

Une Géométrie basée sur les notions de Distance et de Retournement

PREMIERE PARTIE : INITIATION

Conférence de M. Gustave CHOQUET, recueillie et rédigée par Mlle Lucienne FÉLIX

Préliminaires

On doit enseigner la géométrie élémentaire dans les lycées : ceci est un postulat que nous admettrons ! Mais de quelle façon ? Il faut choisir les définitions. Surtout, il faut choisir les premiers énoncés que nous devrons admettre : c'est-à-dire les axiomes. Suivant le choix de ces axiomes, on construira une géométrie ou une autre.

HILBERT fut le premier à donner un fondement rigoureux à la géométrie. Rappelons seulement que les axiomes qu'il met à la base de la géométrie sont répartis en plusieurs groupes :

1. *Axiomes d'association* : par exemple : par deux points passe une droite et une seule.
2. *Axiomes d'ordre* : par exemple : ordination des points d'une droite.
3. *Axiomes de congruence* : d'une part, relation d'équivalence entre couples de points, c'est-à-dire entre segments de droites ; d'autre part, congruence concernant les angles.
4. *Axiome des parallèles* (ou postulatum d'Euclide).
5. *Axiomes de continuité* : par exemple : l'axiome d'Archimède. On peut développer la géométrie très loin sans ce cinquième groupe d'axiomes, de sorte que l'on peut provisoirement ne pas s'en occuper.

En examinant les énoncés de ces axiomes, nous remarquons que certains ne sont pas très simples, tel l'axiome de Pasch dans les axiomes d'ordre, tandis que le théo-

rème suivant qui s'en déduit : « Une droite divise le plan en deux régions telles que tout segment qui joint deux points situés dans des régions différentes coupe la droite » a un énoncé plus intuitif.

De plus, il y a un mélange entre les équivalences relatives aux longueurs et les équivalences relatives aux angles, ce qui crée une dualité compliquée. Il en résulte, par exemple, que l'on prend comme axiome : « Deux triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, comprenant un angle égal, ont leurs autres angles égaux chacun à chacun », et ensuite, on démontre que les troisièmes côtés sont aussi égaux. N'était-ce pas tout aussi intuitif ?

Concluons qu'il est difficile, comme les essais l'ont prouvé, d'adapter cet exposé à l'enseignement élémentaire.

Une autre présentation peut être proposée.

Supposons définie et étudiée la *droite réelle*, c'est-à-dire l'ensemble des nombres rationnels complétés par les irrationnels. Le *plan* est alors défini comme l'ensemble des couples ordonnés (x, y) de deux nombres réels. Une *droite* est définie comme l'ensemble des points (x, y) satisfaisant à une équation $ax + by + c = 0$, a et b n'étant pas nuls tous deux.

A partir de là, on construit très vite la géométrie de la droite. Puis on introduit une *distance* d en posant par définition $d^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$, pour les deux points (x, y) et (x', y') .

Enfin l'*orientation* s'introduit par le signe du déterminant associé à un couple de vecteurs.

L'avantage de cette méthode est que, au moyen seulement des quatre opérations de l'algèbre, on obtient très vite de nombreux résultats. Surtout cet exposé se généralise immédiatement à l'espace à 3, puis n dimensions, puis à l'espace complexe, puis à l'espace projectif, réel ou complexe.

Mais est-ce un exposé que l'on peut adapter à l'enseignement élémentaire ? On part du théorème de Pythagore, clef de la géométrie métrique, que l'on pose comme axiome. Or, ce théorème n'est pas intuitif ; on ne le rencontre pas au cours de manipulations simples faites avec une règle et une feuille de papier ! Cet exposé doit être réservé à un stade plus avancé de l'enseignement (Mathématiques Spéciales ou Mathématiques Supérieures), au moment où l'on veut faire une synthèse et montrer en particulier la non-contradiction de la géométrie.

Ces remarques conduisent à chercher une base axiomatique qui satisfasse les exigences intuitives et qui, cependant, permette d'obtenir assez rapidement des résultats substantiels.

Quelle va être l'attitude de celui qui cherche les énoncés des axiomes de base ? La géométrie qu'il va créer dépend des instruments dont il dispose et des réalisations concrètes de la droite et du plan qui auront préalablement servi de support à son intuition. C'est ainsi que l'on pourrait se borner au *compas à pointes sèches*, c'est-à-dire au *transporteur de distances*. Il définit l'*égalité des distances* de deux couples (relation d'équivalence). Il permet également de définir l'*inégalité* : on dira que ab est plus petit que $a'b'$ si pour tout triangle abc tel que $ab = ac$, il existe un triangle $a'b'c'$ tel que $a'b' = a'c'$ et $b'c' = bc$.

Mais cette géométrie aura des énoncés et des axiomes assez compliqués et peu naturels, et ceci tient à ce que nous n'avons permis au départ que l'usage d'un instrument unique.

Nous allons permettre, outre le compas à pointes sèches, l'usage du pliage. C'est-à-dire que le plan sera considéré comme une feuille de papier indéfinie que l'on peut plier sur elle-même autour d'une de ses droites. Le système d'axiomes que nous serons conduits à poser permettra d'arriver assez vite à des énoncés importants.

Dans l'exposé qui suit, nous allons dissocier l'étude de la droite de celle du plan. Cette dissociation nous semble importante, autant du point de vue logique que du point de vue pédagogique.

Exposé des axiomes

I. LA DROITE ORIENTÉE.

(Il est plus simple de définir la droite orientée que la droite ordinaire, car cela évitera l'introduction de la relation « entre » qui est une relation ternaire).

La droite orientée est un ensemble Δ de points tel que :

1. Il existe sur Δ une relation d'ordre total.

2. Il existe sur l'ensemble des couples (ab) , de points de Δ , une relation d'équivalence.

3. Ces deux relations sont reliées par certaines propriétés.

1. *Relation d'ordre total.* — Elle sera notée $<$ (ordre strict).

a) Quels que soient les deux points a et b de Δ , on a nécessairement une et une seule des éventualités $a < b$, $b < a$, $a = b$.

b) La relation est transitive : $a < b$ et $b < c$ entraîne $a < c$. L'ensemble est ainsi totalement ordonné.

2. *Relation d'équivalence* dans l'ensemble des couples de points de Δ .

Soit un couple ordonné, noté (a, b) . La relation sera notée \simeq .

a) $(a, b) \simeq (a, b) \simeq$ (réflexivité).

b) $(a, b) \simeq (a', b')$ entraîne $(a', b') \simeq (a, b)$ (symétrie).

c) $(a, b) \simeq (a', b')$, et $(a', b') \simeq (a'', b'')$ entraîne $(a, b) \simeq (a'', b'')$ (transitivité).

Nous y joignons :

d) $(a, b) \simeq (b, a)$.

3. *Axiomes reliant les deux structures.* — a) Les hypothèses

$$\left\{ \begin{array}{l} a < b < c, \quad a' < b' < c', \\ (a, b) \simeq (a', b') \text{ et } (b, c) \simeq (b', c'), \\ (a, c) \simeq (a', c'). \end{array} \right.$$

entraînent

b) *Possibilité de glissement de la droite sur elle-même* : Etant donnés trois points a, b, c sur Δ , il existe deux points d et d' , l'un avant, l'autre après c , tels que $(c, d) \simeq (c, d') \simeq (a, b)$. Tout ensemble ayant ces propriétés sera appelé *une droite*.

Remarque : Des exemples nous montrent que l'ensemble ainsi caractérisé peut ne pas être isomorphe à une droite ordinaire : ainsi l'ensemble des entiers ordinaires (les deux relations d'ordre et d'équivalence ayant leur sens habituel) satisfait bien à tous les axiomes.

Donnons un exemple tout différent : chaque « point » sera un polynôme du premier degré $u + vx$. L'ensemble de ces points, quand u et v sont par exemple des nombres entiers algébriques quelconques, constitue « la droite ». Nous prendrons comme relation d'ordre : $u + vx < u' + v'x$, si $u < u'$, ou bien $u = u'$ avec $v < v'$, c'est-à-dire, si $[u - u' + (v - v')x]$ est positif pour x très petit positif.

Nous prendrons comme relation d'équivalence entre deux points :

$$\begin{array}{l} [(u + vx), (u' + v'x)] \simeq [(U + Vx), (U' + V'x)] \\ \text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} u - u' = \varepsilon (U - U') \\ v - v' = \varepsilon (V - V') \end{array} \right. \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1. \end{array}$$

On vérifie qu'alors tous les axiomes sont satisfaits. (Il n'est naturellement pas question de faire allusion à cet exemple dans l'enseignement élémentaire !).

Définition de la longueur d'un segment. — 1. La longueur du segment $[ab]$ est la classe d'équivalence à laquelle appartient le couple (ab) ; on la notera par $|ab|$.

2. La structure d'ordre ayant permis de définir la droite orientée, permet de définir la relation $|ab| < |a'b'|$. Celle-ci sera satisfaite lorsque, portant le point b'' du côté de a' où est b' , avec $(a, b) \simeq (a', b')$, b'' est sur l'intervalle ouvert $]a' b' [$.

3. Nous définissons la somme de deux longueurs, grâce aux axiomes de glissement, et démontrons que cette opération est commutative $\delta_1 + \delta_2 = \delta_2 + \delta_1$. Puis nous démontrons que la somme est associative, ce qui revient à montrer l'égalité

$$\delta_1 + (\delta_2 + \delta_3) = (\delta_1 + \delta_2) + \delta_3.$$

4. Enfin, pour introduire la *soustraction*, nous démontrons que $\delta_1 + \delta = \delta_1 + \delta'$ entraîne $\delta = \delta'$.

La droite comme groupe additif ordonné. — Il suffit de prendre *une origine* quelconque sur la droite, et de définir $a + b$ et $-a$, pour tous les points. On vérifie bien que l'ensemble est alors muni d'une structure de groupe commutatif par rapport à cette addition. On montre que cette addition est compatible avec l'ordre, c'est-à-dire que si $a < b$, on a $c + a < c + b$ pour tout c .

Remarquons que nous ne pouvons naturellement pas parler de multiplication ni de division : les exemples donnés le montrent bien ! Par contre, le développement de la géométrie plane permettra de montrer que toute droite *d'un plan* possède une structure de corps totalement ordonné.

Il faut aussi noter que nous n'avons pas supposé qu'il existe toujours au moins un point entre deux points donnés, par exemple un milieu. Ceci est inutile, car cette existence du milieu sera démontrée comme conséquence de la définition d'un plan associé à la droite.

II. ETUDE DU PLAN.

A partir de l'expérience du pliage, on est amené à dégager certains axiomes que nous allons énoncer.

Nous dirons qu'un ensemble Π est un *plan associé à une droite* Δ s'il satisfait aux conditions suivantes :

Le plan est un ensemble de points que l'on peut mesurer avec cette droite. Cela signifie qu'à tout couple (ab) de points correspond une longueur (prise dans l'ensemble des longueurs des segments de Δ) que nous noterons encore $|ab|$. Nous supposons que, quels que soient les points a, b, c , de Π ,

1. $|ab| = 0$, équivaut à $a = b$.
2. $|ab| = |ba|$.
3. $|ac| \leq |ab| + |bc|$ (inégalité triangulaire).

On peut désormais définir l'*égalité* ou *isométrie* de deux sous-ensembles A et A' du plan Π ou de la droite Δ : une correspondance biunivoque entre les points de A et A' est dite une isométrie si elle conserve les longueurs (c'est-à-dire que $|a'b'| = |ab|$ pour tout couple (ab) et son homologue $(a'b')$).

Définition : On appelle *droite du plan* Π tout ensemble de Π isométrique à Δ . On montre aisément qu'il existe sur un tel ensemble une seule structure de droite compatible avec la distance définie dans Π , ce qui justifie le terme de « droite du plan Π ».

Axiome d'appartenance. — *Par deux points distincts passe une droite et une seule.* C'est-à-dire qu'étant donnés deux points distincts x et y de Π , il existe une droite et une seule, au sens précédent, qui contienne x et y .

Axiome de pliage (1). — Pour toute droite D du plan, il existe un partage de l'ensemble $\Pi - D$ en deux ensembles Π_1 et Π_2 non vides tels que :

a) Tout segment $[ab]$, a étant dans Π_1 et b dans Π_2 , ait un point appartenant à D .

b) Il existe entre $\Pi_1 \cup D$ et $\Pi_2 \cup D$ une isométrie qui laisse invariant tout point de D .

Remarquons que nous n'imposons pas *a priori* que ce partage soit unique, ni que l'isométrie entre Π_1 et Π_2 soit unique. Cette double unicité sera démontrée.

(1) A et B étant deux ensembles, nous rappelons qu'on note $A - B$ l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B , $A \cup B$ l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A , soit à B , soit aux deux, et $A \cap B$ l'ensemble des points qui appartiennent à la fois à A et à B .

Axiome des parallèles. — Disons que deux droites sont *parallèles* si elles sont identiques, ou bien si elles n'ont aucun point commun ; on notera ceci $D // D'$.

L'axiome des parallèles peut revêtir de nombreuses formes qui deviennent équivalentes lorsqu'on ajoute aux axiomes précédents un axiome de continuité ou même un axiome plus faible.

a) Pour toute droite D du plan Π , il passe par tout point du plan au plus une parallèle à D .

a') La relation de parallélisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble des droites du plan Π .

a'') Il existe au moins un rectangle (ensemble de quatre points distincts $abcd$ tels que $ab \perp bc$; $bc \perp cd$; $cd \perp da$; $da \perp ab$ (la perpendicularité se définissant aisément à partir du pliage comme nous le verrons).

a''') Tout ensemble de quatre points est contenu à l'intérieur d'un triangle (ces deux derniers termes ayant été préalablement définis).

a''') Il existe au moins un vrai triangle abc tel que, si b' et c' sont les milieux de $[ab]$ et $[ac]$, on ait $|bc| = 2|b'c'|$.

Axiome d'Archimède et axiome de continuité. — Nous ne les citerons que pour mémoire, étant donné que l'on peut développer toute la géométrie élémentaire sans y avoir recours. Ces axiomes concernent la structure de la droite Δ .

Axiome d'Archimède : quelles que soient les longueurs δ_1 et δ_2 , où $\delta_2 \neq 0$, il existe un entier n tel que $\delta_1 < n\delta_2$.

Axiome de continuité : pour toute suite de points $a_1, a_2 \dots a_n, \dots$ d'une droite (par exemple Δ), telle que $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots < b$ où b est un point fixe, il existe dans l'ensemble des points c tels que $a_n < c$ pour tout n , un point situé avant tous les autres.

Cet axiome est très restrictif. Lorsqu'il est satisfait, non seulement l'axiome d'Archimède l'est aussi, mais le plan Π est identique, soit au plan hyperbolique classique (où l'axiome des parallèles n'est pas satisfait), soit au plan euclidien R^2 .

Remarque : Nous n'étudierons pas en détail la question de savoir, d'une part quelles sont les droites Δ auxquelles on peut associer un plan Π , d'autre part s'il y a unicité (à une isomorphie près) du plan Π associé à une telle droite Δ .

Signalons simplement que ces droites Δ sont celles sur lesquelles existe une structure de corps compatible avec l'ordre et l'addition sur Δ , et telles que, pour tous a et b appartenant à ce corps, $\sqrt{a^2 + b^2}$ existe toujours. A une telle droite Δ correspond alors un plan Π et un seul.

DEUXIEME PARTIE

GEOMETRIE DU PLAN — DEPLACEMENTS — ORIENTATIONS

Conférence de M. Gustave CHOQUET, recueillie et rédigée par Mlle Lucienne FÉLIA

Géométrie du plan

THÉORÈME FONDAMENTAL. — Dans un plan, soient trois points distincts a, b, c . Lorsque $|ac| = |ab| + |bc|$ (I), les points a, b, c , sont alignés : par a et c passe une droite, $x'x$. Si elle ne contient pas b , il y a contradiction, car une autre droite existerait, contenant b . En effet, l'ensemble constitué par la demi-droite $x'a$, le segment $[ab]$, le segment $[bc]$ et la demi-droite cx est une droite du plan comme nous allons le démontrer.

Nous montrerons que l'ensemble en question est une droite en montrant qu'il est isométrique à la droite $x'x$. Définissons la correspondance biunivoque conservant les distances : tout d'abord l'égalité (I) entraîne l'existence sur $[ab]$ d'un point b' tel que $|ab'| = |ab|$ et $|b'c| = |bc|$.

A tout point s de $x'a$, associons le point s lui-même ; de même pour tout point de $x'b$. A tout point p de $[ab]$, associons le point p' de $[a'b']$ défini par $|ap'| = |ap|$, et de même pour tout point q de $[bc]$. Il nous faut démontrer, pour tous points s, p, q les égalités de distances $|sp| = |sp'|$ et $|pq| = |p'q'|$.

1. Comparaison de $|sp|$ et $|sp'|$. Si l'égalité n'avait pas lieu, l'inégalité triangulaire donnerait $|sp| < |sa| + |ap| = |sp'|$. Mais $|pb| + |bc| = |p'b'| + |p'c|$. On aurait donc $|sp| + |pb| + |bc| < |sc|$, ce qui est impossible.

2. Comparaison de $|pq|$ et $|p'q'|$.

Si l'y a égalité, comme $|pb| + |bq| = |p'b'| + |b'q'|$, il y a bien isométrie.

Si l'égalité n'était pas vérifiée, l'inégalité triangulaire donnerait

$$|pq| < |pb| + |bq| = |p'q'|.$$

Mais, en considérant la ligne polygonale $apqc$, on obtiendrait

$$|ac| \leq |ap| + |pq| + |qc|.$$

Et, avec $|ap| = |ap'|$, $|pq| < |p'q'|$ et $|qc| = |q'c|$, on en déduirait $|ac| < |ac|$. Il y a donc contradiction.

En conclusion énonçons le théorème sous la forme : *la condition nécessaire et suffisante d'alignement de trois points du plan est que la plus grande distance de deux de ces points soit égale à la somme des deux autres.*

ETUDE DES RÉGIONS DÉTERMINÉES PAR UNE DROITE. — D'après les axiomes, rappelons que, étant donnée une droite quelconque D et un plan associé Π , l'ensemble $(\Pi - D)$ est partagé en deux ensembles Π_1 et Π_2 séparés et isométriques. Nous allons étudier ces ensembles et montrer leur unicité.

a) *Lemme.* — *L'isométrie entre $(\Pi_1 \cup D)$ et $(\Pi_2 \cup D)$ peut se prolonger sur tout le plan.*

En effet, définissons une isométrie du plan sur lui-même par la correspondance suivante :

1) A tout a de $(\Pi - D)$ associons son homologue a' dans l'isométrie qui existe par hypothèse entre Π_1 et Π_2 .

2) A tout point de D associons le point lui-même. Es-ce bien une isométrie de tout le plan sur lui-même ? Si a et b sont deux points de $(\Pi_1 \cup D)$, la distance est conservée, et de même si les deux points sont dans $(\Pi_2 \cup D)$. Mais il nous faut considérer le cas où a et b sont, l'un, a , par exemple, dans Π_1 , et l'autre, b , dans Π_2 . Le segment $[ab]$ coupe alors D en un point p . Si a' et b' sont les homologues de a et b , on a $|pb| = |pb|$ et $|pa| = |pa|$, donc $|a'b'| \leq |a'p| + |pb'| = |ab|$. De même, $[a'b']$ coupe D en q et $|ab| \leq |aq| + |qb| = |a'b'|$. D'où $|ab| = |a'b'|$. Il en résulte de plus que p et q sont confondus.

Conséquence. — Cette isométrie transforme une droite en droite, un segment en segment.

b) *Théorème :* *les ensembles Π_1 et Π_2 sont convexes.* — Nous voulons démontrer que, a et b étant deux points de Π_1 , le segment $[ab]$ n'a pas de point commun avec D . En effet, si un tel point commun q existait, en le joignant au transformé a' de a dans l'isométrie définie entre Π_1 et Π_2 , on aurait $|a'q| = |aq|$, et

$$|a'b| < |a'q| + |qb|$$

(L'égalité est impossible car a et a' étant distincts, q n'est pas sur $[a'b]$). Il viendrait donc $|a'b| < |aq| + |qb| = |ab|$. Mais $[a'b]$ coupe D en un point p et

$$|ab| < |ap| + |pb| = |a'p| + |pb| = |a'b|.$$

Il y a donc contradiction. Par suite q n'existe pas.

c) *Conséquence :* *unicité de Π_1 et Π_2 .* — Disons que deux points de $\Pi - D$ sont équivalents si le segment qui les joint ne rencontre pas D . Ceci est bien une relation d'équivalence, car 1) $a \text{ } \mathcal{S} \text{ } a$; 2) $a \text{ } \mathcal{S} \text{ } b$ entraîne $b \text{ } \mathcal{S} \text{ } a$; 3) la transitivité est vérifiée. Or il n'y a que deux classes d'équivalence, qui sont Π_1 et Π_2 . Ainsi, un point a de Π_1 définit Π_1 comme l'ensemble des points b tels que $[ab]$ ne rencontre pas D .

Nous pourrions maintenant nommer Π_1 et Π_2 les demi-plans déterminés par la droite D.

d) *Théorème : L'isométrie entre Π_1 et Π_2 est unique.* — Soit a un point de Π_1 et a' son homologue dans une certaine isométrie satisfaisant aux axiomes. Le segment $[aa']$ rencontre D en un point p . Soit q un point de D distinct de p . On a $|aa'| < |aq| + |qa'|$, donc $|ap| < |aq|$. $[aq]$ est dite *une oblique* ; sa longueur $|aq|$ est strictement supérieure à $|ap|$. Il en résulte que, a et D étant donnés, le point p est parfaitement défini sur D comme point dont la distance à a est minima. Et a' est par suite parfaitement déterminé dans toute isométrie satisfaisant aux axiomes. Une telle isométrie est donc uniquement déterminée : on la nommera la symétrie par rapport à D.

Conséquences. — Ces notions fondamentales étant acquises, on peut déjà retrouver bien des raisonnements habituels de la géométrie. A ce stade peuvent être établis les principaux théorèmes de la *géométrie de situation*. Signalons les plus importants :

Démonstration de l'axiome de Pasch (axiome dans la construction de Hilbert). Trois points a, b, c étant donnés dans le plan, nommons *côtés du triangle abc* les trois segments $[ab], [bc], [ca]$. Nous énoncerons le théorème sous la forme : *Toute droite du plan qui ne passe par aucun des points a, b, c , rencontre 0 ou deux côtés du triangle.*

La démonstration résulte immédiatement de la remarque que, ou les trois points sont dans un seul des demi-plans déterminés par la droite, ou l'un des points est dans un de ces demi-plans et les deux autres points dans l'autre demi-plan.

Ce théorème s'étend à un *polygone fermé* quelconque, défini comme l'ensemble des permutations circulaires d'une suite finie ordonnée de points, distincts ou non, du plan. Ces points étant $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$ (i défini mod. n) les segments $[a_i a_{i+1}]$ sont les côtés du polygone. L'énoncé est alors : *Une droite D ne passant par aucun des sommets étant donnée, le nombre des côtés qui rencontrent D est toujours pair.*

Signalons encore le *théorème de Jordan* qui concerne les *polygones fermés sans points doubles*, c'est-à-dire tels que les sommets soient distincts deux à deux, et que deux côtés quelconques non consécutifs soient disjoints.

Théorème de Jordan : Etant donné un tel polygone, son complémentaire (c'est-à-dire l'ensemble des points du plan qui ne sont pas sur un côté), se partage en deux ensembles Q_1 et Q_2 tels que :

1. Deux points d'un même ensemble Q_i peuvent être joints par une ligne polygonale entièrement contenue dans cet ensemble.
2. Au contraire, toute ligne polygonale joignant deux points non situés dans le même ensemble Q_i rencontre au moins un des côtés.
3. Tout triangle contenant un point situé sur un des côtés contient des points de chacune des deux régions Q_i . C'est dire que la réunion des côtés forme une frontière des deux régions.

Nous ne ferons pas ici la démonstration, longue et délicate, de ce théorème qui n'est pas essentiel pour notre étude.

Voici maintenant un énoncé qui est un cas particulier d'un théorème relatif aux polygones convexes :

Théorème : *Si trois points a', b', c' sont à l'intérieur d'un triangle abc , le périmètre du triangle $a'b'c'$ est inférieur à celui du triangle abc .* (Démonstration classique).

Cet énoncé peut se généraliser un peu en remplaçant le triangle abc par un polygone fermé sans point double (après que l'on a défini l'intérieur d'un tel polygone).

Perpendiculaires et obliques

Définition. — Une droite D est dite *perpendiculaire* à une droite D' si elle est invariante dans la symétrie par rapport à D' et n'est pas confondue avec D'.

Il faut noter que, par cette définition, la relation de perpendicularité n'apparaît pas comme symétrique.

Nous démontrons immédiatement que D , perpendiculaire à D' , rencontre D' . En effet, si a est un point de D non situé sur D' , le symétrique a' de a par rapport à D' est situé sur D , donc aussi le segment $[aa']$ lequel rencontre D' .

PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE EN TERMES DE DISTANCES. — Soit p le point commun à D et D' , a un point de D et b un point de D' , choisis tous deux distincts de p . Nous avons déjà vu que l'oblique $[ab]$ vérifie $|ap| < |ab|$ et que cette inégalité, vraie quel que soit b sur D' , caractérise le point p sur D' donc, par un point non situé sur une droite D' passe une perpendiculaire à cette droite et une seule.

SYMÉTRIE DE LA RELATION DE PERPENDICULARITÉ. — Supposons encore que D soit perpendiculaire à D' . Nous voulons prouver que D' est perpendiculaire à D .

Nous savons déjà que D' et D sont distinctes. Il nous suffit de vérifier que p , projection sur D' des points a de D , est aussi la projection sur D des points de D' . Soit donc b un point de D' autre que p ; il a une projection q sur D . Si q était distinct de p , il ne serait pas sur D' ; donc il serait distinct de son symétrique q' par rapport à D' et l'on aurait $|bq| = |bq'|$; mais q' satisferait alors aussi bien que q à la condition de minimum de distance qui caractérise le pied de la perpendiculaire. Donc q' et q sont confondus et coïncident avec p .

Ainsi, la relation de perpendicularité est symétrique. Mais, naturellement, elle n'est pas réflexive (puisque D n'est pas perpendiculaire à elle-même), ni transitive !

THÉORÈMES SUR LES OBLIQUES. — Dans la figure précédente, $[ab]$ est oblique par rapport à D et par rapport à D' . Sa longueur est fonction strictement croissante d'une part de $|pb|$, d'autre part de $|pa|$.

Pour le démontrer, nous pouvons nous borner à considérer des points b d'un même côté de p , puisque le symétrique de b par rapport à D est à la même distance de a que b . Soient donc deux points b et c de D , situés d'un même côté de p et tels que $|pb| < |pc|$. Nous associons au point a son symétrique a' par rapport à D' et considérons les triangles isocèles aba' et aca' . Le point b étant sur $[pc]$ est intérieur au triangle aca' , et le théorème sur les périmètres donne

$$|aa'| + 2|ab| < |aa'| + 2|ac|, \text{ donc } |ab| < |ac|.$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, cette fonction strictement croissante $x = f(y)$ entre $x = |pb|$ et $y = |ab|$ conserve la structure d'ordre entre les demi-droites $x < 0$ et $y < |ap|$, mais sans réaliser nécessairement un isomorphisme sur ces demi-droites. Nous pouvons retarder le moment de soulever ce problème qui nécessite l'introduction de nouveaux axiomes, et nous allons poursuivre l'étude des conséquences des axiomes déjà introduits.

PERPENDICULAIRE MENÉE D'UN POINT A UNE DROITE. — Soit une droite D et un point a du plan. Nous avons démontré, lorsque a est hors de D , l'existence et l'unicité de la perpendiculaire menée de a à D . Nous supposons donc a sur D .

1. Existence d'une perpendiculaire D' à D passant par a .

Considérons un point b de la région Π_1 , et, sur le prolongement de $[ba]$, prenons le point c défini par $|ba| = |ac|$. Soient b' et c' les symétriques de b et c par rapport à D . Si b' est confondu avec c , la droite bc convient. Sinon, soit D' la perpendiculaire menée de a à la droite cb' , perpendiculaire qui existe bien puisque a n'est pas sur cb' . Cette droite D' passe au milieu p de cb' puisque les obliques ac et ab' sont égales; ces points c et b' sont donc homologues dans la symétrie par rapport à D' . Dans cette même symétrie, a est invariant et cab donne $b'ac'$. Donc $[bb']$ donne $[cc']$, et par suite de l'isométrie, le milieu q de bb' est homologue du milieu r de cc' . Mais q et r sont sur D . Donc D , qui passe par deux points homologues dans la symétrie par rapport à D' , est perpendiculaire sur D' . D'après la symétrie de la relation de perpendicularité, D' est donc bien perpendiculaire sur D .

2. *Unicité de la perpendiculaire menée de a sur D.*

Pour montrer qu'il n'y a pas d'autre perpendiculaire menée de a à D que la droite D' , caractérisons les points de D' parmi les points du plan : utilisons le couple q, r de points de D équidistants de a . Si un point m est sur D' , les obliques mq et mr sont égales. Si un point n n'est pas sur D' , l'un des segments $[nq]$ ou $[nr]$ coupe D' en un point m , soit par exemple $[nr]$. Alors l'inégalité triangulaire donne $|nr| = |nm| + |mr| = |nm| + |mq| > |nq|$ et na n'est pas perpendiculaire à D . Il ne peut donc pas exister plus d'une perpendiculaire à D passant par a .

Corollaire. — Introduisons, par la définition ordinaire, la *symétrie* par rapport à un point. Il résulte de la première partie de la démonstration précédente que le produit d'une symétrie par rapport à une droite D et d'une symétrie par rapport à un point a de la droite D est une symétrie par rapport à la perpendiculaire menée de a à la droite D .

Et l'unicité de la perpendiculaire permet d'énoncer la réciproque : le produit des symétries par rapport à deux droites perpendiculaires est une symétrie par rapport au point commun à ces droites.

Nous pouvons aussi énoncer le théorème qui introduit la *médiatrice* d'un segment : étant donnés deux points a et b , l'ensemble des points m définis par $|ma| = |mb|$ est, ou bien une droite perpendiculaire à ab en son milieu, ou bien est vide.

On peut ici admettre l'existence d'un milieu pour tout segment, mais si nous introduisons l'axiome des parallèles, cette existence sera démontrée grâce au théorème de Thalès.

PARALLÉLISME. — Nous avons déjà défini le parallélisme comme relation d'équivalence. Rappelons la définition :

Définition : Deux droites sont parallèles si elles sont confondues, ou si elles n'ont aucun point commun.

Théorème d'existence : Par un point il passe au moins une droite parallèle à une droite donnée : si le point donné a est sur la droite D , cette droite elle-même convient. Sinon, il suffit de considérer la droite D' perpendiculaire à la perpendiculaire Δ menée de a sur D . L'unicité de la perpendiculaire à Δ passant par tout point démontre que D et D' n'ont pas de point commun.

Axiome des parallèles : Par un point, il passe au plus une parallèle à une droite.

Enfinement, il en passe une et une seule.

Théorème : Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

En effet, soient D et D' deux parallèles. Une perpendiculaire Δ à D , coupant D en p , rencontre D' (puisque par p ne passe qu'une parallèle à D') en un point q' , et la perpendiculaire à Δ en q' , étant parallèle à D , est D' .

Etude d'une configuration importante. — Complétons la figure précédente en considérant la droite D'' symétrique de D' par rapport à D , ainsi que le point q'' symétrique de q . Il est immédiat que D'' est parallèle à D (puisque les points de D sont invariants dans la symétrie), et à D' (unicité de la parallèle). Coupons alors D en un point quelconque a par une droite quelconque δ . Celle-ci ne peut pas être parallèle à D' , ni à D'' ; elle les coupe en des points b' et b'' . L'ensemble formé par la réunion de D' et D'' est invariant dans la symétrie par rapport à D et aussi dans la symétrie par rapport à la perpendiculaire menée de a aux droites D, D', D'' , donc il est invariant dans le produit de ces symétries, c'est-à-dire la symétrie par rapport au point a . Donc, sur toute sécante, le point a d'intersection avec D est milieu du segment $b'b''$ joignant les points d'intersection avec D' et D'' .

Corollaire : tout segment possède un milieu. — Soit $[ab]$ un segment quelconque. Sur une demi-droite issue de a , portons $[ap] = [pq]$ et joignons bq . Cette droite, par symétrie par rapport au point p , donne une droite D passant par a et parallèle à qb . (En effet, nous l'obtenons comme perpendiculaire à la perpendiculaire Δ menée de p à

qb). Cette perpendiculaire Δ nous permet aussi de mener par p la parallèle D' à qb . Or les droites qb et D sont symétriques par rapport à D' , et ab ne peut être parallèle à D' . Donc D' coupe ab en un point qui, d'après le théorème précédent, est milieu de $[ab]$.

Théorème : Les segments de perpendiculaires communes à deux droites parallèles ont même longueur. Cette longueur est la distance des parallèles.

En effet, considérons les perpendiculaires $[pp']$ et $[qq']$ aux deux parallèles données D et D' . Le milieu de pq existe : soit i ce point. La perpendiculaire Δ en i à D est axe d'une symétrie dans laquelle $[pp']$ et $[qq']$ sont homologues, car la symétrie conserve la perpendicularité (définie par un minimum de distances), et D' est invariante. Par suite, $|pp'| = |qq'|$.

(Notons que la symétrie par rapport à un point permet d'obtenir le résultat pour deux segments parallèles obliques sur les droites).

Nous atteignons maintenant la notion de *parallèles équidistantes*, d'où le *théorème de Thalès* concernant des rapports entiers ou rationnels. On en déduit l'existence d'un point divisant un segment dans un rapport rationnel quelconque.

Notion d'orientation

Théorème : Étant donnés dans le plan deux ensembles isométriques quelconques A et A' , et une isométrie de A sur A' : $m' = T(m)$, on peut prolonger cette isométrie à tout le plan. Autrement dit, on peut trouver une isométrie $a' = \mathcal{C}(a)$ du plan sur lui-même telle que sa restriction à A soit T .

Pour démontrer ceci, nous allons prouver que T est un produit de symétries.

Soit a un premier point de A . Le point $a' = T(a)$ peut être ou non confondu avec a . S'il ne l'est pas, nous faisons subir à A la symétrie par rapport à la médiatrice D_1 de $[aa']$, et nous comparons les ensembles A_1 et A' . Soit b un second point de A , b' et b_1 ses homologues dans A' et dans A_1 . Si ces deux points ne sont pas confondus, nous transformons A_1 en A_2 par la symétrie autour de la médiatrice de $b'b_1$, droite qui passe nécessairement par a' . A' et A_2 ont donc deux points homologues communs, a' et b' . Mais une isométrie qui conserve deux points est nécessairement l'identité ou la symétrie par rapport à la droite joignant ces deux points, donc A' et A_2 , ou coïncident, ou dérivent l'un de l'autre par une troisième symétrie après laquelle trois points homologues non alignés sont confondus. (Tous les points homologues coïncident alors, puisqu'une médiatrice ne peut passer par trois points non alignés).

Donc, la transformation T est le produit de trois symétries au plus, produit qui transforme le plan en lui-même. Pour étudier une isométrie, on peut donc se borner à une isométrie du plan sur lui-même $T(\pi)$.

DISTINCTION DES ISOMÉTRIES DIRECTES ET INVERSES. — L'isométrie $T(\pi)$ est dite *directe* si elle est égale au produit d'un nombre pair de symétries

$$T = S_{2p} \cdot S_{2p-1} \dots S_2 \cdot S_1$$

et elle est dite *inverse* si elle est égale au produit d'un nombre impair de symétries

$$T = S_{2p+1} \cdot S_{2p} \dots S_2 \cdot S_1.$$

Il nous faut démontrer que ces deux cas s'excluent : une isométrie $T(\pi)$ ne peut être à la fois *directe* et *inverse*. Sinon, la transformation produit $T \cdot T^{-1}$ serait le produit d'un nombre impair de symétries : or c'est la transformation identique ; nous sommes donc amenés à démontrer le théorème : l'identité n'est pas produit d'un nombre impair de symétries.

1. L'identité n'est évidemment pas une symétrie.

2. L'identité n'est pas un produit de trois symétries.

En effet, si l'on avait (notant les symétries par leur droite invariante)

$$D \cdot D_2 \cdot D_1 = I,$$

ce qui équivaut à $D_2 D_1 = D$, tout point m de D serait invariant par $D_2 D_1$, donc D_2

et D_1 devraient être médiatrices des mêmes segments $[mm']$ et ne pourraient être distinctes.

3. *Lemme* : Le produit de deux isométries, qui sont chacune produit de deux symétries, est un produit de deux symétries.

Soient en effet $T_1 = D_2.D_1$ et $T_2 = D'_2.D'_1$. On démontre que le produit de deux symétries peut être remplacé par le produit de deux autres, le premier ou le deuxième axe de symétrie, au choix, pouvant être assujéti à passer par un point arbitrairement choisi. On peut alors faire coïncider les axes de la deuxième symétrie facteur de T_1 et de la première symétrie facteur de T_2 suivant une méthode classique.

En conséquence de ce lemme on peut, sans changer la parité du nombre de symétries dont l'isométrie est produit, ramener le nombre des symétries à être inférieur à 4. Le théorème est donc démontré.

Angles orientés. — Pour atteindre cette notion, nous allons d'abord définir un angle. Il semble peu en accord avec l'intuition de l'angle de le définir comme ensemble de points, intersection de demi-plans : nous préférons une définition dans laquelle un angle sera une figure constituée par un ensemble de demi-droites issues d'un point (ouvertes ou fermées). D'une façon précise, définissons d'abord un *angle plat* : ensemble des demi-droites issues d'un point a et contenues dans l'un des demi-plans déterminés par une droite passant par a . Un angle quelconque est alors, par définition, l'intersection de deux angles plats (ensemble non vide seulement si les sommets sont confondus).

Un angle possède deux côtés qui sont deux demi-droites issues du sommet ; un angle est dit orienté quand on a ordonné l'ensemble de ces deux côtés.

Angles de même sens. — Soient d'abord deux couples de demi-droites perpendiculaires prises dans un certain ordre : D_1, D_2 et D'_1, D'_2 . Ces deux ensembles sont isométriques d'une façon unique. Si l'isométrie qui prolonge cette correspondance à tout le plan est directe, nous dirons que les deux angles droits orientés correspondants sont de même sens. Si, maintenant, nous considérons deux angles quelconques, D_1D_2 et $D'_1D'_2$, nous associons au premier l'angle $D_1\Delta$, Δ étant la demi-droite perpendiculaire à D_1 dans le demi-plan qui contient D_2 , et de même pour $D'_1D'_2$ auquel nous associons $D'_1\Delta'$. Les angles primitifs sont dits de même sens si les angles droits associés le sont. On montre que si deux angles égaux sont de même sens, l'isométrie entre ces angles est directe, et inversement.

Déplacement continu. — Nous arrivons à la notion de déplacement continu par le théorème : *Quand une isométrie du plan sur lui-même est directe, il existe une famille d'isométries directes, dépendant continuellement d'un paramètre, reliant cette isométrie à l'identité.*

Comment obtenir une telle transformation $T(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, telle que $T(0) = I$ et $T(1) = T$? Une isométrie directe est produit de deux symétries. Pour que le transformé de tout point varie d'une façon continue avec un paramètre α , il suffira de faire varier continuellement les axes des symétries pour les amener à coïncider.

Théorème réciproque : *Dans une famille continue d'isométries, celles-ci sont toutes directes ou toutes inverses.*

En particulier, si une famille continue d'isométries contient l'identité, toutes ces isométries sont directes.

C'est le résultat qui remplace l'emploi du bonhomme d'Ampère, du tire-bouchon et autres appels intuitifs à la distinction entre droite et gauche d'un observateur, procédés, qui ne sont pas du domaine des Mathématiques.

INDICATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS ULTÉRIEURS. — Ce qui précède permet de reconstituer les parties de la géométrie élémentaire où l'on n'utilise que la structure d'ordre de l'ensemble des longueurs et l'addition de ces longueurs.

Pour obtenir les théorèmes tels que le théorème de Pythagore, il y a intérêt à

définir ensuite, dès que possible, la multiplication et la division des longueurs. On choisit pour cela arbitrairement une longueur δ non nulle que l'on appellera *unité*. Si a et b sont deux autres longueurs, le rapport $\frac{a}{b}$ sera défini comme une quatrième longueur x obtenue comme suit :

Soient Ox et Oy deux demi-droites perpendiculaires. On porte sur Oy les points A et B tels que $|OA| = a$ et $|OB| = b$; puis on porte sur Ox le point D tel que $|OD| = \delta$. Si on désigne par X l'intersection de Ox avec la parallèle à BD menée par A , x sera par définition la longueur $|OX|$.

A partir de là, on définit aisément le produit $(a \cdot b)$.

On démontre ensuite que ce produit possède toutes les propriétés classiques. Ceci peut se traduire par le fait qu'il définit sur toute droite, joint à l'addition, une structure de corps commutatif totalement ordonné.

Géométrie dans l'espace. — Nous dirons qu'un ensemble E est un espace à trois dimensions associé à une droite Δ donnée si :

- 1) E est mesuré par Δ (mêmes définitions que dans le cas du plan).
- 2) Par deux points distincts passe une droite et une seule.
- 3) Par trois points quelconques passe au moins un plan (c'est-à-dire un plan associé à Δ au sens défini précédemment, jusqu'à l'axiome des parallèles inclusivement).
- 4) Pour tout plan Π de E , il existe un partage de $(E - \Pi)$ en deux ensembles non vides E_1 et E_2 tels que tout segment joignant un point de E_1 et un point de E_2 rencontre Π .

Ce dernier axiome est équivalent au suivant :

- 4') Si deux plans ont en commun un point, ils ont en commun au moins un autre point.

L'étude de l'orientation dans l'espace peut se calquer sur l'étude que nous avons esquissée pour le plan.

Cette étude sera développée davantage dans un travail qui paraîtra dans un recueil d'exposés relatifs à l'enseignement des Mathématiques et publié par la « Commission internationale pour l'étude de l'enseignement des Mathématiques ».