DEUXIÈME PARTIE

Axiomatique et Redécouverte

La notion de nombre dans l'enseignement En Mathématiques Supérieures

Conférence de M. MIRABEL, professeur au Lycée Saint-Louis

A. — PRÉAMBULE

Le but que s'est proposé notre Commission est de : « rechercher dans quelle mesure et à quel niveau une base axiomatique peut être donnée à notre enseignement ».

Nous nous proposons, M. SIROS et moi de montrer aujourd'hui que : au niveau des Mathématiques Elémentaires et des Mathématiques Supérieures, il est possible et important d'atteindre ce but dans le domaine de l'arithmétique et de l'algèbre.

Nous noterons, d'abord, que le professeur de philosophie en Mathématiques Elémentaires, va proposer à ses élèves de faire connaissance avec la Logique formelle. N'est-ce pas l'occasion de leur en donner une application pratique ? Tout notre cours de Mathématiques Supérieures, qui vient ensuite a pour but de préciser les connaissances antérieures et d'inculquer à nos élèves le souci de la rigueur. Ne devons-nous pas d'abord leur en donner l'exemple ?

L'analyse, qui va être l'objet de leurs études ultérieures, est essentiellement fondée sur la notion de « *nombre* ». L'analytique, qui leur sera concurremment développée, l'est sur celle de « *vecteur* ». Ne faut-il pas reprendre ces notions et les asseoir sur une base *solide ?*

Par ailleurs, si l'arithmétique en Elémentaire est considérée comme un chapitre mineur et peu intéressant du programme, n'est-ce pas parce que l'élève a le sentiment d'être appelé à reprendre des raisonnements déjà faits depuis longtemps et qu'il croit bien connaître. Il n'y trouve qu'une révision qui lui semble superflue et fastidieuse. Il s'y intéresserait bien davantage s'il y découvrait du nouveau, et quel nouveau !...

Enfin, ne faut-il pas que cesse ce paradoxe qui atteint bien de nos propositions : en Seconde on lui dit : « On vous la démontrera plus tard » ; en Mathématiques Elémentaires : « On vous a démontré cela autrefois. » Et chacun accepte, tacitement, d'en rester là !

Mon but est de démontrer : qu'à partir de définitions clairement précisées, de principes bien mis en évidence, on peut éclairer complètement les notions de nombre et de vecteur et parvenir ainsi, en Mathématiques Supérieures, jusqu'au nombre complexe, et à l'algèbre linéaire, dont l'importance devient chaque jour plus grande.

Il ne nous sera pas possible, dans cette brève conférence, de tout développer. Nous nous contenterons de tracer le cadre et de développer un des chapitres que nous avons choisi dans la partie commune aux deux classes : celui qui concerne le corps des nombres réels.

Je rappellerai que : tout ce qui concerne la notion de nombre peut être extrait de la conférence faite par M. CHATELET, à Sèvres, il y a deux ans ; — tout ce qui concerne la notion de vecteur est inclus dans les ouvrages de M. LICHNEROVITZ : *Calcul vectoriel*, chez A. Colin, et *Algèbre linéaire*, chez Masson.

Ces deux maîtres nous ont tracé la voie. Il nous appartient, à nous, de la suivre.

B. — GÉNÉRALITÉS

Le point de départ sera pris dans la définition d'un ensemble due à Cantor : *réunion en un tout d'objets de notre intuition ou de notre pensée, bien déterminés et différentiables les uns des autres.*

Quelques généralités suivront. Détermination d'un ensemble : 1) Loi de formation. — 2) Relation d'égalité : réflexive, symétrique, transitive.

Lois de composition ou opérations internes : elles associent à tout couple x, y, un élément z : $x + y = z$. Elles doivent être : déterminées, unipares. Elles peuvent être : associatives, commutatives. L'une peut être distributive par rapport à l'autre.

Opérations inverses : notion essentielle. Parfois impossible dans l'ensemble.

Cette impossibilité partielle pose le problème de *l'extension*. C'est l'application du *principe* d'extension qui va nous permettre, partant de :

l'ensemble E_0 des nombres entiers dans lequel les opérations inverses de l'addition, de la multiplication, de l'exponentiation, sont parfois impossibles ;

de créer l'ensemble E_1 des nombres rationnels dans lequel le quotient devient toujours possible ;

puis : l'ensemble E des nombres absolus dans lequel l'extraction des racines est devenue toujours possible ;

puis : l'ensemble $\mathfrak{G}$ des nombres réels dans lequel la soustraction est devenue toujours possible, mais où l'extraction des racines est redevenue parfois impossible ;

enfin : l'ensemble $\mathfrak{G}'$ des nombres complexes où toutes ces opérations sont devenues toujours possibles.

Un même thème se reproduira dans chaque cas avec les variations qui s'imposent et ceci montrera bien l'unité de la notion de nombre.

Ce même thème sera repris en Mathématiques Supérieures sur la notion d'espace vectoriel abstrait, à 1, 2, 3, ...n, développé et appliqué à l'espace euclidien.

Tout est donc dominé par : 1° le principe d'extension ; 2° cette idée générale que les propriétés d'un ensemble sont faites par les lois de composition.

Principe d'extension. — Un ensemble E est donné d'éléments $(a, b, \ldots)$. Dans cet ensemble sont définies une égalité et des opérations : *, ... Une des opérations inverses au moins est parfois *impossible*. L'ensemble $\mathfrak{E}$ étendu formé d'éléments $(\alpha, \beta, \gamma \ldots)$. Chaque élément est issu d'un couple d'éléments de E (a, b) qui ne jouent pas le même rôle. Une égalité est définie dans $\mathfrak{E}$ pour assurer sa détermination. A toute opération * définie dans E, on associe une opération notée * et dénommée de même définie dans $\mathfrak{E}$ qui possède les mêmes propriétés.

Il existe dans l'ensemble $\mathfrak{E}$ un sous-ensemble $\overline{E}$ $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots)$ isomorphe à l'ensemble E avec conservation des lois.

Les définitions doivent être telles que si : $\overline{a} * \overline{b} = \overline{e}$ dans $\overline{E}$, on ait : $a * b = c$ dans E.

Enfin, à l'une au moins des opérations inverses définies dans E et parfois impossible dans cet ensemble est associée dans $\mathfrak{E}$ une opération définie de même et devenue toujours possible dans $\mathfrak{E}$. Tel est le thème.

Je vais, par exemple, supposer étudiés : l'ensemble des entiers E_0 ; l'ensemble des nombres rationnels E_1 : extension de E_0 ; l'ensemble des nombres absolus E : extension de E_1 et créer l'ensemble $\mathfrak{E}$ des nombres réels.

La soustraction, en général impossible dans l'ensemble E des nombres absolus, sera toujours possible dans l'ensemble des nombres réels : tel est le but de cette extension nouvelle.

E	$\overline{E}$	$\mathfrak{E}$
$a, b, c \ldots\ldots$	$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \ldots\ldots$	$\alpha, \beta, \gamma,$
$a * b = c \ldots\ldots$	$\overline{a} * \overline{b} = \overline{c}$	$\alpha * \beta = \gamma$
$c \xi a = b$ Si $c > a$	$\overline{c} \xi \overline{a} = b$	$\gamma \xi \alpha = \beta$
Opération inverse ξ impossible sans E dans certains cas.		Opération inverse ξ toujours possible dans $\mathfrak{E}$.

Ensemble des nombres réels $\mathfrak{E}$

Extension de l'ensemble des nombres absolus. — Dans l'ensemble des nombres absolus la soustraction peut encore être parfois impossible. Il faut donc en réaliser une « *extension* » et créer un nouvel ensemble dans lequel cette opération sera toujours possible. Ce but imposera les définitions des règles opératoires dans le nouvel ensemble.

Définition de l'ensemble des nombres réels. — Nous appellerons : nombre réel *tout élément formé d'un couple de deux nombres absolus* (a, b) *rationnels ou non, appelés à jouer un rôle différent.*

Dans cet ensemble, un sous-ensemble $\overline{E}$ sera constitué par les nombres réels de la forme (a, o). Il sera vérifié *isomorphe avec conservation des lois* de l'ensemble E des nombres absolus : $a, \ldots$ Il y a visiblement déjà correspondance *biunivoque* entre l'élément (a, o) de $\overline{E}$ et l'élément a de E.

Conditions à réaliser dans l'extension. — Les règles adoptées dans le nouvel ensemble doivent s'appliquer à l'ensemble $\overline{E}$ et par isomorphisme à l'ensemble E des nombres absolus. Or, dans cet ensemble : si $a>b$ et $a'>b'$, c'est-à-dire $a=b+c$ et $a'=b'+c$, on aura :

1° $a+b'+c'=a'+b+c$. Pour que $c=c'$, il faudra que

$$a+b'=b+a'.$$

2° $a+a'=(b+b')+(c+c')$. Donc $c+c'=(a+a')-(b+b')$.

3° $aa'+bb'=(ab'+ba')+cc'$. Donc $cc'=(aa'+bb')-(ab'+ba')$.

Le but recherché sera : $(a, b)=(a, c)-(b, o)$ qui met en évidence le rôle des deux nombres a et b dans le couple (a, b).

Les relations vont motiver nos définitions.

Egalité. — *Deux nombres réels* (a, b) *et* (a', b') *seront dits égaux et l'on notera cette relation* $(a, b)=(a', b')$ *si, et seulement si :* $a+b'=b+a'$. Cette relation est visiblement : *réflexive, symétrique et transitive.* On notera que $(a, a)=(o, o)$, ce nombre sera dit : zéro, et note : o.

L'ensemble & des nombres réels est donc déterminé.

Eléments canoniques. — Il existe dans & une infinité de sous-ensembles constitués par des éléments égaux. Dans chacun d'eux existe un élément de la forme (a, o) ou (o, b) ou (o, o).

Le sous-ensemble constitué par les *éléments de la forme* (a, a) qui contient (o, o) est formé de *nombres nuls : o* en est *l'élément canonique.*

Tout élément (a, b) *dans lequel* $a>b$ donc tel que : $a=b+\alpha$ fait partie du sous-ensemble qui contient l'élément (α, o).

On a, en effet : $a=a+o=b+\alpha$, donc $(a, b)=(\alpha, o)$. Nous le noterons : $*\alpha$.

Un tel élément est dit positif. L'élément canonique qui lui est égal est noté : (α, o) où $.\alpha$ *est sa valeur absolue.*

Tout élément (a, b) dans lequel $a<b$ donc tel que : $a+\beta=b$ fait partie du sous-ensemble qui contient l'élément (o, β).

On a, en effet : $a+\beta=b+o$. Donc, $(a, b)=(o, \beta)$. Nous le noterons $_*\beta$.

Un tel élément est dit négatif. L'élément canonique qui lui est égal est noté : (o, β), où $.\beta$ *est sa valeur absolue.*

L'ensemble comprend donc : des nombres nul : o ; des nombres positifs : $(\alpha, o)=*\alpha$; des nombres négatifs $(o, \beta)=_*\beta$.

Addition. — *On appelle somme de deux nombres réels* (a, b) et (a, b) *le nombre réel* $(a+a, b+b)$ *et l'on note cette opération :*

$$(a, b)+(a', b')=(a+a', b+b').$$

Cette opération est visiblement : *déterminée, unipare, commutative et associative,* ce qui n'est pas le cas dans la voie classique.

Etant déterminée on peut remplacer dans cette opération chaque élément par l'élément canonique qui lui est égal.

1° *Somme de deux nombres positifs.* — Soit : (a, b) avec $a>b$ donc $a=b+c$; (a', b') avec $a'>b'$ donc $a'=b'+c'$.

On a $(a, b)=(c, o)=*c$, $(a', b')=(c', o)=*c'$, donc :

$(a, b) + (a' b') = (c, o) + (c', o) = (c + c', o) = {}^*(c + c') = {}^*c + {}^*c'$.
donc : *La somme de deux nombres positifs est un nombre positif dont la valeur absolue est la somme des valeurs absolues des nombres donnés.*

2° *Somme de deux négatifs.* — Soit : (a, b) avec $a<b$, donc $a + c = b$. (a', b') avec $a<b$, donc $a' + c' = b'$.

On a $(a\ b) = (o, c)$, $(a', b') = (o, c')$, donc
$(a, b) + (a', b') = (o, c) + (o, c') = (o, c + c') = {}_*(c + c') = {}_*c + {}_*c'$,
donc : *La somme de deux nombres négatifs est un nombre négatif dont la valeur absolue est la somme des valeurs absolues des nombres donnés.*

3° *Somme de deux nombres réels de caractère différent.* — Soit (a, b) avec $a>b$, donc $a = b + c$, (a', b') avec $a'<b'$, donc $a' + c' = b'$.

On a $(a, b) = (c, o) = {}^*c$, $(a', b') = (o, c') = {}_*c'$, donc

$$(a, b) + (a', b') = (c, c'),$$

si $c>c'$, donc $c = c' + d$, la somme est : $(d, o) = {}^*d$; si $c<c$, donc $c + d = c'$ la somme est : $(o, d) = {}_*d$.

La somme de deux nombres réels de caractère différent a même caractère que celui des deux nombres qui a la plus grande valeur absolue. Sa valeur absolue est la différence des valeurs absolues des nombres donnés.

4° $(o, o) + (c, o) = (c, o) = {}^*c$; $(o, o) + (o, c) = (o, c) = {}_*c$; $(o, o) + (o, o) = (o, o) = 0$.

5° *Nombres opposés.* — *Deux nombres réels sont dits « opposés », s'ils ont la même valeur absolue et des caractères différents.* Donc

$${}^*c + {}_*c = (c, o) + (o, c) = (c, c) = (o, o).$$

La somme de deux nombres opposés est nulle. Ainsi se trouve démontrée la mystérieuse règle d'addition des nombres réels utilisée comme définition dans la méthode classique.

Soustraction. — *Etant donné deux nombres réels (a, b) et (c, d), nous appellerons différence de ces deux nombres et noterons : $(a, b) - (c, d)$ le nombre x tel que : $(a, b) = (c, d) + x$.*

Théorème : La soustraction est donc toujours possible dans $\mathfrak{C}$.

En effet : soit (ξ, η) un nombre tel que $(a, b) = (c, d) + (\xi, \eta)$. Il faudra que $a, b = (c + \xi, d + \eta)$. Donc $a + d + \eta = b + c + \xi$. Donc

$$(\xi, \eta) = (a + d, b + c).$$

Cette condition nécessaire est visiblement suffisante.

Théorème : $(a, b) = (a, o) - (b, o) = {}^*a - {}^*b$.

En effet : ${}^*a - {}^*c = (a, o) - (b, o) = (a + o, o + b) = (a, b)$.

Théorème : Si $\overline{\beta}$ est l'opposé de β : $\alpha - \beta = \alpha + \overline{\beta}$.

En effet : $(\alpha + \overline{\beta}) + \beta = \alpha + (\overline{\beta} + \beta) = \alpha + o = \alpha$.

C'est la règle usuelle de soustraction des nombres réels.

Multiplication. — *Nous appellerons produit de deux nombres réels (a, b) et (a', b'), le nombre réel $(aa' + bb', ab' + ba')$. Note : $(a, b).(a', b')$.*

Si l'on applique cette définition aux éléments canoniques égaux aux deux nombres donnés :

$$(c, o).(c', o) = (cc', o) \text{ ou } {}^*c \,.\, {}^*c' = {}^*cc'$$
$$(o, c).(o, c') = (cc', o) \qquad {}_*c \,.\, {}_*c' = {}^*cc'$$
$$(c, o).(o, c') = (o, cc') \qquad {}^*c \,.\, {}_*c' = {}_*cc'$$

Le produit de deux nombres réels est un nombre réel qui a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues. Il est positif si les deux nombres ont le même caractère ; il est négatif si les deux nombres ont un caractère différent.

Cas particuliers : $x.o = (a, b).(o, o) = (o, o) = o,$

$$x'.1 = (a, b).(1, o) = (a, b) = x.$$

C'est la mystérieuse règle usuelle de la multiplication qui se trouve ainsi démontrée.

Théorème : La condition nécessaire et suffisante pour qu'un produit de deux nombres réels soit nul est que l'un au moins des deux nombres soit nul.

Conséquences : $(a, o).(1, o) = (a, o)$, ou : ${}^*a.{}^*1 = {}^*a,$

$(a, o).(o, 1) = (o, a),$ ${}^{*}a.{}_{*}1 = {}_{*}a$

$(o, a).(o, 1) = (a, o),$ ${}_{*}a.{}_{*}1 = {}^{*}a$

Théorème : La multiplication des nombres réels est : déterminée, unipare, commutative, associative. Vérification immédiate.

Théorème : La multiplication des nombres réels est distributive relativement à l'addition. Vérification immédiate.

Opération inverse de la multiplication : quotient. — Le quotient du nombre réel α par le nombre réel β tel que : $\alpha = \beta\xi$ on notera : $\frac{\alpha}{\beta}$.

Si $\alpha = (a, b)$, $\beta = (c, d)$, $\xi = (x, y)$. Il faut que :

$$(a. b) = (c, d).(x, y) = (cx + dy, dx + cy),$$

ou, en utilisant la condition d'égalité : $a + dx + cy = b + cx + dy$, ou : $x - y = \frac{b-a}{d-c}$ à condition que $d \neq c$, cette relation pouvant s'écrire aussi si cela est nécessaire : $x - y = \frac{a-b}{c-d}$ ou $y - x = \frac{a-b}{c-d}$ ou $y - x = \frac{b-a}{d-c}$.

Cette condition nécessaire est suffisante. Diviseur non nul. *C'est la condition* pour que le quotient soit *déterminé.*

Sous la forme conique l'on trouve immédiatement la règle usuelle :

$$(c, o) : (d, o) = \left(\frac{c}{d}, o\right) \text{ ou } {}^*c : {}^*d = {}^*\frac{c}{d}$$

$$(c, o) : (o, d) = \left(o, \frac{c}{d}\right) \qquad {}^*c : {}_*d = {}_*^*\frac{c}{d}$$

$$(o, c) : (d, o) = \left(o, \frac{c}{d}\right) \qquad {}_*c : {}^*d = {}_*^*\frac{c}{d}$$

$$(o, c) : (o, d) = \left(\frac{c}{d}, o\right) \qquad {}_*c : {}_*d = {}^*\frac{c}{d}$$

Puissances : Définition usuelle. On a évidemment : Si n est entier positif : $({}^*a)^n = {}^*a^n$ avec : $({}_*a)^n = ({}_*1)^n ({}^*a)^n = ({}_*1)^n.{}^*a^n$.

Et : $({}_*1)^{2n} = {}^*1 \quad ({}_*1)^{2n+1} = {}_*1.$

Donc : toute puissance, paire d'un nombre réel, est positive.

Racine n : Un nombre réel a étant donné, la racine n^e serait le nombre réel x tel que : $x^n = a$. Mais si n est pair $x^n > 0$. L'opération est donc impossible en ce cas si $a > 0$.

L'opération inverse de l'exponentiation n'est donc pas toujours possible dans l'ensemble des nombres réels.

Une nouvelle extension sera nécessaire.

Relations d'ordre. — Quand a et b sont des nombres absolus nous avons vu que : $a>b$ a pour conséquence que $a-b$ existe et est un nombre absolu considéré par suite comme supérieur à zéro, parce que $c=o+c$. On a montré que : $a>b+c$ entraîne $a-b>c$; $a<b+c$ entraîne $a-b<c$, lorsque cette opération est possible. Il en résulte en particulier que : $a>b \rightarrow a-b>o$, mais l'on ne peut rien déduire de $a<b$ en ce cas. *Par extension on dira que* $*c>o$ et $_*c<o$ *par définition.* Et aussi, par extension, on dira que, *par définition* : $a>b$ si $a-b>o$; $a<b$ si $a-b<o$, *a et b étant deux nombres réels quelconques.*

Cette relation a symétrique est transitive :

$a>b$ et $b>c$ entraîne en effet : $a>c$

Démonstration immédiate

Il importerait grandement de supprimer toute opération sur des équations ou des inégalités ou inéquations qui sont des circonstances.

Cela amènerait : 1) à chercher des zéros de l'expression : $a-b$, au lieu de résoudre l'équation : $a-b=o$; — 2) à chercher le signe de l'expression : $a-b$, au lieu de résoudre l'inéquation : $a-b>o$ ou $a-b<o$.

Se trouveraient ainsi supprimées ces opérations qui conduisent la plupart du temps à des fautes graves : multiplication des deux membres d'une équation ou inéquation par un facteur ; — passage avec changement de signe d'un membre à l'autre d'une telle relation d'un terme qui figure dans l'une de ces expressions ; — chasser les dénominateurs, etc...

Pour résoudre : $\frac{a}{d}<\frac{c}{d}$ on chercherait le signe de $\frac{a-c}{d}$ ou ses zéros et les précautions à prendre apparaîtraient. Et les relations entre les équations : $a=b$ et $a^2=b^2$, où les inéquations : $a>b$ et $a^2>b^2$ deviendraient les relations entre les zéros ou les signes des expressions : $a-b$ et a^2-b^2 qui pourraient être aisément étudiés et sans erreur.

Notation classique des nombres réels. — Nous avons posé $(c, o)=*c$ et $(o, c)=_*c$ et nous avons vu que $*c=(c, o)=o+(c, o)$

$$_*c=(o, c)=o+(o, c)=o-(c, o).$$

D'autre part, la règle de *soustraction* permet de remplacer cette opération par une *addition*. Aucun signe opératoire n'est donc nécessaire pour indiquer celle-ci, les autres opérations : multiplication et quotient ayant leurs signes respectifs : . et —.

L'isomorphisme entre les nombres (c, o) et les nombres absolus c a permis de les confondre occasionnellement sans inconvénient : $(c, o)=c$. On a pu écrire : $*c=o+c$ et $_*c=o-c$. D'où le zéro jouant un rôle passif : $*c=+c$ $_*c=-c$. C'est la *notation usuelle*. Elle est complétée par le symbole $|c|$ pour désigner la valeur absolue du nombre réel c.

Elle permet de lire la suite opératoire : $+3\ -5\ +7\ -2$, soit : $*3+_*5+*7+_*2$ en rétablissant le signe + opératoire de l'addition.

Soit : $*_3 - *_5 + *_7 - *_2$. En écrivant : $*_1 = +1$ $*_1 = -1$, on écrira $+3 = (+1).(+3)$; $-7 = (-1).(+7) = (+1).(-7)$.

La confusion des signes + et — opératoires de l'addition et de la soustraction avec les signes + et — distinstifs des caractères des nombres réels qui eût été très regrettable dans les paragraphes précédents, se trouve ne plus avoir maintenant aucune importance.

Là est la raison du choix de la notation classique des nombres réels.

Applications : Comme cela aura été fait antérieurement pour les ensembles E_0, E_1, E on montrera que l'ensemble des nombres réels est un instrument utile aux mathématiciens, ces nombres, s'y révélant, comme dans les cas précédents, comme des « opérateurs ».

Dans cet ordre d'idées, seront créés, sur l'ensemble des nombres réels, les « Espaces vectoriels » à 1, 2, ... *n*, dimensions et il en sera fait application à l'Espace euclidien.

Ce sera le début de l'algèbre linéaire qui, en Mathématiques Supérieures, dans la voie tracée par M. Lichnerovicz dans les ouvrages ci-dessus rappelés, conduira tout naturellement au calcul vectoriel, aux Déterminants, aux Equations et formes linéaires, à la Géométrie analytique.

D. — Conclusion

Tel est l'aspect théorique de la question.

Quel en est l'aspect pédagogique pratique ? Je crois que, selon ce schéma, pourrait être développée la première partie du programme d'Arithmétique et d'Algèbre de Mathématiques Elémentaires : nombres entiers, rationnels et réels et applications aux Vecteurs de l'Espace euclidien linéaire, à deux et trois dimensions.

Le professeur de Mathématiques Supérieures n'aurait plus qu'à terminer.

On notera que, à aucun moment, on ne s'écarte du programme actuel. Il faudrait toutefois renvoyer à la fin du cours d'Arithmétique, la numération et l'exécution des opérations dans le système de numération choisi. Il serait aisé, alors, de rendre ces paragraphes plus intéressants.

Est-il possible, pratiquement, de faire un tel développement en Mathématiques Elémentaires ? Evidemment, il ne peut donner lieu à bachotage et le but est « non de faire retenir le détail », mais seulement des « idées générales ». *Leur petit nombre et leur constante utilisation sous les mêmes formes doivent conduire au résultat.* Il suffit de prendre garde de n'employer que « très peu » de mots nouveaux. L'exposé sur les nombres entiers peut d'ailleurs être fait de façon « *concrète* » avec les mêmes mots en utilisant les « *collections d'objets* » comme éléments de l'ensemble E et non les « *objets* ». Car en ce dernier cas, le nombre entier est lié à la « puissance » de l'ensemble étudié et il ne semble pas qu'il y ait un intérêt quelconque à introduire cette notion nouvelle bien plus difficile et délicate. Le rôle passif du caractère concret de ces éléments apparaîtra très vite et il sera aisé de s'en débarrasser.

Ce qui pourrait différencier les exposés dans les deux classes serait, qu'en Mathématiques Elémentaires on irait du concret, qui serait « préambule » à l'abstrait qui serait « final », alors qu'en Mathématiques Supérieures on partirait directement dans l'abstrait et on appliquerait au concret.

Cela peut être conçu différemment. M. SIROS se propose de vous le montrer. Si le but est atteint, si les élèves qui nous arrivent en Mathématiques Supérieures ont senti le besoin de revenir sur le passé pour l'asseoir définitivement sur une base axiomatique solide et ne se contentent plus d'habitudes acquises par mimétisme (et elles ne sont, souvent, même pas acquises), le professeur de Mathématiques Supérieures pourra remplir son rôle avec plus d'aisance et d'efficacité.

H. MIRABEL,

Professeur de Mathématiques Supérieures
au Lycée Saint-Louis.

Note de M. MAILLARD

Hypothèses : Ensemble de nombres $a, b, \ldots$ dans lequel est défini :

une addition commutative et associative ;

une multiplication : distributive à droite et à gauche relativement à l'addition : $a(b+c) = ab + ac$ et $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$.

Conclusion : La multiplication envisagée est commutative si l'on suppose l'axiome d'Archimède.

1° n entier, a quelconque :

$$an = a(1+1+\ldots+1) = a+a+\ldots+a \quad \text{(Dist}^{\text{te}} \text{ à droite)}$$
$$na = a+a+\ldots+a \quad \text{(Dist}^{\text{te}} \text{ à gauche)}$$

Donc : $an = na$.

2° n quelconque, a quelconque : supposons, que, par exemple :

$$a>0 \quad b>0 \quad ab-ba>0.$$

Soit c tel que : $(a+b+1)c = ab-ba$ et d tel que : $d>0$, $d<1$, $d<c$.

D'après l'axiome d'Archimède, il existe m et n entiers tels que :

$$md<a\leqslant(m+1)d \; ; \quad nd<b\leqslant(n+1)d.$$

$ab\leqslant mnd^2+(m+n+1)d^2 \quad ba>mnd^2 = nmd^2$ (d'après 1°).

Donc : $ab-ba<(m+n+1)d^2<ad+bd+d^2<(a+b+1)d.$

Et comme : $d<c$: $ab-ba<(a+b+1)d<(a+b+1)c.$

Or : $(a+b+1)\,c = ab-ba$, par définition de c. Contradiction.

Il ne peut donc exister $c \neq 0$ tel que : $ab-ba=(a+b+1)c$.

Donc : $ab = ba.$ C.Q.F.D.

R. MAILLARD,

Professeur de Mathématiques Spéciales
au Lycée Charlemagne.