

Rapport sur le concours général de mathématiques pour les classes de Première, en 1951

Le Jury était ainsi composé : M. DESFORGE, inspecteur général président ; Mlle BARBIER, professeur de Mathématiques au Lycée Victor-Duruy ; Mme DOMANGE, professeur de Mathématiques (classe de Fontenay) au Lycée Fénélon ; Mlle LECONTE, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Fénélon ; M. Charles DURAND, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Buffon ; M. LEBOSSÉ, professeur de Mathématiques au Lycée Claude-Bernard (1).

Le sujet du Concours de 1951 consistait en l'étude de quelques propriétés d'un polyèdre à dix faces (peut-être devrais-je dire : facettes ?) qui devient, pour certaines valeurs des paramètres servant à le définir, la remarquable « alvéole des abeilles ». Il a paru intéressant de rattacher la solution de différentes questions, mettant en évidence certaines particularités géométriques curieuses de la figure, à quelques résultats algébriques qui n'exigent point d'autres connaissances que celles du programme de Première. Ainsi, à l'occasion d'un problème concret, posé par l'observation attentive de phénomènes naturels, pouvait apparaître l'intime liaison, pour ne pas dire l'unité, sur un plan très élémentaire, des domaines de la géométrie et de l'algèbre.

La première partie, ne comportant que de l'algèbre, permettait d'obtenir simplement quelques résultats utiles pour la suite. Partant de la relation

$$(1) \quad y = -x + \sqrt{\alpha x^2 + \beta}$$

établie entre deux variables x et y , les notations α et β représentant deux constantes respectivement supérieures à 1 et à 0, on demandait d'abord quel était le nombre de valeurs de x , positives ou nulles, vérifiant cette relation lorsqu'on donne à y une valeur positive quelconque. La connaissance de la signification exacte du symbole de la racine carrée suffit pour ramener cette question à l'étude de l'équation en x (2) $\alpha x^2 + \beta - (x + y)^2 = 0$ jointe à l'inéquation $x \geq 0$, avec l'hypothèse $y > 0$. La discussion classique

(1) Le texte du problème proposé a été publié dans notre numéro 142 de juillet 1951, pages 277 à 279.

de l'existence et du signe des racines d'une équation du second degré fait apparaître que le nombre des valeurs de x cherchées est zéro, deux ou un suivant que le paramètre y est inférieur au nombre $y_0 = \sqrt{\frac{\beta(\alpha-1)}{\alpha}}$, ou bien compris entre y_0 et $\sqrt{\beta}$, ou bien supérieur à $\sqrt{\beta}$; pour la valeur y_0 , l'équation (2) admet une racine double positive x_0 égale à $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha(\alpha-1)}}$.

L'existence d'un minimum, justement égal à y_0 , pour la variable y considérée ensuite comme fonction, définie par la relation (1), de la variable indépendante x , supposée positive, se déduisait de ces résultats, sans qu'il soit nécessaire d'entreprendre l'étude des variations de cette fonction, étude qui, bien entendu, n'était pas demandée, et était même explicitement écartée par l'énoncé, puisqu'elle ne peut être faite normalement qu'en faisant appel à des notions hors du programme de Première. Le raisonnement permettant d'établir la liaison entre les résultats obtenus dans la discussion de l'équation en x et l'existence d'un minimum pour la fonction y peut être détaillé, par exemple, de la façon suivante : pour chaque valeur positive x_1 donnée à la variable x , la relation (1) définit une valeur y_1 , manifestement positive, de la fonction y ; x_1 peut donc être considéré comme l'une des racines positives de l'équation (2) lorsqu'on donne au paramètre y la valeur positive y_1 ; y_1 fait donc partie des valeurs positives de y pour lesquelles l'équation (2) admet au moins une racine positive, et vérifie par conséquent l'inégalité $y_1 \geq y_0$; le nombre y_0 est lui-même la valeur numérique de la fonction y correspondant à la valeur x_0 donnée à x , puisque l'égalité numérique, qui exprime que x_0 est racine (double) de l'équation (2) lorsque y est égal à y_0 , et qu'on peut mettre sous la forme

$$(x_0 + y_0)^2 = \alpha x_0^2 + \beta$$

entraîne, x_0 et y_0 étant positifs :

$$y_0 = -x_0 + \sqrt{\alpha x_0^2 + \beta}.$$

La fonction y admet donc bien y_0 comme minimum, effectivement atteint pour la valeur x_0 donnée à x .

On peut naturellement raisonner autrement, par exemple, en faisant appel à la forme canonique du trinôme du second degré en x constituant le premier membre de l'équation (2). La relation (1) peut être écrite alors sous la forme

$$(3) \quad (\alpha - 1) \left(x - \frac{y}{\alpha - 1} \right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} y^2 - \beta \right) = 0$$

avec les hypothèses $x > 0$ et $y > 0$, et l'on met ainsi en évidence que la variable y vérifie toujours, quelle que soit la valeur donnée à x , et puisque

$(\alpha - 1)$ est positif, l'inégalité $y^2 \geq \frac{\beta(\alpha-1)}{\alpha}$, c'est-à-dire $y \geq y_0$, cette valeur y_0 étant effectivement prise par la fonction y lorsqu'on donne à x la valeur positive $\frac{y_0}{\alpha - 1}$, qui n'est autre que x_0 .

C'est à dessein que la solution de cette première partie, et, en particulier, le passage logique de l'une à l'autre des deux questions qui la constituent viennent d'être analysés longuement. Il n'est pas inutile, en effet, de chercher à comprendre les difficultés qui ont arrêté d'assez nombreux élèves dans l'étude d'un problème d'algèbre dont l'énoncé, s'il n'était pas tout à fait traditionnel dans sa forme, ne faisait pourtant intervenir que des mots exprimant des idées qui devraient être, à ce niveau, sinon familières, du moins suffisamment connues et élucidées, pour avoir été maniées maintes fois sous des formes variées : les notions fondamentales de variable, de fonction, de variables liées par une relation, sont assez simples et ont dû être présentées assez clairement, en les illustrant par de nombreux exemples, pour que leur contenu essentiel soit compris des débutants. C'est en tout cas le premier pas à franchir, et qui peut être franchi dans les classes de Seconde et de Première, pour passer du chapitre des nombres et des opérations, qui forme la base, à celui des correspondances entre nombres qui ouvre le domaine indéfini de l'algèbre et, plus tard, de l'analyse.

Il peut paraître surprenant de constater qu'une assez forte proportion (près de la moitié) des compositions ne contiennent que des essais douteux et sans grande valeur sur la première question. Sans doute le libellé a-t-il pu surprendre quelques-uns, qui auraient peut-être trouvé le terrain plus familier si l'on avait proposé de résoudre une certaine équation et d'en rechercher les racines positives ; mais ne peut-on demander à des élèves de Première de savoir, ou plutôt d'avoir compris que la résolution d'une équation est en réalité un problème dont l'énoncé est écrit, conventionnellement, sous une forme symbolique, et, inversement, que la phrase : « Combien existe-t-il de valeurs de x ... vérifiant la relation (1),... ? » n'est autre que celle que l'on formulerait pour traduire en langage clair la question posée par la résolution de l'équation (1) $y = -x + \sqrt{\alpha x^2 + \beta}$ où x est l'inconnue et y un paramètre, astreints l'un et l'autre, ici, à certaines conditions d'inégalité.

Quant au passage de la forme (1) à la forme (2), il ne requiert point, comme on l'a déjà remarqué, l'intervention de théorèmes généraux sur la transformation des équations : il suffit, là encore, d'avoir bien compris la signification d'une « équation », et de savoir que, pour que deux nombres positifs soient égaux, il faut et il suffit que leurs carrés soient égaux.

D'assez nombreux candidats, dont quelques-uns ont donné du reste des réponses correctes à certaines des questions de cette partie, ont cherché à tout prix à se raccrocher aux « mécanismes » et aux « formules », se contentant parfois d'une apparence, d'une ressemblance extérieure, pour appliquer, malheureusement hors de propos, tel théorème ou tel résultat « bien connu ». C'est ainsi que l'on trouve dans plusieurs compositions une faute assez curieuse : la relation (2), ayant été transformée de manière à isoler y^2 dans l'un des membres, afin, sans doute, de faire apparaître l'indispensable trinôme du second degré en x , se présente sous la forme (4) $y^2 = (\alpha - 1)x^2 - 2xy + \beta$; on étudie alors le minimum de y^2 , considéré comme une fonction de x définie par le second membre de cette

relation, sans avoir vu que les coefficients de ce trinôme dépendent justement de la fonction y . Par bonheur pour certains de ces apprentis maladroits, mais par malheur pour la logique, le résultat obtenu par ce procédé, c'est-à-dire par un raisonnement incorrect, se révèle exact, et l'exactitude tient à un fait qui n'est naturellement pas évoqué dans les solutions incriminées : la mise en évidence, par voie élémentaire, d'un minimum pour le trinôme du second degré en x qui figure au second membre de (4) est liée à la possibilité de mettre ce trinôme sous la forme canonique, et d'écrire, par conséquent :

$$y^2 = (\alpha - 1) \left(x - \frac{y}{\alpha - 1} \right)^2 + \left(\beta - \frac{y^2}{\alpha - 1} \right);$$

dès lors, puisque $\alpha - 1$ est positif, quelle que soit la valeur donnée à x , on a toujours l'inégalité $y^2 \geq \beta - \frac{y^2}{\alpha - 1}$, et l'on rejoint, par le lien de cette inégalité parfaitement correcte, les remarques faites précédemment à propos de la forme (3) de la relation initialement donnée.

On peut tirer, semble-t-il, quelques enseignements fructueux de l'observation réfléchie des tâtonnements et des hésitations qui se manifestent ainsi, fréquemment, chez les débutants aux prises avec la complexité et la subtilité des êtres algébriques et de leur comportement.

Il convient d'ajouter que cette partie algébrique du problème a donné lieu à un nombre non négligeable de solutions correctes, et parfois tout à fait bonnes.

La deuxième partie proposait l'étude d'un décaèdre convexe Δ ayant pour faces : un hexagone régulier ABCDEF, — puis six trapèzes rectangles non croisés ABB'A', BCC'B', ..., dont les bases AA', BB', CC', ..., perpendiculaires au plan P de l'hexagone sont des segments égaux de deux en deux (AA' = CC' = EE', BB' = DD' = FF'), les grandes bases étant AA', CC', EE', — enfin trois losanges égaux obtenus en complétant les parallélogrammes ayant respectivement pour côtés consécutifs les segments A'B' et B'C', C'D' et D'E', E'F' et F'A', les quatrièmes sommets de ces trois parallélogrammes étant confondus en un point I situé sur l'axe de répétition de l'hexagone. A vrai dire, la figure était décrite différemment : partant de l'hexagone dont on donnait le côté a , et d'une demi-droite OZ perpendiculaire au plan P et ayant pour origine le centre O de l'hexagone, on construisait trois segments AA', CC', EE', ayant même longueur l , perpendiculaires à P et situés du même côté de P que la demi-droite OZ, et le point I de OZ situé à la distance $l + x$ du point O, x étant une longueur comprise entre 0 et l ; une première question, très simple, avait pour objet de faire prendre contact avec ces éléments, en établissant que les plans tels que IA'C',... coupaient respectivement les perpendiculaires au plan P menées par les sommets B, D, E, en des points B', D', E' placés du même côté du plan P que OZ, puis en étudiant la forme des quadrilatères IA'B'C', ..., et en calculant la longueur commune des trois segments tels que BB'.

Afin d'obliger les candidats à réfléchir sur la forme et sur les particularités simples du polyèdre ainsi défini, l'énoncé demandait, comme complé-

ment, la construction des projections orthogonales de ce solide successivement sur le plan P de l'hexagone, puis sur deux des plans de symétrie de la surface prismatique ayant l'hexagone comme section droite, c'est-à-dire sur le plan diagonal $BB'EE'$, et sur le plan médiateur du côté BC . Cette construction devait mettre en évidence la symétrie du décaèdre par rapport aux plans tels que $BB'EE'$.

Le début de cette question, c'est-à-dire la mise sur pied du polyèdre, la recherche de la forme des faces telles que $IA'B'C'$, et le calcul de la longueur BB' , a été en général correctement traité, mais très fréquemment avec des longueurs et des maladresses provenant souvent du fait que quelques propriétés géométriques simples, en particulier des propriétés de symétrie et de répétition, n'ont pas été vues clairement ou n'ont pas été exploitées complètement. Beaucoup de candidats ont su tracer, pour cette partie du problème, des figures « en perspective » assez nettes, montrant qu'ils se rendaient compte de la forme générale du décaèdre. Par contre, les projections orthogonales, dont on demandait la construction ont été bien moins réussies. Il fallait évidemment, ici, entrer dans le détail, pousser davantage l'analyse des éléments géométriques. La question de la « ponctuation » que l'on proposait de faire en distinguant arêtes vues et arêtes cachées, et en laissant au candidat le soin de définir lui-même la position de « l'observateur » par rapport au décaèdre et par rapport au plan de projection, n'a pas toujours été comprise ; sans doute la technique des conventions élémentaires utilisées en géométrie descriptive n'est-elle pas connue des élèves de Première, mais il s'agissait ici de simples remarques de bon sens, et aucune justification logique n'était attendue.

Le décaèdre, une fois mis en place, l'étude se poursuivait par la détermination de ses principaux éléments métriques et angulaires en fonction des trois données fondamentales a , l , α : les longueurs des diagonales des losanges, — les longueurs des différentes arêtes, — les cosinus de l'angle φ formé par la petite base et par le côté non perpendiculaire aux bases de l'une quelconque des faces-trapèzes, et de l'angle θ formés par les deux côtés issus du sommet I de l'une quelconque des faces-losanges, — enfin, le volume V du polyèdre, son aire totale S et la somme L des longueurs de ses vingt et une arêtes. Tous ces calculs étaient faciles, lorsque les propriétés géométriques simples avaient été bien vues ; ils exigeaient, bien entendu, comme toute opération de cette nature, une observation réfléchie de la figure, un contrôle attentif aux différentes étapes, quelques vérifications rapides permettant d'éviter des erreurs gênantes. Sans entrer dans le détail d'une énumération « statistique », on peut dire qu'un bon tiers des compositions ne contiennent, pour ce groupe de questions, que peu de résultats valables ; le reste se partage à peu près également entre les copies donnant correctement presque toutes les formules demandées et celles où la plupart des calculs ont été abordés convenablement, mais où des défai-lances plus ou moins graves ont provoqué de fâcheuses erreurs.

La détermination du volume V du décaèdre a été assez rarement traitée à partir d'une très simple remarque de « compensation », qui apparaît

presque évidente lorsqu'on fait intervenir le plan parallèle au plan P de l'hexagone, et passant par les sommets A', C', E' : le tronc de prisme quadrangulaire ayant pour section droite le losange OABC et pour section non perpendiculaire aux arêtes le losange IA'B'C' a manifestement le même volume que le prisme quadrangulaire ayant la même section droite OABC et dont la hauteur est AA'. La recherche de ce volume pouvait naturellement être abordée par différents procédés de décomposition fort raisonnables, sans qu'il soit nécessaire, du reste, de faire intervenir une formule donnant le volume d'un tronc de prisme triangulaire, formule dont la connaissance n'est pas exigée en Première. Lorsque le calcul était correctement conduit, par quelque moyen que ce soit, le fait que l'on obtenait une expression très simple, et surtout indépendante de x , était assez remarquable pour que l'on cherche alors une explication géométrique de ce phénomène, dont la plus naturelle est sans doute celle qui vient d'être signalée.

Des fautes assez fréquentes ont été relevées dans le maniement des formules trigonométriques, pourtant bien simples, qui conduisaient aux expressions demandées de $\cos \theta$ et de $\cos \varphi$; en particulier, le fait que l'angle φ est obtus n'a pas manqué de provoquer quelques accidents.

Dans la dernière question de cette seconde partie, on considérait tous les décaèdres Δ pour lesquels les longueurs a et l sont fixes et vérifient l'inégalité $8l^2 > a^2$, et l'on demandait d'établir que leur aire totale S et la somme L des longueurs de leurs arêtes, fonctions l'une et l'autre de x , admettent un minimum pour une même valeur x_0 de x , valeur qui est également celle pour laquelle les angles φ et θ sont égaux. Il est intéressant de remarquer que tous ces décaèdres Δ , a et l étant fixés, ont le même volume V .

Le libellé de l'énoncé devait attirer l'attention sur la liaison qui existait probablement entre cette question et le problème d'algèbre traité au début, et, pour les candidats qui avaient obtenu des expressions correctes de S et de L en fonction de x , la forme de ces fonctions ne pouvait manquer de confirmer cette première idée. La difficulté technique à surmonter pour arriver à la solution en utilisant les résultats trouvés dans la première partie, sans être considérable, ne doit cependant pas être sous-estimée quand il s'agit de débutants. Les expressions de S et de L se présentaient en effet sous une apparence assez compliquée, et le premier travail devait consister en une discrimination entre termes ou facteurs constants et termes ou facteurs variables ; sans exiger une grande virtuosité, cette opération demandait pourtant quelque soin, afin d'arriver à mettre en évidence le fait que S et L admettaient un minimum en même temps, respectivement, que les

fonctions $-x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{4x^2 + a^2}$ et $-x + 3\sqrt{x^2 + a^2}$.

La deuxième étape à franchir, et qui comportait elle aussi un obstacle non négligeable pour des novices, était de mettre ces fonctions sous la

forme $-x + \sqrt{3x^2 + \frac{3a^2}{4}}$ et $-x + \sqrt{9x^2 + 9a^2}$,

afin d'établir leur analogie complète avec la fonction y de x étudiée dans la première partie. A partir de là, l'existence du minimum des fonctions

S et L pour la seule valeur $\frac{a}{2\sqrt{2}}$ de la variable x , comprise entre 0 et L ,

se déduisait immédiatement des propriétés connues de la fonction y .

La proportion de candidats ayant abordé d'une façon suffisante cette question ne dépasse guère un sur cinq, mais moins nombreux encore sont ceux qui conduisent les opérations jusqu'à leur terme correct, ou presque.

Le fait que la valeur particulière x_0 de x ainsi découverte est également celle pour laquelle les angles φ et θ sont égaux a été vérifié par quelques-uns ; en réalité, l'énoncé demandait une démonstration, qui permettait en même temps d'établir qu'il n'y a pas d'autre valeur de x réalisant cette propriété angulaire très simple : la question ainsi posée se réduisait à la résolution d'une équation irrationnelle, qui était certainement à la portée de bons élèves de Première.

Le décaèdre remarquable (Δ_0) ainsi découvert méritait évidemment un examen géométrique un peu attentif, qui était proposé, discrètement d'ailleurs, en conclusion de cette seconde partie. Le fait que les quatre angles trièdres formés par les arêtes issues des sommets I, B', D', E' ont toutes leurs faces égales, leur valeur commune étant celle des angles φ et θ , dont

le cosinus est égal à $-\frac{1}{3}$, et que les trois angles polyèdres à quatre faces

formés par les arêtes issues des sommets A', C', F' ont aussi, comme conséquence, toutes leurs faces égales, et égales au supplément de l'angle précédent, résultait évidemment de l'égalité établie des angles φ et θ et des propriétés angulaires classiques d'un trapèze et d'un parallélogramme. L'énoncé ne faisait pas allusion à l'égalité des quatre angles trièdres, afin de ne pas engager les candidats dans une voie qui ne devait pas leur être familière, mais on pouvait penser que quelques-uns découvriraient cette propriété et qu'ils en tireraient parti pour faciliter l'étude des dièdres des différents angles polyèdres. En fait, cette question a été presque complètement laissée de côté.

La troisième partie du problème avait pour objet de définir les conditions d'existence d'une sphère inscrite dans un décaèdre Δ , c'est-à-dire d'une sphère intérieure à Δ et tangente à ses dix faces. Pour éviter des tâtonnements à propos de faits évidents, l'énoncé indiquait qu'une telle sphère, si elle existe, avait nécessairement son centre sur la demi-droite OZ et que son rayon était celui du cercle inscrit dans l'hexagone régulier ; il attirait d'autre part l'attention sur l'intérêt que présente l'emploi d'une section de la figure par un plan tel que $BB'EE'$, déjà connu comme plan de symétrie du polyèdre. On supposait fixées les longueurs a et l .

Il est évident que la seule sphère acceptable comme sphère inscrite dans un décaèdre Δ est parfaitement déterminée par les conditions d'être tangente au plan P de l'hexagone et aux plans des six faces-trapèzes, et aussi d'être du même côté du plan P que la demi-droite OZ ; cette sphère σ a

pour centre le point ω de OZ situé à une distance égale à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ du point O, et elle est tangente en ce point O au plan P. Le problème se réduit donc à la recherche des conditions de contact de cette sphère σ avec les plans des trois faces-losanges du décaèdre.

La solution peut être orientée, soit vers une voie algébrique, soit vers une voie géométrique. On peut, par exemple, calculer les distances du centre ω de la sphère σ aux plans des trois faces-losanges, et la condition de contact s'obtiendra en exprimant que ces distances sont égales au rayon de σ ; l'équation obtenue, jointe aux inégalités imposées dès la définition du décaèdre, formera le système des relations caractérisant les décaèdres Δ admettant une sphère inscrite. On peut aussi se proposer de déterminer géométriquement les plans des faces-losanges tangentes à la sphère σ , compte tenu des conditions géométriques d'existence du décaèdre. De toutes façons, le fait que OZ est axe de répétition d'ordre trois pour Δ et axe de révolution pour σ permet de n'exprimer la condition de contact que pour un seul des trois plans des faces-losanges, pour le plan IA'B'C' par exemple, et la symétrie de la figure, formée par Δ et par σ , par rapport au plan BB'EE' ramène alors le problème à un problème plan.

Si l'on adopte d'abord la solution algébrique, on remarque que la distance du centre ω de la sphère σ au plan IA'B'C' n'est autre que la distance ωK du point ω à la droite IB', trace du plan IA'B'C' sur le plan de symétrie BB'EE'; le calcul de ωK est alors très facile, en utilisant par exemple la similitude des triangles $I\omega K$ et $IB'B''$, B'' étant la projection orthogonale de B' sur OZ. En exprimant que cette longueur ωK est égale au rayon $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ de la sphère σ , ce qui traduit une condition nécessaire et suffisante pour le contact du plan et de la sphère, on est conduit à une équation irratiounelle très simple, dont la résolution, compte tenu des conditions d'inégalité relatives au décaèdre, équivaut à celle du système :

$$(5) \quad \begin{cases} 2x^2 - (2l - a\sqrt{3})x + l(a\sqrt{3} - l) = 0, \\ 0 < x < l. \end{cases}$$

La discussion est classique et donne les résultats suivants :

si $l < a \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$, le décaèdre Δ n'admet pas de sphère inscrite ;

si $a \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} < l < a\sqrt{3}$, le système précédent admet deux solutions

pour x , et il existe deux décaèdres Δ distincts admettant une sphère inscrite ;

si $a\sqrt{3} < l < 2a\sqrt{3}$, le système n'admet plus qu'une solution et un seul décaèdre Δ est circonscriptible à la sphère σ ;

si $2a\sqrt{3} < l$, aucun décaèdre Δ n'est circonscriptible à σ . Bien entendu, il serait facile, et non sans intérêt, d'entrer dans le détail, et, en particulier, de donner une interprétation géométrique des valeurs de x qui sont racines de l'équation du second degré (équation qui, isolée du système, exprime

le contact du plan $IA'B'C'$ et de la sphère σ) sans être solutions du système.
Les cas limites doivent naturellement être signalés :

lorsque $l = a \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$, le système admet une seule solution, qui est racine double de l'équation ; cette racine est justement égale au nombre $x_0 = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ déjà rencontré dans la deuxième partie et correspondant à un décaèdre (Δ_0) ; on reparlera plus loin de ce cas particulier ;

lorsque $l = a\sqrt{3}$, le système admet une solution $\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{2}$ qui définit un décaèdre circonscriptible, et l'équation admet une racine nulle, qui ne vérifie pas, par conséquent, l'inégalité stricte $x > 0$, et qui correspond à une forme « limite » de décaèdre, réduite au prisme hexagonal régulier ayant pour base l'hexagone donné dans le plan P et pour hauteur $a\sqrt{3}$, la seconde base plane $A'B'C'D'E'F'$ pouvant être considérée comme formée par trois losanges tels que $IA'B'C'$;

enfin, lorsque $l = 2a\sqrt{3}$, la seule racine positive de l'équation est justement égale à l et définit ici encore une forme limite du décaèdre Δ , dans laquelle les six faces-trapèzes sont remplacées par des faces triangulaires ($BB' = 0$).

Pour l'étude géométrique de la question, en utilisant, comme précédemment, la symétrie par rapport au plan $BB'EE'$, on remarque que la condition de contact du plan $IA'B'C'$ et de la sphère σ est équivalente à celle du contact de la droite IB' avec le grand cercle γ , section de σ par le plan de symétrie. Les données du problème, dans le plan $BB'EE'$, sont alors les suivantes : IB' est l'un des côtés du trapèze rectangle $OIB'B$ dont les éléments fixes sont le côté OB , ayant pour longueur a , les demi-droites OZ et Bu , parallèles et de même sens, supports des bases OI et BB' , et le segment HH' , ayant pour longueur l (supposée fixée, comme a), qui joint les milieux H et H' des côtés OB et IB' du trapèze, et qui représente la projection orthogonale sur le plan de symétrie des deux segments AA' et CC' ; d'autre part, le cercle γ , tangent en O à OB , a son centre ω sur la demi-

droite OZ , et son rayon est égal à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Le support du côté IB' est donc assujéti à passer par le point fixe H' , à être tangent au cercle γ , et à couper les demi-droites Bu et OZ en des points R' et I tels que OI soit supérieur à BB' .

Ainsi apparaît l'idée d'une construction simple : on mènera par le point H' les tangentes au cercle γ , et on ne retiendra que celles de ces droites pour lesquelles les points B' et I existent (c'est-à-dire celles qui coupent effectivement les deux demi-droites Bu et OZ) et vérifient la relation $OI > BB'$. La discussion fait donc intervenir, d'une part la condition d'existence des tangentes au cercle γ passant par le point H' , d'autre part, les conditions relatives aux points B' et I .

Pour la première, on remarque que le support du segment HH' coupe le cercle γ en deux points H_1 et H_2 dont les « cotes » mesurées parallèlement à OZ , à partir du plan P , c'est-à-dire du point H , se calculent aisément puisqu'on connaît leur somme égale au diamètre $a\sqrt{3}$ du cercle, et leur produit égal à $\overline{OH}^2$; on trouve ainsi :

$$\overline{HH_1} = a \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}, \quad \overline{HH_2} = a \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}.$$

Le point H' doit donc se trouver, soit sur le segment HH_1 , soit sur la demi-droite H_2V , parallèle à OZ , qui prolonge HH_2 au delà de H_2 .

Les autres conditions, concernant les points B' et I (existence et positions relatives), mettent en jeu comme éléments remarquables : la tangente au cercle γ au point O' diamétralement opposé au point O , tangente qui coupe le support de HH' au point L dont la « cote » est $a\sqrt{3}$, et la tangente au cercle γ , distincte de BO , passant par le point B , soit BT , qui rencontre le support de HH' et la demi-droite OZ respectivement aux points H_0 et I_0 ayant pour « cotes » $2a\sqrt{3}$ et $4a\sqrt{3}$. Le calcul de ces deux longueurs peut se déduire facilement du fait que la tangente BT est symétrique de BO par rapport au diamètre $B\omega$ et que l'angle $\widehat{OB\omega}$ a pour tangente $\frac{\sqrt{3}}{2}$, la tangente de l'angle aigu $\widehat{OBT}$ étant par suite égale à $4\sqrt{3}$.

L'examen de la figure, en supposant que le point H' , ayant pour « cote » l , varie sur la demi-droite H_2V , à partir du point H , montre alors que :

si H' est intérieur au segment HH_1 , c'est-à-dire que si $l < a \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$,

les tangentes passant par H' ne conviennent, ni l'une, ni l'autre, car elles ne rencontrent pas la demi-droite OZ ;

si H' est sur le segment H_2L , c'est-à-dire si $a \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} < l < a\sqrt{3}$,

les deux tangentes menées par H' , qui ont leurs points de contact sur l'arc limité par les points de contact des tangentes à γ issues du point L , donnent l'une et l'autre une solution du problème ;

si H' est placé sur le segment LH_0 , c'est-à-dire si $a\sqrt{3} < l < 2a\sqrt{3}$, l'une des tangentes passant par H' a son point de contact sur le demi-cercle de γ situé par rapport à OZ du côté qui ne contient pas le point B , et cette tangente ne peut être retenue, car elle définit sur Bu un point B' dont la « cote » est supérieure à celle du point I qu'elle détermine sur OZ ; la seconde tangente passant par H' donne une solution acceptable ;

enfin, si H' est au delà du point H_0 , sur la demi-droite H_0V , aucune des deux tangentes ne répond aux conditions imposées, l'une définissant, comme précédemment, des points B' et I tels que BB' soit supérieur à OI , et l'autre ne coupant pas la demi-droite Bu .

Les cas limites sont faciles à étudier, et correspondent à des construc-

tions très simples. En particulier, lorsque le point H' occupe la position H_2 , sur le cercle γ , c'est-à-dire lorsque $l = a \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$, les deux tangentes se confondent avec la tangente à γ au point H_2 et l'on obtient ainsi un décaèdre circonscriptible particulier dont on précise dans la suite quelques propriétés.

Les deux solutions algébrique et géométrique se complètent mutuellement. Il convient d'observer que la justification rigoureuse des propriétés mises en œuvre dans la discussion géométrique exigerait en réalité un raisonnement assez délicat, qui pourrait, par exemple, être conduit en étudiant systématiquement les mesures algébriques des segments $\overline{OI}$, $\overline{BB'}$, déterminés, sur les axes ayant pour demi-droites positives OZ et Bu , par la tangente fixe OB et par une tangente variable au cercle γ . Naturellement, une telle justification logique n'était pas attendue des candidats, et les remarques géométriques déduites de l'observation raisonnée d'une figure suffisamment correcte étaient considérées comme suffisantes et très favorablement appréciées.

Dans la dernière question, on demandait surtout de chercher si, parmi les décaèdres Δ_0 étudiés à la fin de la deuxième partie, il en existait un circonscriptible à une sphère. Cependant, on proposait d'abord d'établir que le rapport du volume à l'aire totale d'un décaèdre Δ admettant une sphère inscrite est égal au tiers du rayon de cette sphère. Cette propriété est presque évidente, et manifestement valable pour tout polyèdre convexe circonscrit à une sphère, le volume d'un tel polyèdre pouvant être évalué comme la somme des volumes des pyramides ayant pour sommet commun le centre de la sphère inscrite, et pour bases les différentes faces du polyèdre.

Dans le cas des décaèdres Δ , cette propriété peut d'ailleurs être présentée comme caractérisant ceux d'entre eux qui admettent une sphère inscrite, ou, plus exactement, on peut établir, pour les décaèdres Δ , une proposition réciproque de celle qui vient d'être énoncée, à condition de bien préciser les hypothèses : ayant d'abord remarqué qu'un décaèdre Δ ne peut admettre d'autre sphère inscrite que la sphère σ décrite précédemment, dont le rayon

R est égal à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, et dont le centre ω est le point de OZ tel que $O\omega = R$,

si l'on considère les décaèdres Δ dont le volume V et l'aire totale S vérifie la relation $V = \frac{R}{3} \cdot S$, R étant précisément le rayon de la sphère σ ,

ces décaèdres sont circonscriptibles à une sphère, qui est naturellement la sphère σ .

Pour démontrer cette propriété, on peut, par exemple, pour un décaèdre Δ quelconque, décomposer son aire totale S en une somme de trois termes : l'aire S_0 de l'hexagone, la somme S_1 des aires des trapèzes, la somme S_2 des aires des losanges ; on peut, d'autre part, décomposer son volume V en

une somme de volumes de pyramides ayant pour bases les différentes faces de Δ et pour sommet commun un point intérieur à Δ ; il est naturel de choisir ce point sur OZ , donc sur le segment OI , et il est possible de le choisir à égale distance du plan P de l'hexagone et des plans des trois faces-losanges ; il suffit en effet de prendre le point d'intersection de OZ avec le plan bissecteur intérieur du dièdre formé par le plan F et par le plan du losange $IA'B'C'$ par exemple (dièdre contenant le décaèdre Δ) ; soit N ce point, et h sa distance au plan P et aux plans des losanges. Ce point N étant sur OI , sa distance aux plans des trapèzes est justement égale au rayon R de la sphère σ . Donc tout décaèdre Δ peut être décomposé en dix pyramides intérieures, ayant pour sommet commun N , six d'entre elles ayant pour hauteur commune R , les quatre autres ayant pour hauteur commune h , et le volume V de ce décaèdre quelconque Δ est égal à

$$V = \frac{R}{3} \cdot S_1 + \frac{h}{3} \cdot (S_0 + S_2),$$

son aire totale étant d'ailleurs $S = S_0 + S_1 + S_2$. Dès lors, la relation

$$V = \frac{R}{3} S \text{ équivaut à la condition } h = R, \text{ qui exprime que le point } N,$$

équidistant du plan P et des plans des losanges, coïncide avec le centre ω de σ , et par suite que le décaèdre Δ correspondant est circonscrit à σ .

Cette remarque, qui, bien entendu, n'était pas demandée aux candidats, fournissait un autre moyen de former l'équation en x correspondant aux décaèdres Δ circonscriptibles à une sphère, puisque les expressions de V et de S avaient été calculées dans la deuxième partie du problème.

Quant à la détermination des décaèdres Δ_0 admettant une sphère inscrite, elle se déduit immédiatement des résultats obtenus au début de la troisième partie, en cherchant ce que doivent être les longueurs a et l pour que le

système (5) admette comme solution, pour x , la valeur $x_0 = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ qui caractérise les décaèdres Δ_0 (avec l'hypothèse $l > \frac{a}{2\sqrt{2}}$). D'ailleurs la

discussion du système (5) avait déjà mis en évidence la valeur

$$l = a \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{a}$$

pour laquelle x_0 est justement solution (double) ; et il est facile de montrer que c'est le seul cas où il en est ainsi.

Du reste, cette étude peut être abordée autrement, en partant d'une remarque géométrique relative aux décaèdres Δ_0 : pour tous ces polyèdres, l'angle aigu du plan P de l'hexagone et du plan de l'une quelconque des

faces-losanges est un angle constant admettant pour tangente $\frac{1}{\sqrt{2}}$; donc,

en supposant fixé le côté a de l'hexagone, ces polyèdres Δ_0 ne diffèrent les uns des autres que par la longueur l des arêtes AA' , CC' , EE' ; autrement dit, tous les décaèdres Δ_0 construits sur un même hexagone, et d'un même

côté du plan P de cet hexagone, se déduisent les uns des autres par des translations parallèles à OZ (si l'on a fixé, bien entendu, le rôle des arêtes AA', BB', ... ; sinon interviendraient aussi certaines rotations autour de OZ). Il devient alors évident qu'il existe un seul de ces décaèdres Δ_0 circonscriptible à une sphère, qui ne peut être que la sphère σ déjà décrite : il correspond au plan tangent à la sphère σ , parallèle à la direction connue du plan de l'une des faces-losanges, et coupant les arêtes du prisme ayant l'hexagone donné comme section droite du côté du plan P où se trouve σ . Le point de contact M de ce plan et de σ se détermine aisément, en reprenant par exemple la figure déjà utilisée dans le plan de symétrie BB'EE' ;

l'angle aigu $\widehat{M\omega I}$ du triangle rectangle M ω I a pour tangente $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et pour

cosinus $\sqrt{\frac{2}{3}}$; la distance du point M au plan P est donc $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et sa distance à OZ est $\frac{a}{2}$; on retrouve ainsi le point H₂, qui est du reste le

centre du losange IA'B'C' dont le plan est tangent à σ .

Le volume V_0 et l'aire totale S_0 de ce décaèdre particulier Δ_0 vérifient naturellement la relation $V_0 = \frac{R}{3} S_0$, R étant le rayon de σ , et le volume V_1 et l'aire S_1 de σ vérifient également la relation $V_1 = \frac{R}{3} S_1$.

Les deux rapports $\frac{V_0}{V_1}$ et $\frac{S_0}{S_1}$ sont donc égaux et leur valeur commune se calcule facilement ; on trouve ainsi

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{S_0}{S_1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\pi}.$$

Le rapprochement, dans cette formule, des nombres π et $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ dont la différence est inférieure à 0,005, méritait sans doute d'être souligné ;

c'est pourquoi la comparaison de ce rapport et du nombre $\frac{3}{2}$ a été proposée à la fin du problème ; il s'agissait d'un calcul numérique bien simple, qui permettait d'obtenir, par deux opérations de division, l'encadrement de l'erreur commise en remplaçant ce rapport par $\frac{3}{2}$ entre les deux nombres

$$0,0021 \text{ et } 0,0023$$

Il n'était pas nécessaire, bien entendu, de connaître la « théorie des erreurs » pour traiter cette petite question.

La dernière partie du problème n'a été abordée que par une quarantaine de candidats, dont la plupart n'ont donné que quelques indications assez sommaires sur la sphère σ sans toucher valablement à la détermination des décaèdres Δ circonscriptibles à une sphère. Seules, une quinzaine de copies contiennent des éléments plus ou moins complets de la solution, les essais géométriques étant sensiblement plus nombreux que les essais algébriques. La question du rapport du volume à l'aire totale d'un décaèdre circonscrit a été traitée correctement dans six compositions, — ce qui n'est pas mal, — pour la fin d'une longue épreuve.

Dans l'ensemble, le problème comportait une importante partie algébrique, liée intimément aux questions de géométrie, et qui ne présentait pas de difficultés « techniques » particulières ; l'essentiel était d'avoir compris correctement les notions fondamentales, et de savoir conduire posément et raisonnablement un calcul, d'en assurer fréquemment le contrôle ainsi que l'interprétation géométrique. Le jugement de l'épreuve ne peut guère faire intervenir une distinction entre « algébristes » et « géomètres », distinction bien factice du reste, car algèbre et géométrie exigent les mêmes qualités d'esprit et d'initiative, les mêmes efforts de réflexion et d'imagination, pour qui tente de pénétrer assez avant, et convenablement, dans leur domaine.

Cent quarante-neuf candidats ont pris part au concours ; après double correction de chacune des compositions, un premier choix a été effectué et a permis de retenir trente-trois copies qui ont été revues en détail par tous les membres du jury.

Il serait assez vain de chercher à présenter une image valable de la physionomie du Concours en dressant une liste par ordre de mérite, établie en attribuant une note à chaque composition. Un tel tableau risquerait fort, du reste, de paraître décourageant pour celui qui en prendrait connaissance sans information préalable, et qui serait tenté de croire que les indications « chiffrées » décèlent une sorte de vérité absolue. Or, dans une épreuve de ce genre, tout à fait inhabituelle pour des jeunes gens dont la formation intellectuelle et scientifique n'est pas encore achevée, le comportement des candidats est fonction d'éléments très divers, et leurs connaissances mathématiques, qu'il s'agisse des faits, des idées, des méthodes, sont bien loin d'être seules en cause.

Cinq heures de travail continu, — la prise de contact avec un sujet assez complexe dont on ne saisira que progressivement la signification et la structure, quelles que soient les précautions prises dans le libellé de l'énoncé, — l'effort prolongé de réflexion qu'exigent la mise au point des résultats peu à peu acquis et leur coordination, indispensable pour aller de l'avant, — les qualités d'organisation que suppose la présentation en bonne forme d'une solution lentement ébauchée et dont la rédaction fait fréquemment apparaître quelque nouvelle perspective, d'abord inaperçue, suggérant d'autres voies possibles que l'on n'aura peut-être pas le temps d'explorer... : voilà, entre autres, quelques données, dans l'ordre matériel et dans l'ordre psychologique, qu'il ne faut pas oublier de prendre en considération pour apprécier la valeur des jugements portés sur les compositions du Concours général de Première. Que certains bons esprits, estimés comme tels, pour de sérieuses raisons, par ceux qui les connaissent, ne répondent point à l'attente de leurs maîtres, cela n'a rien de très surprenant et ne prouve rien quant à leur valeur intellectuelle. Il serait du reste intéressant de chercher à analyser avec soin les réactions de quelques candidats — de candidats choisis valablement, bien entendu — au cours de leur travail, et de tenter de déceler les difficultés de tous ordres qui ont pu gêner l'un ou arrêter l'autre à tel ou tel moment ; sans doute une

enquête de ce genre, menée par les professeurs auprès de ceux qu'ils ont désignés, pourrait fournir des renseignements fort utiles, soit qu'ils permettent à un élève de prendre conscience de certaines qualités, ou de certains défauts, soit qu'ils aient une valeur générale et qu'ils puissent ainsi constituer un thème de réflexion, nouveau ou renouvelé, dans le domaine sans limites de la pédagogie.

Pour donner de ce Concours une idée d'ensemble, il convient d'indiquer d'abord qu'une vingtaine de compositions ont paru à peu près complètement nulles, soit que l'on n'y trouve que de rares résultats insignifiants, soit qu'elles contiennent des erreurs graves portant sur les faits fondamentaux. Vient ensuite une masse importante, de quatre-vingt-dix copies environ, qui, si on voulait les coter dans l'absolu, en tenant compte de la totalité du problème, n'auraient guère obtenu que des notes comprises entre 2 et 6 sur 20, mais la plupart d'entre elles donnent sur tel ou tel point des parties de solutions correctes, parfois très convenables, permettant de penser que leurs auteurs se seraient fort honorablement comportés dans une épreuve de durée et de dimensions plus modestes. La quarantaine de compositions restantes forment le lot où se révèlent, avec des inégalités inévitables, à la fois des connaissances sérieuses, en général correctement assimilées, et certaines qualités d'esprit déjà affirmées. Les trente-trois copies retenues après une première sélection avaient toutes abordé valablement les deux premières parties du problème, et plus de la moitié d'entre elles la troisième partie ; le barème adopté pour l'appréciation finale correspondait à l'attribution des coefficients 1,2 et 2 respectivement pour les trois groupes de questions : algèbre, étude géométrique des décaèdres Δ et propriété de minimum, étude des décaèdres Δ circonscrits à une sphère. Le classement a placé en tête, nettement détachés, deux candidats que le jury n'a pas cru devoir séparer, bien que leurs compositions soient fort dissimilables, — l'une, très bien présentée, « agréable à lire », donnant une solution presque achevée pour des questions parmi les plus importantes et les plus délicates, mais avec des lacunes notamment à la fin des deuxième et troisième parties, — l'autre, plus complète, apportant des réponses convenables sur presque tous les points, mais moins fouillée dans le détail que la précédente, et manifestant parfois des fautes ou des insuffisances de fond et de forme ; ils ont été proposés tous deux pour un premier prix *ex-æquo*. Un troisième prix a été attribué à un candidat dont la copie, comparable aux deux premières pour plusieurs questions, était nettement moins complète. Cinq autres compositions, un peu moins bonnes que les précédentes, mais encore très satisfaisantes, ont été jugées dignes d'une récompense : un premier et un deuxième accessits, décernés à des travaux assez différents dans le détail, mais donnant, dans l'ensemble, l'impression de valeurs très voisines, et un triple troisième accessit accordé pour trois copies convenables, soit par un ensemble suffisant de résultats correctement établis, soit par le « fini » de quelques parties de la solution.

Pour donner, toujours avec les réserves déjà signalées, une appréciation chiffrée, sur 20, compte tenu de toutes les parties du problème, dont aucune

n'a été totalement laissée de côté, si l'on considère l'ensemble des compositions, les notes des huit lauréats peuvent se situer ainsi : 14,5 pour les deux premiers, 12 pour le troisième, 11,5 et 11 pour le premier et le second accessits, et 10,5 pour les trois accessits *ex-æquo*.

Quant aux vingt-cinq copies sélectionnées lors d'une première délibération et non retenues pour le palmarès, leurs notes s'échelonnaient entre 9,5 et 6 environ, avec un groupe assez compact de cinq, arrivant très près de la moyenne (9,5), puis quatre que l'on peut coter 9 ou 8,5, puis une dizaine entre 8 et 7 et le reste entre 7 et 6.

L'impression générale que l'on peut dégager des résultats de cette épreuve est donc satisfaisante ; elle est très comparable à celle que laissait le Concours de l'an dernier, malgré la différence assez marquée entre les types de problèmes proposés en 1950 et en 1951. S'agissant d'une épreuve qui ne doit pas et qui ne peut pas être vraiment « préparée », et qui demande, non d'avoir acquis, en classe ou hors de la classe, un certain vernis d'érudition, mais seulement des connaissances de base bien assimilées et effectivement « disponibles », cette appréciation favorable qui tient compte de l'ensemble des compositions, constitue une indication précieuse sur la qualité de l'enseignement d'initiation aux mathématiques donné dans nos établissements secondaires, y compris les Ecoles normales, — et sur la contribution de valeur qu'il apporte à l'œuvre de formation intellectuelle des jeunes gens qui le reçoivent.

A titre purement documentaire et anecdotique, j'ajouterai quelques remarques sur les lauréats et sur quelques-uns de leurs camarades ; elles ne comportent naturellement aucune conclusion et ne prétendent point fournir les éléments de je ne sais quelles comparaisons qu'il serait parfaitement ridicule d'instituer ; elles n'ont d'ailleurs aucune valeur dans l'ordre des « statistiques », car elles portent sur une « population » restreinte, sélectionnée et localisée ici ou là par l'effet de circonstances fortuites qui n'ont guère de rapports avec les événements de la vie scolaire. Un fait est digne d'être noté d'abord, pour l'histoire du Concours : une jeune fille figure au palmarès, pour la première fois depuis qu'a été rétablie, en 1946, l'épreuve de mathématiques pour les classes de Première ; Mlle Vannaële mérite d'autant plus cette mention spéciale qu'elle était, au lycée de jeunes filles de Montpellier, élève de Première A-B, et qu'elle a obtenu en même temps le premier prix d'italien au Concours général. Puis, un hasard assez curieux fait que les résidences scolaires des huit lauréats sont toutes situées à une latitude au plus égale à celle de Paris : Paris (deux fois), Lyon, Grenoble, Montpellier, Perpignan, Alger, Rabat ; on trouve d'ailleurs une très forte proportion de Parisiens dans le groupe d'une dizaine de candidats qui suivent de près les derniers cités. On peut aussi signaler que, sauf Mlle Vannaële, les lauréats étaient élèves de Première C (deux prix et trois accessits) et de Première Moderne (un prix et un accessit). Et il n'est pas sans intérêt d'établir une liaison avec la classe voisine : comme l'année dernière, au palmarès du Concours général pour les classes de Mathématiques en 1951 figurent en très bonne place (parmi les prix et les pre-

miers accessits), tant pour la composition de mathématiques que pour celle de sciences physiques, les noms de lauréats de l'épreuve de mathématiques de Première en 1950 : MM. Froissart, du Lycée Louis-le-Grand, Florent et Barra, tous deux du Lycée Thiers à Marseille, et Sajus, du Lycée de Pau.

J. DESFORGE,

Inspecteur général de l'Enseignement du Second Degré.
