

---

## DEUXIÈME PARTIE

---

### **Les Relations d'ordre et d'équivalence**

#### **Leurs applications en Géométrie Élémentaire**

*Conférence de Gustave CHOQUET, recueillie et rédigée par Mlle Lucienne FÉLIX*

Dans les mathématiques modernes, le rôle des *structures* apparaît comme de plus en plus important. On les reconnaît, même quand elles n'ont pas été explicitées :

lorsqu'on aperçoit, après coup, des ressemblances entre des démonstrations portant sur des objets différents, ce qu'elles ont en commun, c'est une même structure sous-jacente.

La structure la plus simple que nous percevons, la plus tangible, semble être la structure d'ordre. C'est elle que nous allons étudier tout d'abord. La notion d'équivalence, que nous examinerons ensuite, est plus délicate ; elle exige plus de précision dans sa vérification, sinon, de proche en proche, l'équivalence finit par disparaître et le caractère de transitivité, qui est essentiel, n'est plus assuré.

### I. Préliminaires. — Relations binaires

Considérons un ensemble  $E$  d'êtres mathématiques. Pour utiliser une représentation commode, nous les figurerons dans nos schémas comme des points d'un ensemble plan, par exemple, d'un segment. Nous allons définir une relation binaire sur cet ensemble  $E$ .

Par exemple, prenons pour  $E$  l'ensemble des points d'un segment de la droite réelle. Soient  $a$  et  $b$  deux points de cet ensemble, distincts ou non. Convenons de dire : «  $a$  est avant  $b$  » si l'abscisse de  $a$  est inférieure à celle de  $b$ , au sens strict, par exemple, qui exclut l'égalité. Nous venons de définir une relation binaire dans l'ensemble, car, étant donnés deux points, l'affirmation «  $a$  est avant  $b$  » est vérifiée ou ne l'est pas.

D'une façon générale, une relation binaire sur  $E$  est une fonction définie sur l'ensemble des couples ordonnés de points de  $E$ , qui prend la valeur « vrai » ou la valeur « faux ».

Convenons de ne retenir que les couples qui correspondent à la valeur « vrai ». Nous pourrions dire alors :

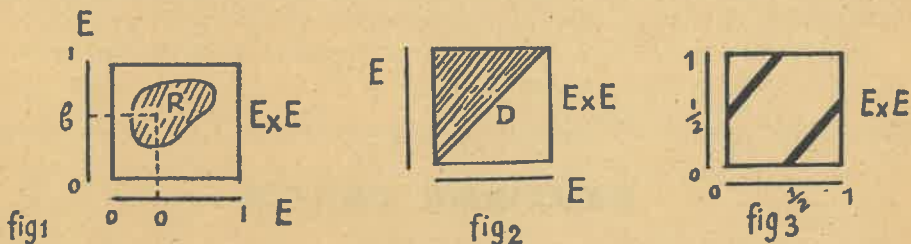
Une relation binaire sur  $E$  est une partie de l'ensemble de tous les couples ordonnés de points de  $E$ .

Étant donné un ensemble  $E$ , l'ensemble de tous les couples ordonnés d'éléments distincts ou non de  $E$ , constitue un nouvel ensemble que l'on nomme l'ensemble produit  $E \times E$ . Nous dirons donc :

Une relation binaire  $R$  sur  $E$  est un sous-ensemble de l'ensemble produit  $E \times E$

$$R \subset E \times E.$$

Si  $E$  est représenté par les points d'un segment de droite, de longueur  $l$  par exemple, l'ensemble produit  $E \times E$  est représenté par les points du carré de côté  $l$ , le premier élément du couple ordonné étant l'abscisse et le second étant l'ordonnée. La relation binaire sera donc représentée par un sous-ensemble  $R$  du carré.



Par exemple, la relation déjà citée «  $a$  avant  $b$  » sera représentée par le triangle hachuré (diagonale exclue si l'inégalité est prise au sens strict).

La relation «  $(a, b)$  est vrai si la distance de  $a$  à  $b$  est égale à  $1/2$  », équivalente pour les points du segment  $E$  à l'égalité  $|a - b| = \frac{1}{2}$  sera représentée par la réunion de deux segments, c'est-à-dire par l'ensemble des points qui sont sur l'un ou l'autre de ces segments.

Les relations binaires intéressantes sont celles qui satisfont à certaines lois simples.

## II. Relations d'ordre

Le premier des exemples donnés précédemment (représenté fig. 2) est une relation d'ordre sur le segment  $(0,1)$ . Elle est notée  $a \leq b$  si l'on considère l'inégalité large.

Nous allons définir la relation d'ordre sur un ensemble  $E$  quelconque, inorganisé, et que, précisément, nous allons organiser en construisant une relation d'ordre dans  $E \times E$ .

Nous utiliserons pour représenter la relation en question, la notation  $a \mathfrak{Z} b$ , lue «  $a$  avant  $b$  ». (Elle correspondra, sur la droite réelle, à l'inégalité  $a \leq b$ , et non à l'inégalité stricte).

Cette relation est dite *relation d'ordre* si elle satisfait aux conditions suivantes,  $a, b, c, \dots$  étant des éléments distincts ou non de  $E$  :

*Condition 1* : Quel que soit  $a$ ,  $a \mathfrak{Z} a$ .

*Condition 2* : Quels que soient  $a$  et  $b$ ,  $a \mathfrak{Z} b$  et  $b \mathfrak{Z} a$  ne sont possibles simultanément que si  $a$  et  $b$  sont identiques.

*Condition 3* : Si l'on a simultanément  $a \mathfrak{Z} b$  et  $b \mathfrak{Z} c$ , on a aussi  $a \mathfrak{Z} c$ . Ce qui s'écrit :  $a \mathfrak{Z} b$  et  $b \mathfrak{Z} c \implies a \mathfrak{Z} c$  (transitivité).

Voici un exemple important de relation d'ordre, qui contient, en un certain sens, tous les autres :

Soit  $A$  un ensemble abstrait quelconque et  $E$  l'ensemble des parties de  $A$ , c'est-à-dire, l'ensemble des sous-ensembles de  $A$ . (Par exemple, si  $A$  est un ensemble fini de  $n$  points,  $E$  contient  $2^n$  éléments,  $y$  compris l'élément « vide »).

Soient donc  $a$  et  $b$  deux éléments de  $E$  (donc deux parties de  $A$ ). Par définition  $a \mathfrak{Z} b$  si  $a \subset b$  ; c'est-à-dire,  $a \mathfrak{Z} b$  si tout élément de  $A$  contenu dans  $a$  est contenu dans  $b$ .

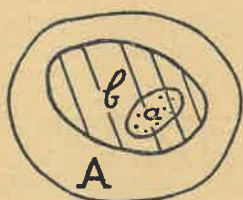


fig 4

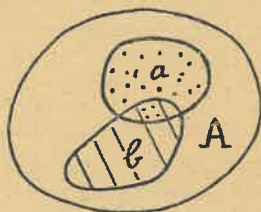


fig 5

On vérifie immédiatement que les trois conditions précédentes sont bien satisfaites par cette relation.

Il faut noter que,  $a$  et  $b$  étant deux parties quelconques de  $A$ , il se peut que l'on n'ait ni  $a \mathfrak{Z} b$ , ni  $b \mathfrak{Z} a$ , ni  $a = b$ . C'est dire que deux éléments,  $a$  et  $b$  de  $E$ , ne sont pas toujours comparables par la relation d'ordre considérée.

Une relation d'ordre est dite *relation d'ordre total* si elle vérifie une condition supplémentaire.

*Condition 4* : Deux éléments quelconques de  $E$  sont comparables. C'est-à-dire que,  $a$  et  $b$  étant deux éléments quelconques, on a, ou bien  $a \mathfrak{Z} b$ , ou bien  $b \mathfrak{Z} a$ , ou les deux si  $a$  et  $b$  sont identiques.

La plupart des relations d'ordre que l'on rencontre dans les mathématiques modernes ne sont pas des relations d'ordre total.

Parmi les questions qui nécessitent l'emploi de la notion d'ordre, citons la définition de la droite orientée. Il y figure en effet cette condition : une droite orientée est un ensemble totalement ordonné (muni en outre d'autres structures que l'on définit ensuite).

COMPARAISON D'ENSEMBLES ORDONNÉS. — Deux ensembles ordonnés, et même totalement ordonnés, ne sont pas nécessairement « semblables ». Suivant les exemples construits, on peut ou non affirmer, par exemple, qu'entre deux points  $a$  et  $b$  de l'ensemble, il existe toujours au moins un point de l'ensemble. Ainsi, deux ensembles ordonnés peuvent être de formes différentes. La considération des ensembles de même forme conduit à la *définition d'une fonction croissante* :

Soient deux ensembles totalement ordonnés  $X$  et  $Y$ . Si, à tout élément  $x$  de  $X$  est associé un élément  $y$  de  $Y$ , nous dirons que la fonction  $y = f(x)$ , définie sur  $X$ , est croissante, si  $x_1 \prec x_2$  (au sens de la relation d'ordre sur  $X$ ) entraîne  $y_1 \prec y_2$  (au sens de la relation d'ordre sur  $Y$ ).

La correspondance entre  $x$  et  $f(x)$  est plus satisfaisante encore si la fonction  $f$  est biunivoque, c'est-à-dire si à deux éléments  $x_1$  et  $x_2$  distincts sont associés des éléments  $y_1$  et  $y_2$  distincts et inversement.

Mais il n'est pas encore certain que tout  $y$  de  $Y$  provienne d'un  $x$  de  $X$ . Si, de plus, cette dernière condition est réalisée, on dit que la fonction  $f$  est un *isomorphisme*, et que les ensembles  $X$  et  $Y$  ainsi ordonnés sont *isomorphes* ou *semblables*.

EXEMPLES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE. — *Exemple 1* : Soit la droite réelle  $\Delta$  d'un plan  $\Pi$ , et soit  $O$  la projection sur  $\Delta$  d'un point  $A$  de  $\Pi$  pris hors de  $\Delta$ . Si  $\Delta_1$  désigne l'une des demi-droites de  $\Delta$  d'origine  $O$ , soit  $M$  un point quelconque de  $\Delta_1$ . Si  $x = |OM|$  et  $y = |AM|$  (la notation  $|AB|$  désignant toujours la distance entre  $A$  et  $B$ ), la fonction  $y = f(x)$  est croissante et biunivoque : c'est là un énoncé commode d'un théorème classique. Mais il est bon de faire remarquer que cet énoncé n'affirme pas que  $f$  soit un isomorphisme de  $\Delta_1$  sur l'ensemble des longueurs  $\geq |OA|$ . Une réponse affirmative résulterait par exemple de l'axiome de continuité.

*Exemple 2* : Soit une circonférence de centre  $O$  et  $P$  un point intérieur au cercle ; la perpendiculaire en  $P$  à  $OP$  coupe la circonférence en  $A$  et  $B$ .  $|OA|$  est fonction décroissante de  $|OP|$  ; l'arc  $AB$  est fonction croissante de  $|AB|$  (si l'on se limite aux arcs inférieurs à une demi-circonférence), etc...

*Exemple 3* : Tout le chapitre relatif aux inégalités entre périmètres de lignes polygonales nous fournit des exemples. Le plus important, quand on a défini l'opération « somme de deux longueurs », est relatif à trois points quelconques  $A, B, C$ . C'est l'inégalité  $|AC| \leq |AB| + |BC|$ .

Un autre énoncé très important, qui utilise la notion de convexité, est le suivant : toute ligne polygonale fermée est plus longue qu'une ligne polygonale convexe qui lui est intérieure. Les relations d'ordre qu'on en déduit permettent d'abrégier l'exposé sur la longueur de la circonférence.

*Exemple 4* : *Notion d'ensemble convexe*. (Nous avons tenu à indiquer la notion de convexité comme application de la notion d'ordre, d'une part parce qu'effectivement la définition de  $[ab]$  utilise la relation d'ordre, d'autre part pour insister sur l'intérêt qu'il y aurait à ne pas se limiter, en géométrie élémentaire, à l'étude de droites entières, de cercles entiers, etc... On a trop souvent tendance à oublier la structure d'ordre de la droite et de l'espace).

Sur une droite  $\Delta$ , désignons par *intervalle fermé*  $[ab]$  l'ensemble des points entre  $a$  et  $b$ , les points  $a$  et  $b$  compris. Nous dirons qu'un sous-ensemble  $E$  du plan ou de l'espace est convexe si, chaque fois que  $a$  et  $b$  sont dans  $E$ , tout point de  $[ab]$  est dans  $E$ .

Il est clair que l'intersection (ou partie commune) d'une famille d'ensembles convexes est convexe. On démontre que, réciproquement, tout ensemble convexe, ouvert ou fermé, peut être défini comme intersection d'une famille d'ensembles convexes très simples, à savoir, pour le plan, les demi-plans.

Par exemple, comment définir l'intérieur d'un triangle ? Nous nommons triangle tout ensemble de trois points. (Il est plus simple de définir un ensemble qu'une figure, car une figure, plane par exemple, est, non pas un ensemble de points du plan, mais

un ensemble de sous-ensembles du plan : par exemple, l'ensemble des trois sommets d'un triangle, des trois droites définies par ces sommets, des hauteurs, des médianes est une figure).

Un triangle étant donné, son intérieur sera défini par l'intersection de trois ensembles convexes, les plus simples que l'on définisse après le plan lui-même : les trois demi-plans déterminés chacun par deux des sommets et contenant le troisième sommet (frontières comprises ou non). Cette intersection de trois ensembles convexes est convexe.

On définit aussi, par exemple, l'intérieur d'un cercle et on montre qu'il est convexe.

### III. Relations d'équivalence

Ce sont encore des relations binaires sur l'ensemble des couples ordonnés d'un ensemble E. Nous les noterons  $\mathfrak{S}$ . Elles sont caractérisées par les conditions suivantes :

Condition 1 : Pour tout a de E,  $a \mathfrak{S} a$  (réflexivité).

Condition 2 :  $a \mathfrak{S} b$  entraîne  $b \mathfrak{S} a$  (symétrie).

Condition 3 :  $a \mathfrak{S} b$  et  $b \mathfrak{S} c$  entraîne  $a \mathfrak{S} c$  (transitivité).

On voit que c'est la condition 2 qui distingue la relation d'équivalence de la relation d'ordre.

Traduisons ces conditions par le schéma déjà utilisé, E étant encore le segment (0,1). Dans  $E \times E$  :

1) L'ensemble R contient la diagonale D.

2) L'ensemble R est symétrique par rapport à D. (C'est-à-dire, que si  $(a, b)$  appartient à R, ce qu'on écrit  $(a, b) \in R$ , on a aussi  $(b, a) \in R$ ).

3) Soit un point  $(a, b) \in R$  et un point  $(b, c) \in R$ . A ces deux points correspond le point  $(b, b)$  de la diagonale D. La condition 3 exprime que le point  $(a, c)$ , c'est-à-dire, le quatrième sommet du rectangle construit sur les trois points marqués,

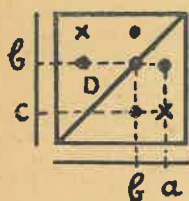


fig 6

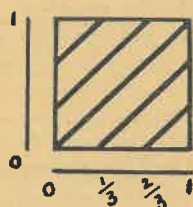


fig 7



fig 8

est aussi dans R. Donc, si R contient deux points qui soient sommets opposés d'un rectangle dont un troisième sommet est sur la diagonale D, le quatrième sommet de ce rectangle appartient aussi à R.

Exemple : La relation  $|b - a| = \delta$ ,  $\delta$  étant donné, est représentée, comme nous l'avons vu, par deux segments de droite, si a et b sont deux points du segment (0,1) ; ce n'est pas une relation d'équivalence. Par contre, la relation «  $a \mathfrak{S} b$  si  $|b - a|$

est multiple de  $\frac{1}{3}$  » est une relation d'équivalence.

CLASSES D'ÉQUIVALENCE. — Soit R une relation d'équivalence définie sur un ensemble E. Pour tout  $a \in E$ , soit  $\mathcal{C}(a)$  l'ensemble des éléments  $a'$  équivalents à a. D'après la condition 1, a est dans  $\mathcal{C}(a)$ .

Soit ensuite  $a'$  un élément équivalent à a. Comparons  $\mathcal{C}(a')$  et  $\mathcal{C}(a)$ . Par définition de  $\mathcal{C}(a)$ ,  $a'$  appartient à  $\mathcal{C}(a)$ . Mais d'après la condition 2, a est équivalent à  $a'$ ,

donc  $a$  appartient à  $\mathcal{C}(a')$ . Enfin, d'après la condition 3, tout  $a''$  de  $\mathcal{C}(a)$  appartient aussi à  $\mathcal{C}(a')$ . Donc  $\mathcal{C}(a)$  et  $\mathcal{C}(a')$  sont confondus.

Si, au contraire,  $a'$  n'est pas équivalent à  $a$ ,  $\mathcal{C}(a')$  et  $\mathcal{C}(a)$  sont disjoints, c'est-à-dire n'ont aucun élément commun.

$\mathcal{C}(a)$  s'appelle la *classe d'équivalence de l'élément  $a$* . Donc, les *classes d'équivalence de deux éléments sont confondues ou disjointes suivant que ces éléments sont équivalents ou non*.

C'est dire qu'une relation d'équivalence définie dans un espace détermine une fibration de cet espace en ensembles disjoints deux à deux. Si la relation est définie sur  $E$ , tout point de  $E$  appartient à une classe et une seule. Les classes constituent donc une partition de l'espace.

Inversement, si une partition de  $E$  en fibres est donnée, et si nous considérons comme en relation deux points  $a$  et  $b$  de la même fibre, cette relation est une relation d'équivalence, et les classes d'équivalence qui lui correspondent constituent une partition de  $E$  identique à la partition initiale. Donc, se donner une relation d'équivalence sur  $E$  équivaut à se donner une partition de  $E$  en fibres.

EXEMPLES PRIS DANS LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE. — Théorie des longueurs, égalité des figures, orientation, grandeur d'une aire, vecteurs libres, vecteurs glissants, etc...

Indiquons sommairement comment on peut construire le plan par la relation d'isométrie. (Ceci sera détaillé dans les exposés ultérieurs).

1. Imaginons le premier géomètre voulant construire une axiomatique du plan. Il dispose d'une tige rigide, de forme quelconque, qui va lui servir de transporteur de distances. Sa tige lui permet de découvrir la relation : « Egalité des distances entre deux couples de points. » Et l'expérience lui montre que c'est une relation d'équivalence.

Il donne ensuite un nom aux classes d'équivalence associées. Chaque classe sera une *distance*, notée  $|ab|$  pour la classe contenant le couple  $(a, b)$  de points du plan.

2. Cette notion est utilisée pour définir ensuite l'égalité de deux ensembles de points : deux ensembles  $A$  et  $B$  de points du plan sont dits égaux si, entre eux, existe une correspondance biunivoque qui conserve les distances. C'est donc une relation entre parties  $A$  et  $B$  de  $E$ . Ces parties forment un ensemble  $C$  sur lequel est ainsi définie une relation binaire qui est une équivalence. Cette relation se nomme *isométrie*.

Il faut alors nommer les classes d'équivalence déterminées par la relation d'isométrie. Chaque classe est nommée « *forme et dimension* » de la figure  $A$ .

3. On obtient l'*orientation* en ajoutant un peu plus :

$E$  étant toujours le plan, on peut distinguer, parmi les isométries du plan sur lui-même, les « *symétries par rapport à une droite* », qui sont définies au moyen des distances. On démontre que toute isométrie est le produit de 0, 1, 2 ou 3 symétries. En outre, le produit de  $n$  symétries est une isométrie.

Deux isométries  $I_1$  et  $I_2$  sont alors dites équivalentes,  $I_1 \sim I_2$ , si le produit  $I_1 \times I_2$  est une isométrie produit d'un nombre pair de symétries. Il est immédiat que cette condition définit bien une relation d'équivalence. Et on montre qu'il y a deux classes d'équivalence : on les nomme « *orientation* ». On désigne par *orientation directe* celle des deux classes qui contient l'identité.

4. Soit  $\varphi$  une isométrie définie entre deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  du plan  $E$ . On démontre qu'on peut prolonger cette isométrie à tout le plan. Si  $\varphi$  possède un prolongement qui soit direct (resp. inverse),  $\varphi$  est dite directe (resp. inverse). Il faut noter qu'une isométrie  $\varphi$  entre deux ensembles plans est à la fois directe et inverse dans le cas (et c'est le seul) où les ensembles  $A$  et  $B$  sont linéaires.

CONCLUSIONS. — Dans toute étude de géométrie, la prise de conscience des structures conduit à des énoncés meilleurs, à une compréhension plus profonde.

La relation d'ordre, qui semble plus primitive que la notion d'équivalence, est

aussi plus dynamique. Par exemple, au lieu du troisième cas d'égalité des triangles complété par des énoncés d'inégalité, on dira, avec les notations classiques : « On a  $c = f(a, b, C)$  et pour  $a$  et  $b$  constants,  $f$  est une fonction strictement croissante de  $C$  (avec  $0 \leq C \leq \Pi$ ). »

Dans tout triangle, au lieu de comparer deux côtés et les angles opposés, on énoncera le vrai théorème : « La relation d'ordre entre les angles d'un triangle est la même qu'entre les côtés opposés. »

De même, en mettant en évidence les relations d'équivalence, on rend les définitions et théorèmes plus clairs et plus puissants. Par exemple, l'énoncé usuel : « Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles », signifie : « La relation de parallélisme (au sens large) est une relation d'équivalence. » La classe d'équivalence correspondante contenant une droite  $\Delta$  s'appelle *direction de  $\Delta$* .

Un vecteur étant défini comme couple ordonné de deux points, un vecteur libre est une classe d'équivalence dans l'ensemble des vecteurs. Une équivalence plus faible définira, comme classe d'équivalence, les vecteurs glissants, etc...

L'adaptation de ces définitions et surtout de cette façon de penser n'a pas nécessairement pour conséquence une formalisation abstraite de la géométrie inassimilable par l'élève. Il suffira, pour éviter cet écueil, d'adapter à chaque niveau la matière et la forme, comme sait le faire tout bon pédagogue.

L'essentiel est que le professeur sache où il va, qu'il connaisse la raison du choix des définitions et des énoncés de théorèmes. S'il a une vision claire du but à atteindre, tout en enseignant en apparence les mêmes choses, il ne mettra plus l'accent à la même place. Là où il ne voyait qu'une mosaïque de théorèmes un peu disparate et sans grande nécessité interne, il verra maintenant le développement nécessaire et harmonieux d'une ou plusieurs structures, soit isolées, soit au contraire étroitement mêlées.