffit de changer le sens des inégalités lorsqu'on divise par n .

A mon avis, ces résolutions sont bien du niveau de la classe ; les résultats sont concrétisés sans difficulté par une image graphique sur le cercle trigonométrique.

Il n'en est plus de même si n n'est pas entier. *La double inégalité reste correcte*, mais l'image graphique peut devenir illusoire, à cause des chevauchements des arcs suivant certaines valeurs de k .

Les complications augmentent encore s'il y a plusieurs arguments inconnus. Chacun devant être accompagné d'un terme $k \cdot 360^\circ$, $h \cdot 360^\circ \dots$, il y a lieu, dans la résolution, de considérer $h, k \dots$ comme des inconnues ; on pourra ainsi écrire complètement les solutions.

Voici un exemple où l'image graphique reste concrète au départ :

$$\cos(3x + 10^\circ) < \cos(x + 30^\circ).$$

En rassemblant dans le premier membre et factorisant, on obtient un produit de deux sinus. On est amené à résoudre deux systèmes dont l'un est :

$$\begin{cases} \sin(2x + 20^\circ) > 0, \\ \sin(x - 20^\circ) > 0, \end{cases}$$

qui conduit facilement au système :

$$\begin{cases} -10^\circ < x + k \cdot 180^\circ < 80^\circ, \\ 20^\circ < x + h \cdot 360^\circ < 200^\circ, \end{cases}$$

la solution graphique se compose des deux arcs $(20^\circ, 80^\circ)$ et $(170^\circ, 200^\circ)$ qui résultent de l'analyse directe de l'image graphique, ou du calcul suivant :

Cherchons la relation entre h et k , en éliminant x . Pour cela, on change les signes (et les sens) dans la seconde ligne, on retourne les inégalités pour retrouver le sens $<$, et on ajoute membre à membre. On obtient : $-230^\circ < (k - 2h) \cdot 180^\circ < 60^\circ$ d'où les deux possibilités : $k = 2h - 1$ et $k = 2h$; remplaçons k par sa valeur dans le système initial ; en posant $y = x + h \cdot 360^\circ$, on trouve bien :

$$170^\circ < y < 200^\circ \quad \text{et} \quad 20^\circ < y < 80^\circ.$$

Voici maintenant un exemple où les solutions sont distribuées au départ sur tous les points du cercle (mais toutes les déterminations ne sont pas valables)

$$\cos 2x < \cos(x + 30^\circ),$$

qui donne aussi un produit de sinus, et l'un des systèmes (sinus positifs) donne les solutions :

$$\begin{cases} 30^\circ < x + k \cdot 720^\circ < 390^\circ, \\ -30^\circ < x + h \cdot 240^\circ < 110^\circ. \end{cases}$$

L'élimination de x donne ici, entre h et k , la relation

$$-80^\circ < (3k - h) \cdot 240^\circ < 400^\circ.$$

d'où les deux possibilités : $h = 3k - 1$ et $h = 3k$.

Dans le premier exemple, k (avec les valeurs $2h - 1$ et $2h$) pouvait prendre toutes les valeurs possibles ; ici, au contraire, on ne peut pas donner à h les valeurs de la forme $3k + 1$.

En remplaçant h par ses valeurs dans le système initial, et en posant

$$y = x + k \cdot 720^\circ \quad (k \text{ entier quelconque}), \text{ on obtient}$$

$$30^\circ < y < 110^\circ \quad \text{et} \quad 230^\circ < y < 350^\circ.$$

Remarquons que, pour chaque point solution, une détermination sur deux seulement est acceptable.

Si nous prenons maintenant le second système (les deux sinus négatifs), on obtient, par une résolution analogue : $-330^\circ < y < -250^\circ$ et $-130^\circ < y < -10^\circ$. Les bornes de ces intervalles sont les mêmes que celles du premier système, avec un

décalage de 360° . Comme y a pour module 720° , il en résulte que, pour ces arcs, les déterminations qui n'étaient pas solutions du premier système sont solutions du second. Finalement, les solutions complètes de l'inéquation sont (p entier quelconque)

$$30^\circ < x + p \cdot 360^\circ < 110^\circ \quad \text{et} \quad -130^\circ < x + p \cdot 360^\circ < -10^\circ.$$

G. THOVERT,
Professeur au Lycée Ampère, Lyon.

Sur l'unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers

La méthode usuelle suppose préalablement acquise la théorie du P.G.C.D. et le fameux théorème de Gauss, effroi des candidats au bachelier : si $a|bc$ et si $(a, b) = 1$ alors $a|c$.

Elève, je m'étonnais de ce que je considérais comme un détour — et fort long — pour atteindre un but que je trouvais « intuitivement » proche.

Plus tard, j'ai eu la satisfaction d'apprendre une méthode qui se base sur un strict minimum de connaissances. Le mérite en revient à ZERMELO, célèbre pour son *axiome du choix*. J'ignore si des manuels la proposent aux étudiants, enfin, la voici.

S'il existe des nombres admettant plusieurs factorisations distinctes leur ensemble possède nécessairement un premier élément, plus petit que tous les autres. Soit a ce nombre. Il est susceptible d'au moins deux factorisations distinctes, j'appelle m et p les plus petits facteurs premiers figurant respectivement dans chaque factorisation. On peut donc écrire : $a = mn$, $a = pq$ en précisant que m est différent

de p , que m ne divise pas q et que p ne divise pas n , sans quoi $\frac{a}{m}$ ou $\frac{a}{p}$ qui sont inférieurs à a auraient deux factorisations distinctes contrairement à la définition de a .

Si l'on suppose par exemple $m < p$ on a alors $n > q$ et comme d'autre part $p < q$ on a : $mp < pq = a$. Formons alors le nombre positif $a - mp$,

$$a - mp = mn - mp = m(n - p),$$

$$a - mp = pq - mp = p(q - m),$$

m qui ne divise pas q ne divise pas $(p - m)$ et de même p ne divise pas $(n - p)$. Donc le nombre $(a - mp)$, qui est inférieur à a , admet deux factorisations distinctes, ce qui est une contradiction. Le théorème d'unicité est démontré.

Remarque : Le lecteur qui s'intéresse à l'*Algèbre moderne* verra que la démonstration s'étend aussitôt à tous les anneaux euclidiens, en particulier aux entiers de Gauss, de la forme $a + bi$ (a et b entiers) et aux polynômes à une variable sur le corps des réels.

André LENTIN,
Professeur au Lycée Buffon.

Symbolisme, terminologie

Mis en cause par notre collègue ESTÈVE, dans le n° 151, nous nous bornons à répondre que les notations que nous avons adoptées sont conformes aux normes NF X 02-102 et FD X 02-005 publiées par A.F.N.O.R.

Pour beaucoup d'autres notations (puissance, symétrie, etc...), des décisions sont prises et publiées : on doit s'y conformer, si l'on veut éviter l'anarchie.

Nous nous refusons, bien entendu, à utiliser le *Bulletin* à des fins personnelles. Nos collègues sont les meilleurs juges des mérites ou des défauts d'un ouvrage d'enseignement.

R. MAILLARD et A. MILLET.

Bibliographie

M. L. CHATTELUN : **Calcul vectoriel**, tome I, Gauthier-Villars, 1952.

C'est une belle synthèse que M. CHATTELUN nous présente dans ce premier ouvrage. Le début en est admirablement simple, puis nous nous sentons peu à peu élevés pour recevoir enfin l'initiation aux grandes théories que le Calcul vectoriel éclaire de son unité. Mais au cours de cette marche ambitieuse, l'auteur n'oublie jamais nos préoccupations de professeurs. Parfois, conviant le lecteur pressé à pousser plus avant, il s'arrête avec nous pour approfondir et faire surgir la source fondamentale d'une définition et d'une construction. Parfois, au contraire, se tournant vers les applications, il nous révèle toute une gamme d'exercices élégants. En lisant l'ouvrage de M. CHATTELUN, nous faisons une ample moisson pour nos collections de problèmes, nous embellissons notre cours et surtout nous goûtons le plaisir de la vraie culture.

Y. CROZES.

M. C. BOULIGAND : **Sur l'Axiomatique comparée**, Revue scientifique, n° 3315, janvier-février 1952.

L'étude commence par un aperçu historique bien instructif. Nous y découvrons l'influence de Ch. MERAY, nous y voyons naître et grandir le Calcul vectoriel, ses implications logiques s'affirmant dans une préface décisive de PEANO, nous assistons au développement de la théorie des groupes et nous arrivons enfin au point de vue de Hermann WEYL : primauté de la géométrie linéaire, puis transition vers la géométrie métrique par recours à une forme bilinéaire de deux vecteurs appelée à jouer le rôle de produit scalaire.

Ici l'auteur analyse la démarche savante d'Hermann WEYL en y révélant le groupe des rotations, puis plus élémentairement il présente le rapporteur binaire que nous avons admiré au cours d'une de nos premières réunions. Enfin, le problème des transitions étant posé dans toute son ampleur, un croquis saisissant nous donne la mesure de notre liberté, compte tenu de nos objectifs essentiels : n'initier qu'avec le souci de la redécouverte, faire naître et progresser l'esprit opératoire.

Y. CROZES.

A. SESMAT : **Logique**, tome I : *Les définitions et les jugements*, Hermann, 1950.

Cet ouvrage, de 353 pages, précède un autre ouvrage de même importance sur les Raisonnements et la Logistique. Le tome I, que nous présentons ici, est précédé d'une introduction, où l'auteur expose de façon très claire le but qu'il a poursuivi en publiant son expérience philosophique. Pour nous, professeurs de Mathématiques, il y a toujours une sorte de stupeur, sinon de défiance, à considérer ces gros livres de philosophie qui prétendent nous enseigner ce qu'est la logique, qui, nous semble-t-il, est l'essence même des Mathématiques. Cependant, à la lecture patiente et parfois résignée de ces pages sans calculs, nous finissons par sentir s'élever en nous un complexe de culpabilité, par subir la contagion de ces phrases longues et pleines, et lorsque nous nous sommes, peu à peu, habitués aux mots étrangers à notre science, nous acceptons de penser que notre propre langage est bien pauvre, qui ne peut pas rendre de si subtiles nuances.

Nous aurions grand intérêt, si nous ne voulons pas rester prisonnier de notre technique mathématique, à étudier ce livre et ceux du même genre, car nous avons souvent aussi à entrer dans le cercle infernal de la définition réciproque et quasi-simultanée des idées et des mots. Nous y gagnerions un sentiment meilleur et plus efficace des nuances logiques, ce qui nous permettrait d'assouplir le rythme souvent dur et même parfois brutal de l'enseignement des Mathématiques, qui fait, plus que l'abstraction même des idées, que les élèves peinent à nous suivre.

A. FOUCHÉ,

Professeur au Lycée Janson-de-Sailly.

DELAGRAVE*Nouveautés***Classe de Mathématiques****GÉOMÉTRIE BRACHET - DUMARQUÉ - ROSTOLLAND**

NOUVELLE ÉDITION, ENTIÈREMENT REFOUNDUE

- Large introduction des *méthodes vectorielles* (barycentre, produit scalaire, à titre facultatif).
- Présentation nouvelle des *déplacements*.
- Les diverses *définitions des coniques* à la fois bien enchaînées et bien délimitées.
- *Exposé explicite*, quoique concis, adapté à la fois à l'étude et à la recherche.
- Nombreux *exercices intercalés* dans le cours, soit comme applications immédiates, soit comme prolongements-recherches.

312 pages**401 figures****520 exercices et problèmes****Classe de 6^e Cours complémentaires****ARITHMÉTIQUE SCHAEFFER-LEBAILE****192 pages****124 figures****800 exercices**Catalogue et Spécimens sur demande : 15, rue Soufflot, PARIS (5^e)G. BAUDEZ : **Le Hasard et les causes rythmées** (Dunod).

L'auteur expose très clairement les théories classiques de la statistique, et se propose de les compléter par ce qu'il nomme la « théorie des causes rythmées », dont un exemple est donné par la répartition des nombres premiers. Si l'on étudie cette répartition dans les tranches de 500 entiers de 9×10^6 à 10^7 , on trouve que le graphique des fréquences a sensiblement la forme de la courbe en cloche. La répartition des nombres premiers est donc soumise aux lois du hasard. En réalité, observe l'auteur, cette répartition est due à l'intervention de causes rythmées, les suppressions des multiples de 2, 3, 5...

Autrement dit, si l'on peut déceler les causes et en calculer les effets, le rythme peut expliquer ce qu'on attribue d'ordinaire au hasard. Mais le nombre des causes mises en jeu peut être extrêmement grand. Le rythme disparaît rapidement dans les effets ; ou, plus exactement, la période du rythme composé augmente rapidement et tend vers l'infini, de sorte que tout se passe comme si le rythme n'existait pas. Et l'on en revient aux formules classiques de la statistique.

Quel est alors l'avantage de la théorie nouvelle ? C'est qu'elle laisse subsister le principe de causalité, que la science moderne semble mettre en péril.

L'auteur signale bien d'autres exemples d'applications : actuariat, médecine, et même les miracles. Il s'inspire assurément de la musique (au commencement était le rythme, a dit je ne sais quel chef d'orchestre). Bien que son ouvrage ait parfois l'air apologétique (« une théorie qui rend à la notion de cause première toute sa valeur est peut-être de nature à ramener à la foi ceux qu'une science de l'incertain en avait éloignés »), il témoigne d'une réflexion sincère et originale sur des questions classiques et ardues.

A. HUISMAN.

Vient de paraître

F. BRACHET, J. DUMARQUÉ et R. ROSTOLLAND : *Géométrie*, pour la classe de Mathématiques. 1 volume 19 x 14, 312 pages, Delagrave. Nouvelle édition, entièrement refondue.

OSCAR

LE MEUBLE PAR ÉLÉMENTS

BIBLIOTHÈQUES - VITRINES
BAHUTS DE LIVING-ROOM
PAR ÉLÉMENTS SUPERPOSABLES
ET JUXTAPOSABLES MUNIS
de portes coulissantes en
bois ou en glace, exécutés en
chêne ou acajou, ciré ou verni.

Catalogue n° 95 gratuit sur demande

Le mur
équipé



EXPOSITIONS PERMANENTES
15, RUE TRONCHET - PARIS-8^e - ANJ. 88-30

Le Gérant : L. PARAZINES.

Cahors. Imp. A. Coueslant (personnel intéressé). 84.153 — 1953
C.O.A.L. 31.2330. — Dépôt légal : I-1953

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD
GRENOBLE (Isère)

COURS DE
MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU
Professeurs au Lycée de Grenoble

Programmes du 18 avril 1947

Tarif novembre 1952

Arithmétique 6°	200	»
Dessin Géométrique 6° et 5°	125	»
Géométrie 5° et 4°	360	»
Arithmétique 5°	250	»
Arithmétique et Algèbre 4°	240	»
Arithmétique et Algèbre 3°	340	»
Géométrie 3°	265	»
Compléments d'Algèbre et de Géométrie Géométrie 3° Moderne court	160	»
Algèbre 2° A.B.C.M.	440	»
Géométrie 2° A.B.C.M.	440	»
Algèbre 1 ^{re} A.B.	180	»
Algèbre et Trigonométrie 1 ^{re} C.M.	440	»
Géométrie 1 ^{re} A.B.C.M.	440	»
Questions de Cours de Mathématiques du Baccalauréat, 1 ^{re} partie, A.B.C.M.	340	»

Roland MAILLARD et

Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne,
chargé d'un cours
à l'École Normale Supérieure

Albert MILLET

Professeur agrégé
au Lycée Janson-de-Sailly
et à l'École Normale Supérieure
de l'Enseignement Technique

COURS DE MATHÉMATIQUES

Enseignement du second degré

Classe de Sixième

Mathématiques. 192 p., 900 exerc. et probl.

*Une méthode
efficace*

Classe de Cinquième

Mathématiques. 272 p., 900 exerc. et probl.

*Une culture
mathématique*

Classe de Quatrième

Mathématiques. 288 p., 687 exerc. et probl.

★

Classe de Troisième

Mathématiques. 304 p., 1185 exerc. et probl.

*Une nouvelle
présentation
typographique*

Classes de Seconde Classique A et B

Mathématiques. 320 p., 714 exerc. et probl.

Classes de Seconde Classique C et Moderne

Algèbre. 256 p., 633 exerc. et probl.

Géométrie. 444 p., 724 exerc. et probl.

LIVRES DU MAÎTRE :

Classes de Première Classique A et B

Mathématiques. 288 p., 600 exerc. et probl.

Corrigés de 6^e

Corrigés de 5^e (sous presse)

Corrigés de 3^e

Classes de Première Classique C et Moderne

Algèbre et Trigonométrie. 288 p., 634 exerc. et probl.

Géométrie. 336 p., 528 exerc. et probl.

Corrigés de Géométrie 2^e CM

(sous presse)

Classe de Mathématiques

Algèbre. 368 p., 890 exerc. et probl.

Cosmographie, 256 p., 94 exerc. et probl.

Géométrie. 480 p., 693 exerc. et probl.

Trigonométrie. 192 p., 585 exerc. et probl.

A PARAÎTRE :

(avant la rentrée d'octobre 1953)

Géométrie descriptive

Classe de Mathématiques

Cosmographie

Cl. de Philo et Sc. expér.

Classe de Mathématiques (Technique)

Géométrie. 496 p., 711 exerc. et probl.

Algèbre et Trigonométrie

Classe de Philo