

En Mathématiques Élémentaires

Conférence de M. SIROS, Professeur au Lycée Lakanal

Si nous nous rappelons les programmes d'arithmétique en Cinquième, Quatrième et Troisième, nous soulignons aussitôt la pauvreté des connaissances et des idées chez l'élève entrant en classe de Mathématiques Élémentaires en ce qui concerne cette discipline.

On peut juger qu'il est logique, en Mathématiques Élémentaires, de commencer par l'arithmétique, et comme l'algèbre doit se développer aussi dès le début, on est conduit à brancher les nombres relatifs sur les propriétés générales des opérations.

Le mois d'octobre est ainsi une période d'apprentissage de l'axiomatique.

Faisons quelques remarques où nous indiquerons les difficultés de cet enseignement, et qui seront l'occasion de poser quelques questions à nos collègues.

SUR L'ÉGALITÉ. — Elle est « réflexive, symétrique et transitive », dites-vous, mais, moi, élève de Mathématiques Élémentaires, je ne comprends pas le besoin de ce décortilage. Si elle n'était pas ainsi, ce ne serait plus l'égalité ! Et n'a-t-elle que ces qualités ? Ceci est très naïf, c'est toujours dire que « a » c'est « a » !

En effet, l'égalité, c'est souvent l'identité, et avec le « principe d'identité » on a plusieurs échantillons du même objet.

Quand nous précisons, nous, ces qualités, nous pensons en même temps une réciproque, nous *définissons* l'égalité, ou, plutôt, nous définissons une catégorie de « relations » qui ressemblent (à préciser) à l'égalité. L'élève conçoit-il cela ? Peut-être un peu, s'il pense aux fractions. Mais avant d'atteindre ce chapitre, nous aurons des occasions excellentes, par exemple, les mesures d'un angle : les nombres α et $\alpha + 2\pi$ — non égaux — mesurent le même angle, on peut les considérer comme égaux, mais alors attention à de purs mécanismes opératoires issus d'une analogie (multiplication et division) ; il faut se défier du langage ordinaire, par suite, il faut préciser complètement l'emploi de la *congruence*, « relation » à cultiver. Et comme deuxième exemple, prenons les théorèmes sur les restes (reste d'une somme, etc...) ; ici le reste perd son caractère $r < d$, et ces théorèmes se réduisent beaucoup plus simplement aux premiers résultats sur les congruences : $f(a, b, \dots) \equiv (f(a', b', \dots))$, f , opération entière, — énoncés combien plus aisés, et cette manière éveille beaucoup de curiosité.

La première question que je pose est donc : Que pensez-vous de l'usage systématique des congruences en Mathématiques Élémentaires, et peut-être même avant ?

On peut noter aussi que la conduite à observer quant à l'égalité au sein d'une famille d'éléments dépend de la façon dont ces éléments sont définis :

a) définition avec unicité (exemple : nombres naturels), l'égalité est définie implicitement en même temps que l'objet, — égalité = identité ;

b) définition sans unicité : l'élément a plusieurs déterminations, ou une infinité (fractions, vecteur libre). L'égalité doit être définie et justifiée par ses trois qualités.

SUR LES NOMBRES NATURELS ET L'ADDITION. — Un exposé rigoureux de l'arithmétique s'appuie sur les cinq axiomes de Péano ; c'est ce que fait M. MIRABEL. Dans cette façon de faire, le nombre est un numéro, on a une « numérotation ».

Si l'on veut obtenir le nombre cardinal, il faut donner la notion d'ensemble, définir la puissance : qualité commune attachée aux ensembles en correspondance biunivoque, on désigne par un mot chacun de ces qualités, et cela constitue la suite des nombres ; on sait compter, l'égalité est définie. (On peut remplacer les mots savants par : collection, mesure, correspondance parfaite, ce qui fait qu'on n'a pas l'air de s'engager dans une théorie réservée à l'enseignement élevé).

Alors la suite des nombres apparaît comme un objet expérimental tout fait, dont on va dégager quelques énoncés *suffisants* constituant une base axiomatique :

Définitions : 1) ajouter zéro ; — 2) ajouter 1 à a ; — 3) ajouter b à a (on « compte » le nombre des répétitions de « ajouter un »).

Postulats : 1) de détermination, sous deux formes :

{ on peut ajouter membre à membre deux égalités,
} réciproque : uniparité de l'addition ;

2) de commutativité $(a + b = b + a)$;

3) d'associativité $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Bien entendu le mathématicien critique ici le professeur de mathématiques : Vos postulats, Péano les démontre ! — Je sais, répond le professeur, mais je ménage mes élèves, je veux être suivi par la majorité d'entre eux, je craindrais de les rebuter par de longs développements, et Gonsseth, mathématicien, m'y autorise : tout en soulignant la beauté d'une base axiomatique *intègre*, il dit qu'une base surabondante est permise, cela ne nuit pas à la solidité de l'édifice, « l'intégrité de la base axiomatique reste à l'arrière-plan de nos préoccupations. C'est une exigence esthétique, désirable, non indispensable »... et il signale une autre préoccupation, la non contradiction, question difficile à régler.

Nous pouvons d'ailleurs remarquer que la définition de l'addition prise par Peano : $a + b + = (a + b) +$ (a plus le suivant de b égale le suivant de $a + b$) équivaut à un postulat d'associativité $a + (b + 1) = (a + b) + 1$, si l'addition a été définie autrement.

La deuxième question que je pose est alors : Est-il acceptable de faire en Mathématiques Élémentaires une « axiomatique tempérée », pourvu qu'on la présente honnêtement comme telle ?

Dans le même ordre d'idées je demande s'il n'est pas intéressant de cultiver la notion de *groupe* : aussitôt les nombres relatifs, dans les progressions, dans les congruences, la division des arcs, etc... et en géométrie pour ordonner l'enchaînement des chapitres ? Ne pourrait-on même faire

nieux et ne pas se borner à des exemples, entrer un peu dans le langage de l'algèbre moderne ?

SUR LA DÉFINITION. — Dans tout ce qui nous occupe il s'agit en somme de définitions. Mais comment définit-on ? — Pour répondre, permettez-moi de citer Paul Valéry : « Essayer de définir un nombre, c'est essayer de se mettre au point où l'on était *avant de savoir ce qu'est un nombre*, et en même temps *ne pas perdre ma connaissance actuelle du nombre*, et enfin passer de ce premier état d'ignorance au point actuel sans la revivre, mais en somme remplacer le tâtonnement... par un *procédé fini*, par un *système d'actes strictement suffisants* ; c'est un raccourci. » (*Tel quel*, tome II, p. 227).

Le rôle de la redécouverte est de rendre *consciente* cette double position, de faire en sorte qu'on ne se borne pas à énoncer ce système d'actes strictement suffisants (attitude un peu hypocrite), de faire sentir le besoin de ce raccourci.

Un exemple remarquable d'un tel raccourci, c'est le principe d'extension, nous voudrions le faire découvrir aux élèves.

Je vais prendre maintenant un exposé ancien et à peu près traditionnel de la leçon sur les nombres relatifs. Il suffit que nous nous bornions à en faire le plan.

I. RAPPELS. — 1) la soustraction $b - c = x$ est possible si $b \geq c$;

2) deux théorèmes sur la soustraction conduisent à la formule

$$a - (b - c) = a + (c - b)$$

dont les deux membres ont des existences contradictoires ;

3) on a défini les « polynômes arithmétiques » et donné leurs propriétés :

commutativité, chaque terme conservant son caractère additif ou sou-

stractif,

associativité, par exemple : $a - b - c \dots = a - (b + c) \dots$,

zéro est élément neutre.

II. DÉFINITION DES NOMBRES RELATIFS. — Si $b > c$, $b - c = x$, on pose

$b - c =$ nombre positif noté x , identique à x .

Si $b < c$, soit $c - b = x$, on pose $b - c =$ nombre négatif noté x .

Si $b = c$, $b - c = 0$.

Notation usuelle : si $b = 0$, en posant : zéro est élément neutre, on obtient :

dans la soustraction $0 - c = -c = c$; dans l'addition : $0 + c = +c = c$.

III. APPLICATIONS. — La formule $a - (b - c) = a + (c - b)$, donne :

si $b < c$: $b - c = -x$ ($x = c - b$), d'où :

$$a - (-x) = a + (+x) \text{ ou } a + x ;$$

si $b > c$: $b - c = +x$ ou x , et $c - b = -x$:

$$a - x = a - (+x) = a + (-x).$$

D'où : 1) la règle des « double-signes » : $-(+ \dots) = -$, etc... ;

2) l'écriture d'un polynôme arithmétique, sous forme de somme ; algèbre, et énoncé simple de la commutativité, et calcul toujours possible ;

3) la réduction de la soustraction à l'addition, définition de l'opposé d'un nombre ;

4) la règle d'addition : $(+a) + (+b)$ identique à $a + b$;

$a + (-x) = a - x$ avec deux cas : $a \geq x$, d'où la règle ;

$(-x) + a$ ramené à ce qui précède après commutativité ;

$(-x) + (-\beta)$ obtenu par l'associativité dans $a - x - \beta = a - (x + \beta)$.

IV. MULTIPLICATION. — Utilisons la distributivité :

1) $a(b - c) = ab - ac$, où nous supposons $b < c$: $b - c = -x$ ($x = c - b$) ; alors $ab < ac$, et $ab - ac = -(ac - ab) = -[a(c - b)] = -ax$. C'est la règle $(+a)(-x) = -ax$; $(b - c)a$ donne la règle $(-x)a = -xa$.

2) $(a - b)(c - d) = a(c - d) - b(c - d)$. Si $c < d$: $c - d = -\beta$ ($\beta = d - c$), le second membre s'écrit $a(-\beta) - b(-\beta)$ ou
 $-a\beta - (-b\beta) = b\beta - a\beta = \beta(b - a)$

et si $a < b$: $a - b = -x$ ($x = b - a$), on obtient βx . C'est la règle
 $(-x)(-\beta) = x\beta$.

On pourrait continuer par la « comparaison » et les règles sur les inégalités. Nous voulions seulement indiquer une façon de procéder — façon que l'on peut d'ailleurs critiquer pour diverses raisons — mais qui va nous servir de support aux commentaires suivants, faits avec la participation de la classe.

Je propose aux élèves de rechercher les points importants de ce qui précède, ce qu'il y a de nouveau, etc... Nous obtenons ainsi, par exemple :

1) la soustraction est rendue toujours possible grâce aux nouveaux nombres ;

2) on a adjoint les nombres négatifs aux nombres naturels, qui s'appellent maintenant nombres positifs ;

3) en ce qui concerne les règles de calcul, opinions variables : les élèves pensent qu'on n'a fait qu'utiliser un nouveau symbole pour interpréter et compléter les opérations connues, ou bien qu'elles sont démontrées comme des théorèmes d'arithmétique, mais en utilisant la définition nouvelle.

Dans les deux cas je souligne qu'on reconnaît bien la présence d'une définition, et je précise : Les nouveaux nombres, et les règles de calcul qui les accompagnent, sont des *définitions* :

a) nous avons défini en réalité l'ensemble des relatifs : positifs, négatifs, zéro ; ce qui est mieux qu'une juxtaposition des nombres négatifs aux nombres naturels,

b) mais on veut une *correspondance* (on va dire à quel point de vue) entre les positifs et les naturels,

c) ces règles de calcul sont bien des *définitions*, car, par exemple : $(-x) + (-\beta)$ n'avait pas encore d'existence ; sont-elles arbitraires ? — Non, elles sont suggérées par les propriétés des polynômes arithmétiques. Autrement dit, alors elles sont établies de manière à *posséder les propriétés générales* (commutativité, etc...), et comme on les applique à tous les relatifs, on veut que dans la correspondance indiquée plus haut l'addition et la multiplication soient respectées.

En résumé, nous avons une *construction* selon les exigences suivantes :

- 1) zéro est élément neutre vis-à-vis de l'addition ;
- 2) la soustraction est toujours possible ;
- 3) les opérations ont les propriétés générales ;
- 4) les relatifs contiennent un sous-ensemble, les positifs, qui s'ajoutent et se multiplient comme les nombres naturels ; on dit qu'il y a *isomorphisme* vis-à-vis de l'addition entre ces deux sortes de nombres.

Plus brièvement encore : cette méthode, appelée *méthode d'extension*, consiste en une construction imposée par

- { des règles de calcul,
- { un principe de *concordance*.

On peut terminer en disant qu'on aura à faire d'autres extensions, par exemple pour rendre la division toujours possible, et qu'on suivra alors très exactement cette méthode (sans redécouverte).

Résumons les questions que nous posons à nos collègues :

- 1) La redécouverte de l'axiomatique est-elle possible en Mathématiques Élémentaires, mieux encore : dans une classe antérieure ?
- 2) Usage des congruences, des groupes, des premières définitions sur les ensembles.

3) Une axiomatique non intègre est-elle acceptable, ou bien :

4) Doit-on faire le développement de Péano en Mathématiques Élémentaires ; un fragment du cours de Mathématiques Supérieures peut-il entrer en Mathématiques Élémentaires ?

5) Et enfin — là il faut insister beaucoup — si nous voulons pouvoir faire une arithmétique seulement un peu satisfaisante en Mathématiques Élémentaires, obtenons un changement dans le libellé du programme, qu'on ne nous inflige pas un début par la numération décimale, qu'on ne nous inscrive pas « notion de fraction ». Il faut que nous obtenions une autre rédaction.

J. SIROS,

Professeur au Lycée Lakanaï.