

DEUXIÈME PARTIE

Quelques remarques historiques sur la notion de grandeur (1)

Fermat, à la fin de son mémoire sur les lieux, plans et solides, écrit : « Il y a pour la Science un certain intérêt à ne pas dérober à la postérité les travaux encore informes de l'esprit ; l'œuvre d'abord simple et grossière se fortifie et grandit par les nouvelles inventions. Il est même important pour l'étude de pouvoir contempler pleinement les progrès cachés de l'esprit et le développement spontané de l'art. »

Dans l'esquisse qui suit, je me propose d'apporter quelques aperçus sur l'histoire assez obscure d'une partie des Mathématiques où fourmillèrent, pendant de longs siècles, malentendus et paradoxes. Il s'agit de la notion de grandeur, et de la mesure des grandeurs.

Ne cherchez pas la définition de la grandeur dans Euclide, vous ne la trouveriez pas. Vous ne la verrez pas non plus, nettement dégagée, dans Aristote. En revanche, vous trouverez dans les Définitions de Héron, œuvre tardive et quasi-anonyme :

(1) Nous sommes heureux de publier ici l'une des conférences faites au groupe « *Axiomatique et redécouverte* ».

« Grandeur est ce qui peut être augmenté ou divisé à l'infini. Ses espèces sont au nombre de trois : la ligne, la surface, le solide. » Nous voici davantage en pays de connaissance. Remarquez toutefois que le temps n'est pas compté parmi les grandeurs. Il est pourtant la grandeur continue type, et Archimède le traite mathématiquement dans cet esprit. Par ailleurs, dans les Définitions de Héron, nous voyons apparaître, à côté de la ligne, à une seule dimension, la surface qui en a deux, et le volume qui en a trois. Nous savons, depuis quatre-vingts ans environ, depuis Cantor, qu'il y a une différence fondamentale entre ces sortes de grandeurs continues. Nous nous en doutions, il est vrai, depuis quelque quatre mille ans, et si je remonte ainsi au déluge c'est qu'effectivement, les Mathématiques remontent au déluge.

J'ai écrit déjà deux fois l'expression « grandeur continue ». Ici encore la confusion est millénaire. En Mathématiques le terme « continu » a deux sens, le sens Aristotélicien, le sens Euclidien. C'est Aristote, réincarné dans Cauchy, qui a gagné le combat obscur contre Euclide, défendu par Euler.

Aristote écrit : « J'utilise le terme « continu » quand les extrémités où se touchent deux choses sont confondues en une seule » Ainsi, deux segments de ligne droite font un ensemble continu parce que le point qui les sépare appartient aux deux. Première et confuse apparition de la coupure de Dedekind.

Le même mot « continu » se trouve dans les *Éléments* d'Euclide dans un sens technique fort différent. Il y apparaît au livre huit dans l'expression « proportion continue » que nous traduisons de nos jours par « progression géométrique ». C'est ce sens de constance d'une même loi qui domine longtemps dans la littérature mathématique, plus particulièrement dans la littérature arithmétique et algébrique.

Euler écrira au début de son *Introduction à l'Analyse Infinitésimale* : « Une fonction d'une quantité variable est une expression analytique composée d'une façon quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes. »

Au tome second du même ouvrage il déclarera qu'une ligne courbe continue est telle que sa nature s'exprime au moyen d'une fonction de la variable x . Une ligne dont la nature s'exprimera au moyen de plusieurs fonctions sera dite discontinue, ou mixte, ou irrégulière.

On constate d'Euler à Lacroix un léger glissement. La continuité euclidienne passe de la courbe à la fonction elle-même. C'est que le sens du mot fonction a varié, et a pris une extension plus grande. D'où les nouvelles définitions : « Fonctions continues : ce sont celles dont toutes les valeurs sont liées par une même loi, où dépendent de la même équation. Fonctions discontinues : ce sont celles dont toutes les valeurs ne sont pas liées par une même loi. »

Le sens Aristotélicien de la continuité ne disparaît pas complètement de notre science. Tartaglia, dans une leçon inaugurale, dira en italien que la géométrie est une science qui se propose la description des figures ou formes de la quantité continue immobile, ou grandeur ; Wallis écrira que les quantités continues sont divisibles à l'infini et également augmentables à l'infini, et Newton emploiera l'expression de « courbure continue » dans un sens identique à celui de Cauchy.

Ce dernier, dès 1821, dira qu'« une fonction d'une variable est continue entre des limites données lorsque, entre ces limites, chaque valeur de la variable produit une valeur unique et finie de la fonction, et que celle-ci varie par degrés insensibles avec la variable elle-même ». Depuis, cette définition est devenue classique et nous ne comprenons plus très bien les mathématiciens du XVIII^e siècle, ni même Poncelet et sa loi de continuité, où le sens Euclidien domine encore.

Mais revenons à la Grandeur et aux Grecs. Le cinquième livre des *Éléments* d'Euclide est entièrement consacré aux rapports de Grandeurs. C'est un court et très beau traité, un classique qui devrait être réédité périodiquement et qui a inspiré les théoriciens jusque y compris les axiomaticiens de la fin du siècle dernier.

Le mot actuel rapport, dans le sens de « rapport de deux grandeurs », est notre

traduction du mot *logos* des Grecs, que les Latins ont rendu d'abord par *proportio*, puis à partir de la traduction d'Euclide par Zamberti, en 1505, par *ratio*.

Parmi les nombreuses acceptions du mot grec et des deux mots latins se trouve le sens de mesure, de calcul, d'où dérivent le mot grec « *logistique* » ou art du calcul, le mot français *ration*.

À la fin du *xvi^e* et au *xvii^e* siècle, les mathématiciens français ont traduit le sens technique *ratio* par *raison*, puis le mot *rapport*, vers 1700, supplanté *raison*, et nous l'utilisons toujours, bien que sa signification ait évolué, depuis, dangereusement.

« Une *raison*, écrit Euclide, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes suivant la quantité. » C'est là, remarquera Barrow en 1666, une définition plus métaphysique que mathématique, « puisque rien n'en dépend ou n'en est déduit par les mathématiciens, ni, je pense, ne peut en être déduit ».

Mais, immédiatement après, Euclide ajoute : « Des grandeurs sont dites avoir une *raison* entre elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement. »

Ici, nous entrons dans le domaine solide des Mathématiques. La grandeur Euclidienne implique une notion d'ordre : plus grand, plus petit, se surpasser ; et, une opération : la multiplication par un entier, cas particulier de l'addition.

Pour que l'on puisse appliquer la notion de rapport à une famille de grandeurs, il ne suffit pas de pouvoir y définir un ordre, ni même une opération. Il faut encore que la grandeur soit Archimédienne, c'est-à-dire satisfasse à la condition imposée dans la définition d'Euclide.

La restriction est indispensable. Nous pouvons le faire sentir à nos élèves, grâce à l'algèbre élémentaire. Considérons les binômes $ax + b$. Ne gardons que ceux où $a > 0$ ou bien $a = 0$ avec $b > 0$.

Nous pouvons définir un ordre : de deux binômes le plus grand sera celui qui aura le plus grand a , ou si les a sont égaux, le plus grand b .

Nous pouvons définir une addition : la somme est toujours plus grande que chacun de ses deux termes. Tous les axiomes qui caractérisent la grandeur sont satisfaits, *sauf celui d'Archimède*. En effet, prenons par exemple le binôme x et le binôme 1. Quel que soit l'entier n , $1 \times n < x$. Notre grandeur n'est pas Archimédienne.

Les Grecs, s'ils montrent ici une telle prudence, une telle finesse, les doivent à un exemple plus géométrique et donc pour eux plus intuitif que celui que je viens de proposer.

On trouve dans les *Eléments*, livre 3, prop. 16 : « Une perpendiculaire au diamètre d'un cercle et menée de l'une de ses extrémités, tombe hors de ce cercle ; dans l'espace compris entre cette perpendiculaire et la circonférence, on ne peut pas mener une autre droite et l'angle du demi-cercle est plus grand, et l'angle restant est plus petit qu'aucun angle rectiligne donné. »

En contradiction absolue avec cette proposition, nous trouvons au livre 10, 1^{re} proposition : « Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées. » La contradiction disparaît si l'on se reporte à la démonstration de cette proposition. Il y est expressément indiqué que la plus petite des grandeurs, multipliée, deviendra enfin plus grande que l'autre. Autrement dit, il s'agit là de grandeurs Archimédiennes.

Si le nom d'Archimède intervient ici si souvent, c'est que le grand mathématicien postule explicitement que les grandeurs qu'il utilise : longueurs, aires, volumes, possèdent la propriété en question.

Les angles curvilignés ne la possèdent pas. D'où des discussions sans fin dans l'Antiquité, et de la Renaissance au *xvii^e* siècle. Les angles sont-ils des grandeurs, ou non ? Les uns disent que l'angle de contingence est une grandeur, mais hétérogène à

l'angle rectiligne. Les autres disent qu'il n'en est pas une. Disons que les angles curvilignes sont des grandeurs ayant un nombre de dimensions en général infini et qu'ils relèvent du calcul fonctionnel, non du calcul numérique. Mais cela, nous ne le savons d'une façon profonde que depuis quatre-vingts ans environ. Et on ne peut comprendre Pascal, par exemple, que si l'on a présent à l'esprit : « Si l'on veut prendre dans les nombres une comparaison qui représente avec justesse ce que nous considérons dans l'étendue, il faut que ce soit le rapport du zéro aux nombres ; car le zéro n'est pas du même genre que les nombres, parce qu'étant multiplié, il ne peut les surpasser : de sorte que c'est un véritable indivisible de nombre, comme l'indivisible est un véritable zéro d'étendue. » Attention, dans ce texte, au piège des mots : le « rapport du zéro aux nombres » n'est pas un rapport dans le sens technique, une raison. C'est une relation qui pourrait s'exprimer, soit en disant qu'il n'y a pas de raison du zéro aux nombres, soit que cette raison est un infiniment petit. « Voilà l'admirable rapport que la nature a mis entre ces choses, et les deux merveilles infinies qu'elle a proposées aux hommes, non pas à concevoir, mais à admirer. »

Tournons la question comme nous voudrons. Soyons subtils comme Euclide dans la suite du livre cinquième, soyons plus pragmatiques comme les Babyloniens, les Egyptiens ou les Indous, qui dit raison, ou rapport, dit nombre, ou suite illimitée de nombres. Car ici encore, il faudrait étudier les fluctuations et les avatars de la notion de nombre. Mais allons droit au but et déclarons avec Stevin : « Nombre est cela par lequel s'explique la quantité de chacune chose. » Lisez à ce propos le chapitre cinq de la quatrième partie de la logique de Port-Royal. Vous y verrez que nos Messieurs n'ont pas accepté cela facilement. La postérité a fini par donner raison à Stevin.

Mais les difficultés ne cessent pas. L'évolution n'est pas complète. Deux grandeurs de même espèce étant données définissent un rapport rationnel ou irrationnel (piège des mots encore : un rapport qui est un rapport ou qui n'est pas un rapport, effable ou ineffable), un nombre pour Stevin, une coupure dans l'ensemble des rationnels disons-nous aujourd'hui. L'accord est fait depuis Euclide. Mais la réciproque ? Une coupure dans l'ensemble des rationnels, un nombre réel enfin, correspond-il toujours à une grandeur ? Voilà qui transcende toute expérience, voilà qui implique un postulat, et voilà qui n'a guère qu'un siècle d'existence, aussi bizarre que cela paraisse.

Cette ténébreuse affaire a des dessous encore plus cachés que celle que raconte Balzac et je ne veux pas ici en faire l'histoire. Mais les origines en remontent au XVIII^e siècle au Calcul avec une majuscule, c'est-à-dire au calcul différentiel et intégral. On a commencé par essayer d'exprimer en nombres, ou en fonctions algébriques, des grandeurs, aires, volumes, arcs, dont l'existence était par ailleurs solidement attestée. Quand on n'a pas réussi, on s'est contenté à regret d'exprimer approximativement ces grandeurs, dont l'existence, je le répète, était parfaitement reconnue, par des suites, des produits infinis, des fractions continues, des séries.

« Au défaut des solutions rigoureuses, écrira Bossut, on est forcé de recourir aux méthodes d'approximation, et on leur doit, en grande partie, le succès des Mathématiques pratiques. La théorie des suites infinies est le principal fondement de toutes ces méthodes. »

Puis, peu à peu, et enfin d'une façon consciente avec Cauchy, on a adopté la position exactement opposée. Un calcul indéfiniment approché, convergent, une limite, une coupure, a défini un être mathématique. La grandeur concrète, alors, s'évanouit. Le nombre seul subsiste. Nous en sommes là, depuis 1850 environ. Mais nos élèves nous suivent-ils ? C'est un problème pédagogique dans lequel je ne veux pas entrer, mais que cette esquisse éclairera peut-être un peu.

Il a été très bien abordé, il y a cinquante ans, par Jules Tannery, en particulier dans les dernières pages de ses Leçons d'Arithmétiques, publiées chez Armand Colin. Le chapitre 13, mesure des grandeurs, mérite d'être lu et repensé.

Terminons ici ces bavardages. Puissent-ils montrer que nous pouvons, dans notre enseignement, développer tout autant l'esprit de finesse que l'esprit géométrique.

Jean ITARD,
Professeur au Lycée Henri-IV.