

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Publication trimestrielle

Administration : 7, rue Pasteur, Saint-Cloud (S.-et-O.)

SOMMAIRE

PREMIÈRE PARTIE

- I. Document officiel : *Agrégation féminine de Mathématiques 1951*. Rapport de M. l'Inspecteur général DESFORGE, Vice-Président du Jury 199
- II. Assemblée générale du 6 avril 1952 :
 1. *Compte rendu financier* (P. LEGRAND, S. MINOIS) 232
 2. *Le nouveau C.A.P.E.S.* (C. CANONGE) 234
 3. *Examens et Concours 1951* : B.E., B.E.P.C., E.N. (M. EDDE) .. 236
 4. *Définitions et Notations* (Y. CROZES) 241
 5. *Axiomatique et Redécouverte* (Y. CROZES) 242

DEUXIÈME PARTIE

- H. MIRABEL : *La notion de nombre dans l'enseignement* (Math. Sup.) ... 244
 R. MAILLARD : *Note sur la conférence de M. MIRABEL* 252
 J. SIROS : *La notion de nombre dans l'enseignement* (Math. Elém.) 253
 J. ITARD : *Histoire des Mathématiques* 257
 Avis : *Groupe de travail des Professeurs de Mathématiques* 258

Cotisations : 400 fr.

Abonnements : 600 fr.

3 bis, Avenue R.-Poincaré, Margny-les-Complègne (Oise)

Expédition des Bulletins : 29, rue d'Ulm, Paris 5^e

Abonnement d'un an au Bulletin (prix net) : France 600 fr.

Prix d'un numéro du Bulletin ou d'un Supplément (prix net) : France. 80 fr.

Les membres de l'Association (cotisation : 400 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le Bulletin ainsi que les *Fascicules d'Enoncés*.

Régler par chèque postal en utilisant l'adresse suivante :

Paris, Cc. 5708-21

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5^e)

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD
GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU
Professeurs au Lycée de Grenoble

Programmes du 18 avril 1947

Tarif juin 1951

Arithmétique 6°	190	»
Dessin Géométrique 6° et 5°	80	»
Géométrie 5° et 4°	280	»
Arithmétique 5°	200	»
Arithmétique et Algèbre 4°	220	»
Arithmétique et Algèbre 3°	260	»
Géométrie 3°	240	»
Compléments d'Algèbre et de Géométrie Géométrie 3° Moderne court	160	»
Algèbre 2° A.B.C.M.	390	»
Géométrie 2° A.B.C.M.	390	»
Algèbre 1 ^{re} A.B.	180	»
Algèbre et Trigonométrie 1 ^{re} C.M.	390	»
Géométrie 1 ^{re} A.B.C.M.	390	»
Questions de Cours de Mathématiques du Baccalauréat, 1 ^{re} partie, A.B.C.M.	225	»

MATHÉMATIQUES

Ouvrages conformes aux nouveaux programmes

A PARAÎTRE JUIN 1952 :

LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Quatrième.

L'ouvrage débute par l'étude des puissances des nombres arithmétiques et son application à la théorie de la décomposition en facteurs premiers, du P.G.C.D. et du P.P.C.M. L'initiation à l'algèbre utilise des exemples concrets d'où émanent des schémas conduisant à la relation de Chasles, souvent utilisée par la suite, afin d'habituer les élèves.

Dans la partie réservée à la géométrie, la simplicité a été recherchée, de même que la mise en relief des réciproques. Un grand nombre d'exercices et de problèmes ont été classés par ordre de difficulté, avec renvoi aux différents paragraphes du cours, ainsi que dans tous les ouvrages de la collection.

Enfin, quelques solutions types, complètement rédigées, fourniront aux élèves les techniques fondamentales pour la résolution de certains problèmes classiques qui ne sont pas une application immédiate du cours.

Edition Lycées et Collèges, 1 vol. br. : , cart. :
Edition, Cours Compl. et Enseignement court, 1 vol., br. : , cart. :

SPECIMEN GRATUIT SUR DEMANDE

LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Sixième.

L'ouvrage, conforme au programme de 6^e, est divisé en 26 chapitres, permettant ainsi une répartition facile du travail à raison d'une leçon par semaine en moyenne. Un résumé rappelant les principaux résultats termine la plupart des chapitres.

En plus de la mise au point des méthodes de calcul et du rappel des bases du système métrique déjà étudié antérieurement, les auteurs se sont efforcés de faciliter aux élèves l'acquisition des méthodes de résolution des problèmes en les classant suivant des types déterminés et en utilisant très tôt les règles de trois. Le choix des problèmes est très varié. Ils sont précédés d'une lettre : A, pour les applications immédiates du cours, B, pour les problèmes normaux de devoirs, C, pour les exercices plus difficiles. Le contact étroit entre le cours et les exercices d'application est assuré par des renvois placés à la fin de chaque paragraphe. Les données numériques ont été adaptées aux cours actuels. Les notations abrégées utilisées pour les unités du système métrique sont conformes au décret du 28 février 1948.

Edition Lycées et Collèges Br. : 250 f., cart. 350 f.
Edition Cours Complémentaires Br. : 270 f., cart. 370 f.

LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Cinquième.

L'exposé des opérations sur les nombres entiers, décimaux et fractionnaires, a été fait avec clarté et avec le souci constant de mettre en évidence les propriétés des sommes, différences, produits et quotients, appliqués ensuite aux résolutions des problèmes d'arithmétique, l'inconnue étant remplacée par une lettre. L'initiation à la géométrie, tout en restant concrète, fait ressortir l'articulation du raisonnement.

675 exercices (805 pour l'édition Cours Complémentaires) classés selon le degré de difficulté, rattachés à chaque paragraphe du cours, permettent d'en vérifier la compréhension, la solution de certains exemples-types facilitant l'acquisition des méthodes de résolution. Chaque chapitre du cours est terminé par un résumé qui rassemble les propriétés et les théorèmes dont la connaissance est indispensable.

Edition Lycées et Collèges, 1 vol. Br. : 320 f., cart. 400 f.
Edition Cours Complémentaires, 1 vol. Br. : 330 f., cart. 430 f.

Classe de SCIENCES EXPERIMENTALES :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — MATHÉMATIQUES. (Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie, Mécanique, Cosmographie).

Tout le programme se trouve réuni en un volume qui donne aux élèves des méthodes pratiques ; les questions sont traitées avec le maximum de simplicité, sans toutefois sacrifier l'essentiel de l'esprit mathématique Br. : 860 f., cart. 960 f.

Classe de PHILOSOPHIE :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — ALGÈBRE ET COSMOGRAPHIE Br. : 360 f., cart. 440 f.

Classe de MATHÉMATIQUES :

COURS COMPLET

LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE Br. : 730 f., cart. 830 f.
" — GEOMETRIE DESCRIPTIVE ET COTEE Br. 290 f.
" — ARITHMETIQUE Br. 300 f.
" — MECANIQUE Br. : 260 f., cart. 350 f.
LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — COSMOGRAPHIE Br. : 350 f., cart. 450 f.
LESPINARD et PERNET. — ALGÈBRE Br. : 640 f., cart. 740 f.
" — TRIGONOMETRIE Br. : 395 f., cart. 495 f.
" — SOLUTIONS DE PROBLEMES DE MATHÉMATIQUES, Bac.,
2^e partie, classe de Mathématiques 350 f.

Classe de Première C. et M.

LESPINARD et PERNET. — SOLUTIONS DE PROBLEMES DE MATHÉMATIQUES, Bac.,
1^{re} partie, séries C. et M. 295 f.

MASSON & C^{ie}, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6^e

COURS COMPLET
DE
MATHÉMATIQUES

SOUS LA DIRECTION DE

G. CAGNAC
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Louis-le-Grand

L. THIBERGE
Inspecteur général
de l'Éducation Nationale

En préparation :

" Arithmétique-Algèbre-Géométrie "

Classes de 3^e

Un volume de 370 pages environ, avec figures, exercices et problèmes ;
cartonné *Juin 1952*

Précédemment parus :

Arithmétique, cl. de 6^e, par L. THIBERGE, E. GILET et J. SIROS.
Un vol. avec fig., exercices et problèmes ; cart. **480 fr.**

Géométrie et Arithmétique, cl. de 5^e, par L. THIBERGE et E. GILET.
Un vol. avec fig., exercices et problèmes ; cart. **580 fr.**

Arithmétique, Algèbre et Géométrie, cl. de 4^e, par L. THIBERGE
et E. GILET. Un vol. avec fig., exercices et problèmes ; cart. **600 fr.**

Géométrie plane, cl. de 2^e C et Mod., par J. DOLLON et E. GILET.
Un vol. avec fig., exercices et problèmes ; cart. **650 fr.**

Algèbre, cl. de 2^e C et Mod., par J. DOLLON et J. SIROS. Un volume
avec fig., exercices et problèmes ; cart. **520 fr.**

Géométrie dans l'espace, cl. de 1^{re} C et Mod., par J. DOLLON et
E. GILET. Un vol. avec fig., exercices et problèmes ; cart. **720 fr.**

Bulletin de l'Association
des
Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement public

PREMIÈRE PARTIE

I. Document officiel

Agrégation de Mathématiques (Femmes)

(SESSION DE 1951)

Rapport de M. l'Inspecteur général DESFORGE
vice-président du Jury

Le Jury de l'Agrégation féminine de Mathématiques pour la session de 1951 était ainsi composé : M. VILLAT, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, président ; M. DESFORGE, inspecteur général de l'Instruction publique, vice-président ; Mlle BRULARD, professeur de mathématiques au Lycée Camille-Séc ; Mlle CHARPENTIER, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes ; M. HOCQUENGHEM, professeur de mathématiques au Lycée Saint-Louis.

Pour les épreuves pratiques et orales, auxquelles M. VILLAT n'a pu assister, la présidence a été assurée par M. DESFORGE, et M. VILLAT a été remplacé numériquement par M. DUGUÉ, professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

La session du concours a duré du 4 juin, date d'ouverture des épreuves écrites, au 31 juillet. Les résultats d'admissibilité ont été donnés le 6 juillet. Les épreuves orales et les épreuves pratiques ont eu lieu au Lycée Fénélon, à Paris, à partir du 15 juillet.

Le nombre de candidates inscrites était soixante-seize.

ÉPREUVES ÉCRITES (1)

Soixante-huit candidates ont pris part à la première épreuve : deux d'entre elles ont abandonné le concours après la première composition, et deux autres, après la seconde.

Pour les soixante-quatre candidates ayant terminé les épreuves écrites,

(1) Les énoncés des problèmes proposés aux épreuves écrites ont été publiés dans notre numéro 142 de juillet 1951, pages 286 à 293.

les notes correspondant à l'ensemble des quatre compositions s'échelonnent entre 56,5 et 5, pour un maximum de 80 points, c'est-à-dire pratiquement entre 14 et 1 sur 20. Les notes se répartissent ainsi : onze sont supérieures à 10, quatorze sont comprises entre 10 et 8, treize entre 8 et 6, huit entre 6 et 5, huit entre 5 et 4, cinq entre 4 et 3 et cinq inférieures à 3. L'échelonnement plus détaillé des notes au-dessus de 8 sur 20 s'établit comme suit : en tête deux se détachent, pratiquement *ex-æquo* (56,5 et 56 sur 80) : viennent ensuite trois notes entre 12,5 et 12, une égale à 11,5, cinq entre 11 et 10, huit entre 9,5 et 9, et six entre 8,5 et 8.

Les vingt-cinq premières candidates de ce classement ont été déclarées admissibles. La moyenne de la dernière admissible, 8 sur 20, est légèrement inférieure (d'un demi-point) à celle du concours de 1950, mais elle est égale à celle du concours de 1949. Rappelons que la liste d'admissibilité comprenait, en 1949, vingt-trois noms pour soixante-quatorze candidates, et, en 1950, vingt-deux noms pour soixante-sept candidates.

La moyenne des notes d'écrit est 10,1 pour les vingt-cinq candidates admissibles ; elle est à peine supérieure à 4,5 pour les quarante-trois non-admissibles ; elle est environ 6,6 pour l'ensemble des soixante-huit candidates, et très voisine de 7 si l'on ne tient compte que des soixante-quatre candidates qui ont pris part effectivement aux quatre épreuves écrites.

Le concours de 1950 avait paru révéler une amélioration du niveau moyen des épreuves écrites par rapport au concours de 1949 : elle s'expliquait en particulier par un assez net relèvement des notes obtenues pour la composition de mathématiques élémentaires. En 1951, si la moyenne générale de l'écrit, pour les admissibles, est tout à fait comparable à celle de l'an dernier, cette moyenne prise pour l'ensemble des candidates accuse par contre une certaine baisse, dont les deux épreuves de mathématiques élémentaires et de mathématiques spéciales sont en grande partie la cause. C'est là un fait regrettable, car les sujets proposés ne présentaient pas de difficultés plus grandes que les années précédentes ; il semble qu'un effort plus méthodique de préparation pourrait sensiblement améliorer les résultats, pour ces deux compositions qui correspondent très directement aux branches des mathématiques que les candidates auront à enseigner plus tard, comme professeurs.

Le groupe des vingt-cinq admissibles comprend cinq professeurs titulaires en exercice et un professeur titulaire en congé, six élèves de l'Ecole Normale Supérieure et une ancienne élève ayant accompli une quatrième année à l'Ecole, trois élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses déjà titulaires du certificat d'aptitude à l'enseignement dans les collèges, quatre stagiaires d'enseignement, dont deux anciennes élèves de l'Ecole Normale Supérieure, et cinq étudiantes dont deux auditrices à l'Ecole Normale Supérieure, une étudiante de la Faculté de Montpellier et une étudiante de la Faculté de Clermont.

Dix-sept des candidates inscrites avaient été admissibles à des sessions antérieures : huit d'entre elles figurent de nouveau sur la liste des admissibles, en 1951 : les cinq professeurs titulaires en exercice, une ancienne élève de l'Ecole Normale Supérieure, et deux étudiantes.



Les compositions écrites ont donné lieu aux observations suivantes :

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES : Mlle BRULARD

La composition de mathématiques élémentaires proposait l'étude de cônes, ou cylindres (S), tous circonscrits à une sphère fixe (O) et de leurs sections planes (C) par un plan fixe P tangent à la sphère en un point F.

Dans les parties I et II, certaines conditions étaient imposées aux coniques (C), et on demandait le lieu du sommet S correspondant. Dans la partie III, groupant de diverses façons deux des conditions antérieures, on s'intéressait au lieu de S et à quelques propriétés des coniques (C) et des cônes (S).

Les candidates disposaient d'une grande liberté dans le choix de leurs méthodes, dans l'ordre des questions à traiter ; effectivement, la correction des copies a confirmé cette grande diversité. Cependant, on peut noter que, d'une façon générale, la partie I a présenté de grosses lacunes et a laissé voir souvent de graves fautes de raisonnement ; les parties II et III ont donné de meilleurs résultats, trop incomplets dans un grand nombre de copies si l'on tient compte de la facilité de nombreuses questions, des liens évidents entre beaucoup d'entre elles, et des indications fournies par l'énoncé. Nous reviendrons sur ces critiques d'ordre général, mais, d'abord, signalons les observations de détail concernant chacune des parties du problème.

Partie I. — La question 1^o, extrêmement facile, devait surtout familiariser les candidates avec la figure, les faire « pénétrer » dans le problème. Or, on constate avec étonnement que seize d'entre elles n'ont pas su la résoudre et qu'un bon nombre d'autres ne limitent pas correctement le lieu.

A quelques exceptions près, pour l'ensemble du problème, les lieux de S sont des plans, ou des portions de plans, ou des courbes planes. C'est pourquoi la question 2^o proposait la recherche générale du lieu de S lorsque les coniques (C) admettent deux droites données L_0 et L'_0 comme droites conjuguées : on obtenait une portion de plan. A condition d'accepter les éléments imaginaires, on peut démontrer que cette propriété caractérise les coniques (C) correspondant à des cônes (S) dont le sommet S est assujéti à rester dans un plan fixe ; ce point de vue réciproque n'était naturellement pas envisagé dans ce problème de géométrie élémentaire.

Le lieu de S a été presque vu dans deux copies seulement. On pouvait remarquer que la condition nécessaire et suffisante pour que S soit un point du lieu cherché est que, sous réserve que le point S soit extérieur à (O) et au plan P, les plans (S, L_0) et (S, L'_0) soient conjugués par rapport à la sphère (O) ; l'étude du lieu de l'intersection de deux plans conjugués par rapport à (O) et passant respectivement par L_0 et par L'_0 se réduit à celle du lieu de l'intersection de leurs traces sur le plan polaire de I par rapport à (O), I étant le point commun aux droites L_0 et L'_0 , à distance finie ou à l'infini.

Indépendamment du cas général, le premier cas particulier peut se ramener à la question 1° ; six candidates l'ont vu, mais n'ont pas cherché si la réciproque était valable. Le deuxième cas particulier conduit, pour le lieu de S, à une portion d'un plan parallèle au plan P, et, grâce à la transformation (T), on voit facilement que les coniques (C) correspondantes sont des hyperboles ayant même longueur du demi-axe non-focal ; ce dernier point a été signalé par une candidate.

Vingt-trois copies traitent correctement la partie de la question 2° relative à la transformation (T).

Il est surprenant que la question 3° n'ait pas été comprise par la plupart des candidates, car, même sans avoir trouvé le 2°, elles pouvaient au moins signaler que le lieu de S était alors l'intersection de deux surfaces analogues à celles obtenues au 2°, correspondant à l'association de la droite L et de deux droites distinctes fixes menées par M ; une seule copie indique nettement ce fait, deux autres paraissent le soupçonner, mais restent confuses. Là, comme plus haut, les candidates ont paru surprises, et gênées, par la généralité des questions posées.

Partie II. — Les relations métriques proposées, pourtant très simples, et qui devaient permettre de traiter cette partie indépendamment de la précédente, n'ont été toutes trouvées que dans dix-sept copies, et encore sept d'entre elles présentent des calculs compliqués. Beaucoup sont arrêtées par la dernière égalité ; treize candidates partent d'une définition fautive du paramètre p d'une conique à centre (le plus souvent, elles prennent pour p la distance du foyer F à la directrice associée), tandis que onze autres passent sous silence toutes les questions relatives à p , ce qui laisse bien supposer qu'elles ignorent sa définition.

Le lieu de S, lorsque p reste constant, a été vu par huit candidates, mais trois seulement discutent sa nature ; trois autres obtiennent directement le lieu de S lorsque a est constant, avec certaines imprécisions dans leur démonstration. Le plus simple, pour définir une méridienne du lieu de S lorsque p est constant, était d'utiliser les deux points fixes communs à toutes les coniques (C) correspondantes et les cônes circonscrits à (O) ayant ces deux points fixes comme sommets.

Le lieu de S, lorsque l'excentricité est constante, est vu dans une seule copie ; une autre l'indique uniquement lorsque l'excentricité est plus grande que l'unité. L'expression classique de l'excentricité d'une « section de Dandelin » permettait de se ramener au lieu des points dont la distance tangentielle à un cercle et la distance à une droite sont dans un rapport constant, problème classique.

Partie III. — La question 1° était assez longue, souvent facile. C'était là que les candidates pouvaient apporter le plus de variété dans leurs réponses, suivant ce qu'elles avaient dégagé dans les parties antérieures, et suivant l'usage qu'elles faisaient de la transformation (T). Il pouvait être commode de traiter chacun des lieux ou enveloppes demandés pour les trois familles de coniques (C) simultanément. Par exemple, des calculs analogues conduisaient aux formules : $\overline{\omega F} \cdot \overline{\omega H} = a^2$; $\overline{FF'} \cdot \overline{FH} = \pm 2b^2$;

$\overline{FF'}/\overline{FH} = 2e^2/(e^2 - 1)$, en désignant par H la projection de F sur la directrice associée D, par ω le centre de (C), par F' son deuxième foyer, d'où l'on tirait les trois lieux de F'. Il faut signaler ici, car une seule candidate s'en est aperçue, que dans le cas des coniques (C_1) le lieu de F' est une droite entière, sauf s'il s'agit d'hyperboles telles que FR soit supérieur à b (dans ce cas, le lieu de F' se compose de deux demi-droites ayant le même support). Des trois lieux de F' on déduit l'enveloppe de l'axe non focal, puis, par l'homothétie (R, 2), l'enveloppe de la deuxième directrice. Ces enveloppes ont été trouvées dans huit copies pour la famille (C_1), dans trois pour (C_2), dans cinq pour (C_3).

De même, des lieux de F' on pouvait tirer ceux de S, en remarquant l'alignement des points S, K, F', K étant le point diamétralement opposé à F sur la sphère (O) ; cette même propriété a servi, très naturellement, en sens contraire, à certaines candidates pour définir les lieux de F' à partir de ceux de S, ce qui était en particulier commode pour la famille (C_1).

L'enveloppe des coniques (C_1), formée de deux droites parallèles, réelles, sauf dans le cas signalé précédemment où le lieu de F' n'est pas une droite entière, pouvait se déduire du lieu de S, ou de l'étude des cercles (γ_1) dont il sera question plus loin. ou encore de quelques remarques simples tirées des propriétés classiques des coniques (produit des distances algébriques des foyers à une tangente, par exemple). L'enveloppe des coniques (C_2), qui faisait intervenir deux coniques ayant F et R comme foyers, et celle des coniques (C_3), qui faisait intervenir le cercle lieu des points dont le rapport des distances aux points F et R est égale à e, pouvaient s'obtenir en cherchant les points caractéristiques de ces coniques, ou bien à partir de ces cercles transformés (γ).

Les cercles (γ_1) forment un faisceau linéaire à points de base ou à points limites réels, suivant que l'enveloppe des coniques (C_1) est réelle ou imaginaire. C'est une conséquence de la partie I ; on peut encore remarquer, avec plusieurs candidates, qui n'en ont d'ailleurs pas tiré parti ensuite, que les cercles (γ) sont les inverses, dans l'inversion dont le cercle des points doubles est le cercle directeur de la transformation (T), des cercles principaux des coniques (C) ; or, ces derniers s'étudient facilement pour les coniques (C_1) ; il en est de même pour les coniques (C_2). On trouvait ainsi deux cercles égaux comme enveloppe des cercles (γ_2).

Quatre candidates ont donné des indications, incomplètes, sur l'enveloppe des coniques (C_1) et sur les cercles (γ_1), deux autres, sur l'enveloppe des coniques (C_2). Aucune n'a abordé l'étude des cercles (γ_2) et (γ_3), et de l'enveloppe des coniques (C_3).

Reste enfin la question 2°, à peine effleurée dans deux copies. Nous nous bornerons à signaler le rôle important que jouaient dans cette fin du problème les deux points d'intersection de la droite réciproque de D par rapport à (O) avec la droite HK et avec le plan tangent en K à la sphère (O).

Voici les notes, sur 20, attribuées aux soixante-huit copies (le barème adopté diminue volontairement l'importance de la partie I ; les quelques

candidates ayant donné sur cette partie de bonnes indications ont naturellement bénéficié de points supplémentaires ; de même, il n'a pas été tenu compte, pour l'ensemble, de la question III, 2°) ; un 15,5 ; un 12 ; un 11 ; deux 10,5 ; trois 10 ; deux 9,5 ; un 8,5 ; un 8 ; vingt notes entre 8 et 5 ; dix-sept notes entre 5 et 3 ; dix-neuf notes inférieures à 3. La moyenne est voisine de 5 sur 20.

La maladresse, la lenteur, l'inexpérience en géométrie élémentaire de beaucoup de candidates sont évidentes. Il est nécessaire de signaler des lacunes inadmissibles au niveau de l'agrégation : comment aborder en effet ce concours si l'on ignore, par exemple, la définition du paramètre d'une conique, celle de la polaire d'un point par rapport à une conique, les propriétés des droites réciproques (ou conjuguées) par rapport à une sphère, les éléments de la transformation par polaires réciproques... ? Ces notions, qui sont presque toutes du niveau de la classe de Mathématiques, sont aussi largement utilisées en géométrie analytique, et devraient être assimilées sans confusions possibles.

Chez d'autres candidates, dont les connaissances sont heureusement moins sommaires, on relève, çà et là, des fautes de raisonnement inquiétantes, par exemple celle-ci : « le cercle secondaire d'une ellipse (C_1) étant « bitangent à (C_1), il en résulte que l'enveloppe de (C_1) fait partie de l'enveloppe des cercles secondaires » ; que reste-t-il à cette candidate de l'étude de la théorie des enveloppes ? Ou encore, on affirme, plus ou moins au hasard, dans la partie I, que le lieu de S est une surface quand c'est, au contraire, une courbe, ou inversement : il n'était pourtant pas difficile de se rendre compte que, dans chacune des questions 1° et 2°, on impose une seule condition à (C), donc à S (la notion de droites conjuguées par rapport à une conique a été rencontrée assez fréquemment pour qu'on puisse espérer qu'elle est familière aux candidates), et que, dans la question 3°, deux conditions sont imposées à (C), donc à S. Ces dernières erreurs, comme beaucoup d'autres, proviennent souvent de réciproques négligées, ou mal bâties ; on oublie encore fréquemment, malgré un effort dû sans doute aux observations présentées dans les précédents rapports, de s'assurer de la « suffisance » des conditions trouvées d'abord dans une première analyse, et même de l'existence de la figure sur laquelle on raisonne.

Ce rapport ne saurait se terminer sur ces nombreuses critiques. Il serait injuste en effet de ne pas distinguer les premières copies, plus spécialement celle de la candidate classée première pour cette composition (et restée première classée à l'écrit), qui a réussi à mettre au point une partie appréciable du problème, et même quelques copies, plus lointaines dans le classement, qui ont révélé des connaissances sûres et des idées intéressantes. D'autre part, devant les notes très insuffisantes, encore trop nombreuses cette année, on ne peut que recommander aux candidates d'étudier en profondeur le programme de la classe de Mathématiques, avec ses compléments évidents, en réfléchissant aux idées générales et aux méthodes, et, bien entendu, de s'entraîner sérieusement en cherchant seules, en temps

libre, un certain nombre de problèmes, pour arriver, peu à peu, à de meilleurs résultats en temps limité.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES : M. HOCQUENGHEM

Le problème proposait l'étude des enveloppes planes (Γ), de troisième classe, non décomposées, dont la courbe orthoptique comprend une droite D . Dans une première partie, en plaçant l'un des axes de coordonnées Ox sur D , on demandait de mettre en évidence certains modes de génération et quelques propriétés générales de ces enveloppes (Γ). Après avoir attiré l'attention sur les réciproques des résultats précédemment établis, la seconde partie comportait diverses questions relatives à une famille d'enveloppes (Γ) correspondant à des données particulières, et aboutissait au tracé de l'une d'entre elles. Une troisième partie faisait appel à un changement du triangle de référence pour rechercher quelques propriétés d'un faisceau linéaire tangentiel d'enveloppes (Γ).

Dans l'ensemble, le résultat de cette épreuve a été tout à fait médiocre. Peut-être l'emploi des coordonnées tangentielles a-t-il gêné les candidates ? Mais il eût été facile de faire la traduction « dualistique » de certaines questions, et l'on aurait très bien admis une solution de ce genre, qui, d'ailleurs, n'a pas été tentée.

Voici quelques indications de détail :

Partie I. — Dans la première question, l'écueil était de démontrer que si les enveloppes (Γ) n'étaient pas tangentes à D , elles se décomposaient. Dans de nombreuses copies, une méthode est amorcée : écrire que deux des racines de l'équation du troisième degré donnant les coefficients angulaires des trois tangentes menées par un point arbitraire de D ont pour produit -1 ; mais une seule candidate a l'idée d'utiliser alors la troisième racine, qui, si elle n'est pas toujours nulle, s'exprime rationnellement en fonction du paramètre variable, de telle sorte que la tangente correspondante, dont les coefficients sont faciles à calculer, passe par un point fixe à distance finie ou à l'infini ; ainsi apparaissait simplement la décomposition de l'enveloppe, signalée dans l'énoncé, et qui pouvait, naturellement, être mise en évidence par d'autres moyens. La plupart des candidates se contentent d'admettre, sans justification, que cette troisième racine est nulle, et plusieurs ne voient pas que, du fait de cette hypothèse introduite en cours de route, certains de leurs calculs antérieurs cessent d'être valables, et qu'il y a lieu de les reprendre.

Signalons, parmi les fautes de pensée assez fréquentes, la confusion que l'on établit entre deux propositions telles que « d'un point de D on peut mener deux tangentes rectangulaires à l'enveloppe » et « deux tangentes rectangulaires à l'enveloppe se rencontrent sur D », ou bien encore, « l'enveloppe admet une tangente parallèle à Oy , qui coupe Ox en A , et par suite admet la tangente perpendiculaire menée par A , donc Ox ».

Dans la deuxième question, l'enveloppe (L) des symétriques de D par rapport aux tangentes à (Γ_0) est déterminée par la plupart des candidates, généralement par son équation tangentielle, quelquefois par son équation ponctuelle.

Etablir que la courbe (Γ_0) fait partie du lieu des centres des cercles tangents à (L) et à D ne demande qu'un raisonnement simple, qui, convenablement mené et poursuivi, fait apparaître la liaison entre les points de rebroussement de (Γ_0) et les centres de cercles osculateurs à (L) et tangents à D . Mais la solution de cette question a souvent donné lieu à des explications embrouillées, fréquemment incomplètes. Une candidate a fait remarquer avec raison que le lieu géométrique étudié comprenait également la normale à (L) au point de contact de (L) et de D .

Pour déterminer les foyers de (Γ_0) , les candidates cherchent les tangentes isotropes de l'enveloppe (Γ_0) sans remarquer que ce sont celles de (L) ; il en résulte de très longs calculs (une candidate écrit deux pages pour démontrer que deux droites imaginaires conjuguées ont leur point commun réel). Cinq candidates seulement ont vu nettement que les foyers de (L) et de (Γ_0) coïncidaient, et que la propriété des bissectrices en résultait. Dans une copie, on applique directement le théorème de Poncelet à l'enveloppe (Γ_0) , bien entendu, sans autre justification que l'indication donnée par l'énoncé.

Le cas de $C = O$ n'a pu être traité nettement que par les candidates qui avaient vu l'identité des foyers de (L) et de (Γ_0) .

Dans quelques compositions on aborde la question de « l'unicursalité » de l'enveloppe (Γ_0) , en liant cette propriété à l'existence d'une tangente double, que l'on rattache approximativement à la condition $C = O$. Une seule d'entre elles contient une démonstration, du reste approximative, du fait que c'est là l'unique cas d'unicursalité.

Pour la troisième question de cette partie I, l'existence de rectangles $MPM'P'$ circonscrits à (Γ_0) est justifiée par des raisonnements aussi longs qu'inutiles. La correspondance entre les points M et M' est établie, la plupart du temps, en faisant appel à des considérations « traditionnelles », dont on sait bien qu'elles sont trop souvent insuffisantes ou incorrectes ; bien rares sont les copies où l'on détermine effectivement les coefficients de la relation involutive.

La recherche de l'enveloppe de la droite PP' donne lieu à des calculs compliqués, et celle du cercle décrit sur MM' comme diamètre — question très banale — conduit souvent à une quartique (une candidate s'aperçoit que cette quartique se décompose en deux cercles de rayon nul). En résumé,

bien peu de candidates comprennent que $\frac{u}{v}$ est un paramètre impropre, et qu'il convient d'associer deux directions rectangulaires, donc de prendre $\frac{u^2 - v^2}{2uv}$ comme paramètre, comme il est d'ailleurs naturel de le faire pour déterminer (L) dans la question 2°.

La dualité entre le lieu des points P et P' et l'enveloppe (Γ) n'est mise en évidence que dans une seule copie.

Signalons que dix-neuf candidates n'ont pas abordé cette question 3°.

Vingt-cinq compositions contiennent des essais sur la quatrième question, concernant les points à l'infini de (Γ_0) . Dans neuf d'entre elles on

arrive à établir l'existence de deux couples d'asymptotes rectangulaires, soit géométriquement à partir de (L), soit par le calcul ; les premières seules donnent la démonstration de la coïncidence des points de rencontre des asymptotes rectangulaires avec les points doubles de l'involution (M, M'). La plupart des candidates oublient de signaler la branche parabolique dans la directions Oy .

Partie II. — Une dizaine de candidates étudient les réciproques demandées dans la première question, mais presque toutes avec un manque absolu de rigueur et de précision. Il n'y avait là aucune difficulté théorique, et l'on aurait pu espérer, pour de tels problèmes, des solutions clairement exposées et des conclusions nettement énoncées — exigence bien naturelle puisqu'il s'agit de futurs professeurs ; il n'en fut malheureusement rien.

La détermination des courbes (γ) définies à partir de l'hyperbole équilatère $xy = a^2$ n'est tentée d'une façon sérieuse que dans cinq copies, mais avec un tel luxe de calculs de radicaux que seule l'une d'elles aboutit au résultat. L'enveloppe des asymptotes des courbes (γ) a été trouvée par trois candidates, mais aucune n'a pu donner d'indication sur le lieu des points de rebroussement.

Enfin, on ne trouve un tracé de la courbe particulière (γ) demandée par l'énoncé que dans une composition, tracé bien grossier, du reste, mais dont il a fallu se contenter.

Quant à la partie III, elle a été à peine abordée. Seule une candidate a vu l'intérêt de l'introduction des « coordonnées isotropes », qui était de rendre plus maniable la condition d'orthogonalité de deux droites.

En résumé, l'épreuve semble avoir été trop difficile pour la moyenne des candidates. Pourtant, les difficultés « techniques », du reste parfaitement surmontables, ne peuvent excuser les nombreux défauts relevés dans beaucoup de copies, et qui sont parmi ceux que les professeurs pourchassent continuellement chez leurs élèves : fautes d'homogénéité (beaucoup ne songent pas que les coefficients A, A', B, B', C peuvent avoir des dimensions), — intervention injustifiée de radicaux dans des calculs qui doivent être conduits « rationnellement », — fautes de bon sens (une candidate prétend démontrer que les courbes γ de la partie II sont des coniques), — manque de précision dans les raisonnements, manque de clarté dans la présentation des résultats...

Sur les soixante-six copies corrigées, nous avons trouvé : une copie assez bonne, dont l'auteur a dominé le sujet, mais une trop grande lenteur dans le travail ne lui a pas permis d'aller jusqu'au bout du problème ; neuf copies passables, indiquent quelques liaisons entre les diverses questions de la partie I ; quarante copies assez faibles, contenant quelques résultats épars, au hasard des questions ; seize copies franchement mauvaises, ne donnant guère de réponses valables, et dénotant une préparation tout à fait insuffisante à une épreuve importante du concours.

Les notes se répartissent ainsi : un 14 ; trois notes très voisines de 12 ; six notes entre 11 et 9 ; puis seize notes entre 8 et 5,5 et vingt-quatre entre 5, et 2,5 ; enfin seize notes inférieures à 2. La moyenne générale de l'épreuve est un peu inférieure à 5 sur 20.

COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL : M. VILLAT

Le problème d'analyse semble avoir été, cette année, parfaitement compris dans son ensemble, et il a été réussi par un bon nombre d'entre les candidates, voire même très bien réussi par certaines. L'impression qui se dégage de la correction est donc optimiste : il y a progrès évident sur les précédentes années. Sur Soixante-quatre copies remises, quarante ont obtenu une note supérieure ou égale à 10 (sur 20). Voici d'ailleurs comment se groupent les compositions : un 19 ; un 18 ; un 17 ; trois 16,5 ; deux 16 ; un 15,5 ; un 15 ; trois 14,5 ; cinq 14 ; trois 13,5 ; deux 13 ; deux 12,5 ; quatre 12 ; deux 11,5 ; trois 11 ; trois 10,5 ; trois 10 ; quatre 9,5 ; un 9 ; deux 8,5 ; un 8 ; un 7,5 ; quatre 7 ; quatre 6 ; un 5,5 ; trois 5 ; un 4 ; deux 2.

La moyenne générale de l'épreuve est voisine de 11 sur 20.

Les premières copies du classement sont tout à fait brillantes, et dénotent des connaissances solides, et des qualités d'ingéniosité tout à fait remarquables, spécialement pour les deux premières.

Les questions posées se groupent autour des propriétés des surfaces S dites harmoniques, c'est-à-dire définies par une équation de la forme $z = P(x, y)$, en axes rectangulaires, P étant une fonction harmonique des deux variables x et y . Si $P + iQ$ est la fonction analytique de $u = x + iy$, définie, à une constante près, au moyen de P , la surface S' définie par l'équation $z = Q(x, y)$ est dite associée à S .

Après avoir noté une propriété quasi-évidente des normales à S et S' aux points M et M' ayant même projection m sur le plan xOy , on introduisait la droite Δ menée de m parallèlement à la normale à S en M . Cette droite engendre une congruence. On demandait de démontrer que cette congruence possédait le plan xOy comme surface moyenne, cette propriété étant caractéristique des surfaces harmoniques.

La presque totalité des concurrentes a résolu cette question correctement, la plupart en termes heureux et sans longueurs inutiles.

On demandait ensuite de trouver les surfaces harmoniques S pour lesquelles la congruence des droites Δ était une congruence de normales. Rares ont été les réponses complètes à cette question. Quelques candidates ont écrit exactement la relation, entre les dérivées premières et secondes de P , exprimant la propriété demandée : certaines l'ont fait rapidement, en utilisant la définition la plus primitive des congruences de normales, c'est-à-dire en écrivant qu'il existe des surfaces normales à toutes les droites : on

obtenait ainsi presque aussitôt
$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right)$$

ou encore (1) $p(ps + qt) - q(pr + qs) = 0$. Certaines candidates ont préféré s'appuyer sur la propriété des congruences de normales, d'avoir leurs plans focaux rectangulaires : cela les a conduites au résultat (sauf fautes de calcul éventuelle) par un chemin acceptable, mais beaucoup plus long. Mais une fois l'équation écrite, — équation qu'il fallait joindre, bien entendu, à $r + t = 0$, exprimant que P était harmonique, — très peu de

candidates ont su terminer la question, qui, pourtant, se réduisait à presque rien. Il suffisait de remarquer (chose classique) qu'en posant $u = x + iy$, $v = x - iy$, toute fonction harmonique peut s'écrire $P = A(u) + B(v)$, A et B étant deux fonctions quelconques des arguments u ou v (et imaginaires conjuguées si P est réel) pour que l'équation (1) prit la forme

$$A'^2 B'' - B'^2 A'' = 0$$

équation à variables séparées, qui exige $\frac{A''}{A'^2} = \frac{B''}{B'^2} = K$, avec K constant.

Si cette constante est nulle, on est immédiatement conduit à une surface S plane ; pour $K \neq 0$, on trouve des surfaces qui, par homothétie et translation, se déduisent de la surface $x^2 + y^2 = e^x$. Les surfaces associées S' sont ensuite aisées à définir.

Le paragraphe suivant (III) introduisait la parallèle à la normale en M à S , menée par un point fixe I de l'espace, non situé dans le plan xOy . Cette parallèle coupe xOy en un point m' . La correspondance entre ce point m' et le point m (projection de M sur xOy) est, — on demandait de le constater, — une transformation *conforme inverse*.

Cette propriété a été, la plupart du temps, résolue exactement, mais très rares sont les candidates qui ont aperçu que tout calcul était à peu près superflu, tout se réduisant aux deux lignes d'écriture suffisant à faire voir que $x' - iy'$ (x' et y' étant les coordonnées de m') était une fonction analytique de $x + iy$ (x et y sont les coordonnées de m).

Le cas particulier examiné dans le paragraphe IV a donné à la plupart des concurrentes l'occasion d'un calcul exact, et d'autant plus simple qu'on s'est rapproché davantage de la propriété qui vient d'être signalée. Signalons en passant, qu'il est déplorable de constater, dans trois copies, que la candidate ne peut écrire correctement les formules qui définissent les coordonnées du point inverse d'un point donné.

Dans la question V, on considérait deux surfaces associées S et S' , harmoniques et conjuguées l'une de l'autre ; les normales étant MN et $M'N'$ en deux points M et M' sur une même verticale, on menait par le point fixe I une parallèle à la perpendiculaire commune à MN et $M'N'$, jusqu'à la rencontre avec xOy en m_1 . On demandait de montrer que la correspondance entre m et m_1 était *conforme directe*.

Tout revenait naturellement à faire voir ici que, x_1 et y_1 étant les coordonnées de m_1 , $x_1 + iy_1$ était une fonction analytique de $x + iy (= u)$. Cette manière de faire n'a malheureusement pas été la plus suivie, et on l'a remplacée souvent par des calculs fort compliqués et fort longs, parfois additionnés d'erreurs de calcul. Cependant, on obtenait tout de suite, en désignant par a, b, c les coordonnées de I , avec $c \neq 0$,

$$x_1 + iy_1 = a + ib - c \frac{1+i}{p-iq}.$$

Comme d'autre part, si $P + iQ = \varphi(u)$, on a $p - iq = P'_x + iQ'_x = \varphi'(u)$, il en résultait $x_1 + iy_1 = a + ib - c \frac{1+i}{\varphi'(u)}$, ce qui met en évidence le résultat

tat demandé. On pouvait d'ailleurs faire $a=b=0$ sans inconvénient.

Et la réciproque s'ensuit immédiatement, puisque la fonction $\phi(u)$, et par suite P et Q , s'obtiennent par une simple quadrature.

Le cas considéré au paragraphe VI, où $x_1 + iy_1 = Achu$, conduisait à une quadrature tout à fait élémentaire.

Ce calcul global n'a été que trop souvent remplacé par un calcul direct des dérivées partielles p et q ; suivi de l'intégration, souvent manquée, d'une différentielle totale : cela revenait à se priver, maladroitement, du secours qu'apportent les fonctions analytiques par leur notation condensée, qui sous-entendent et entraînent avec elles des propriétés qu'il devient inutile d'énoncer, ou de redémontrer à chaque occasion.

La dernière question concernait la congruence des droites menées par m , parallèlement à la normale commune à MN et $M'N'$. La surface moyenne de cette congruence peut-elle être réduite au plan xOy ?

L'équation aux cotes des points focaux était aisée à écrire. En exprimant que la somme des racines était nulle, on obtenait aisément

$$(p - q)(pr + qs) + (p + q)(ps + qt) = 0,$$

laquelle équation, jointe à $r + t = 0$, définissait les surfaces S demandées, pour lesquelles la propriété voulue aura lieu. Ici encore, l'équation du problème a été écrite exactement par quelques candidates, mais la quasi-unanimité des candidates s'en est tenue à cet effort. Les équations des surfaces harmoniques pouvant s'écrire, comme plus haut, en mettant P sous la forme $P = F(u) + G(v)$, il suffisait de porter cette valeur de P dans l'équation (2) pour obtenir $(1 + i) F'' G'^2 + (1 - i) G'' F'^2 = 0$, ou encore

$$(1 + i) \frac{F''}{F'^2} = (1 - i) \frac{G''}{G'^2} = C^e. \text{ Après quoi le calcul se termine comme}$$

plus haut, d'une manière entièrement élémentaire.

En résumé, tout le problème devenait vraiment facile si l'on pensait à faire un usage convenable des coordonnées isotropes u et v , c'est-à-dire au fond, à s'appuyer sur l'introduction des fonctions analytiques plutôt que de leurs composantes harmoniques.

Bien entendu, des remarques géométriques élégantes permettaient de simplifier diverses parties du problème. Cela est notamment le cas pour les propriétés se rattachant aux représentations conformes des paragraphes III et V. Quatre des candidates doivent se féliciter particulièrement d'avoir, dans le paragraphe V notamment, apporté des considérations ingénieuses et opportunes, auxquelles elles ont dû le bénéfice de points supplémentaires (qui ne leur furent point inutiles, pour l'une d'entre elles particulièrement).

COMPOSITION DE MÉCANIQUE RATIONNELLE

Soixante-quatre candidates ont fait cette composition, mais deux ont remis copie blanche.

Le système matériel considéré dans la partie I consiste en un disque d reposant par son bord sur un plan horizontal fixe et dont l'axe glisse sans frottement sur un axe vertical fixe.

La figure est faite exactement dans presque toutes les copies ; trois ou quatre candidates cependant ont introduit un paramètre (appelé en général α) en plus des quatre paramètres proposés ψ , θ , φ , ρ . Or, cinq paramètres suffisent pour déterminer la position du disque avant que la condition ci-dessus ne soit exprimée ; il manque donc une relation (en général

$\alpha = \psi + \frac{\pi}{2}$), et, lorsqu'elle est oubliée, tout le problème est faux, car les

cinq paramètres ne sont pas indépendants !

Cette difficulté vaincue, quarante-six candidates ont calculé une force vive exacte, et trente-huit en ont bien déduit des équations de Lagrange correctes dans le cas sans frottement du 1^o ; mais d'autres ont réduit l'équa-

tion relative à φ à $\frac{\partial T}{\partial \rho} = C^*$ (résultat commode, mais faux). Peu de can-

didates (quatorze) commencent à écrire correctement les conditions nécessaires pour que θ soit stationnaire, trois vont assez loin, mais deux seulement ont vu que θ ne peut rester constant que si le disque est immobile, résultat bien différent de celui que l'on obtiendra dans le 2^o. Les solutions exactes relatives à la condition pour que φ soit stationnaire sont encore moins nombreuses.

A partir du 2^o, il y a frottement au contact de d et du plan fixe. La moitié environ (vingt-neuf) des candidates écrivent correctement les conditions de roulement sans glissement ($\rho' = 0$; $\rho\psi' + r\varphi' = 0$), mais quinze seulement remarquent qu'elles sont intégrables ; on emploie donc en général des équations de Lagrange *avec multiplicateurs*, mais quatre à peine savent en tirer des résultats assez importants, alors que le théorème des forces vives (employé souvent, mais presque toujours, sauf sept ou huit fois, sans justification suffisante), joint à l'équation de Lagrange en ψ et aux équations de liaison, donne immédiatement les équations du mouvement, et l'on est ramené à deux quadratures : $\theta'^2 = f(\theta)$, $\psi' = g(\theta)$.

Le calcul des réactions présente dans les copies des formes multiples. Par suite des conditions imposées, la réaction de O_1z_1 sur Oz est perpendiculaire à l'un et à l'autre axe et se réduit donc à la composante X_1 sur IX . Cela permet de déterminer les quatre inconnues X , Y , Z , X_1 à l'aide des six équations exprimant les théorèmes généraux, puisque, en éliminant ces quatre inconnues, on doit retrouver les deux équations du mouvement.

L'emploi des axes mobiles a provoqué moins de fautes que l'année dernière ; les termes complémentaires sont plus rarement oubliés ; mais on trouve bien trop souvent la relation $X + X_1 = 0$.

La détermination de l'accélération du centre de gravité se ramenait au calcul bien classique d'une accélération en coordonnées polaires ; l'expression trouvée n'est complètement exacte que dans treize copies. Mais c'est l'équation traduisant le théorème du moment cinétique qui affecte les formes les plus variées. Le calcul fait pour déterminer le moment cinétique en O a conduit aux résultats les meilleurs (équations exactes ou presque), que ce calcul soit fait en utilisant des axes liés au disque ou des axes

menés par O parallèlement à IXYZ ; mais certaines candidates ont pris les mêmes moments d'inertie dans les deux systèmes d'axes, ou bien ont oublié des produits d'inertie et ont obtenu une expression inexacte du moment cinétique. Assez nombreuses sont les copies où l'on détermine le moment cinétique par rapport au point géométrique I, mais dans trois seulement on pense au terme complémentaire $m\vec{V}_0 \wedge \vec{V}_1$; bien d'autres fautes pourraient être signalées, telles que l'application incorrecte du théorème de Koenig, etc...

Le paragraphe 3° demandait l'étude d'un cas particulier *avec discussion*. Or, beaucoup de candidates se sont contentées de déterminer la résultante des forces d'attraction, quelques-unes ont bien trouvé la fonction de forces, mais deux ou trois seulement ont discuté, et encore sans rechercher si θ pouvait rester stationnaire, ce qu'il était intéressant de faire, pour comparer avec le résultat obtenu précédemment.

Il est regrettable que les discussions soient ainsi très fréquemment dédaignées ; cependant, les équations et les calculs ne sont qu'un moyen, c'est l'étude du mouvement qui est l'essentiel.

Trente-neuf candidates ont abordé la partie II du problème.

Il est étonnant de constater que beaucoup, qui avaient étudié correctement la question I, 2°, déclarent ici que les réactions mutuelles des deux disques d et D sont des forces intérieures et qu'il n'y a pas lieu de s'en occuper, car *elles ne travaillent pas* ; et, en conséquence, elles déduisent, de la force vive totale, des équations de Lagrange, ... ce qui serait exact s'il n'y avait pas frottement ; or, en général, il y a glissement, donc travail des réactions.

Quand il y a roulement sans glissement, au paragraphe II, 2°, les relations intégrables : $\theta' = 0$, $2(\rho + r \cos \theta)\psi' + (\rho + 2r \cos \theta)\alpha' = 0$, permettent finalement de calculer tous les paramètres en fonction du temps, mais ces relations ne peuvent, bien entendu, être employées que dans ce paragraphe. Dans le cas du glissement, il faut ajouter aux huit équations exprimant les théorèmes généraux pour chacun des deux disques séparément, deux équations dont la première exprime que la vitesse de glissement et la composante horizontale de la réaction en J ont même direction et sont de sens opposés, et la seconde, que $X_2^2 + Y_2^2 = f^2 Z_2^2$, soit donc dix équations en tout pour déterminer les dix inconnues : $\theta, \psi, X, Y, Z, X_1, X_2, Y_2, Z_2, \alpha$ (ρ est constant, φ est lié linéairement à ψ , et ζ s'exprime en fonction de θ).

Il n'était pas demandé d'intégrer ces équations, mais seulement de se servir du système ainsi obtenu pour calculer, dans un cas particulier (position initiale et vitesses initiales données), les dérivées secondes des paramètres, ce qui revient à résoudre un système d'équations linéaires. La question a été à peine effleurée ; aucun résultat n'a été obtenu.

La partie III a eu peu de succès. Parmi les douze copies qui l'abordent, sept seulement contiennent autre chose que le calcul de ζ' au début du choc ! Ce qui est plus grave, c'est que trois d'entre elles à peine ont su commencer à mettre le problème en équations ; les autres écrivent des

équations de percussion sans frottement, en appliquant, en plus, selon leur fantaisie, soit les équations de non-glissement, soit la relation unique $X_2^2 + Y_2^2 = f^2 \cdot Z_2^2$ pendant toute la durée du choc, sans se douter qu'il s'agit justement de déterminer dans quelles conditions il faut appliquer l'un ou l'autre de ces systèmes (complétés), et de rechercher ce qui peut être dit dans tous les cas.

Or, en désignant par U et V les composantes de la vitesse de glissement de d sur D , au point J , on arrive à la relation $\frac{U^k}{V} = C^k$, où K est une constante dépendant des éléments matériels du système. Un cas simple est celui où l'on a $K=1$, et où, par conséquent, cette vitesse de glissement reste dans un plan vertical fixe pendant tout le choc ; il est alors possible d'achever les calculs.

La répartition des notes est la suivante : les cinq meilleures compositions ont été cotées respectivement 16,5 ; 16 ; 14,5 ; 13,5 et 12,5 ; puis viennent dix notes comprises entre 12 et 10, onze notes entre 9,5 et 8, douze notes de 7,5 à 6, douze également de 5,5 à 4, dix notes de 3,5 à 2, puis 1,5 ; 0,5 ; et les deux copies blanches.

La moyenne de l'épreuve est 6,9, assez voisine de celle du précédent concours.

ÉPREUVES PRATIQUES

Les résultats des deux épreuves pratiques ont été, cette année, assez différents, les notes s'échelonnant de 2 à 17, avec une moyenne voisine de 8,5, pour la composition de géométrie descriptive, et de 2,5 à 13,5, avec une moyenne de 9,5, pour celle de calcul numérique ; les rapports ci-après en indiquent les raisons.

La répartition des notes pour l'ensemble des deux épreuves s'établit ainsi (pour un total de 40) : les trois meilleures sont très voisines de 30 (30 ; 29,5 ; 28,5) ; viennent ensuite huit notes comprises entre 23,5 et 19, puis six entre 17,5 et 15,5 et cinq entre 14,5 et 12,5, enfin les trois dernières entre 10,5 et 9.

On voit que l'écart de 21 points entre les extrêmes est assez notable et que l'influence des épreuves pratiques sur le classement des candidates est loin d'être négligeable. Ces deux compositions modifient assez sensiblement les rangs de quelques-unes des admissibles, et ces changements jouent un rôle important, surtout dans la « région moyenne », celle où, justement, intervient la coupure entre reçues et non-reçues, compte tenu du nombre des « places » mises au concours.

On ne saurait donc trop insister pour que la préparation de ces épreuves ne soit pas négligée. Il convient d'ailleurs de remarquer qu'elles permettent de révéler certaines qualités fort appréciables d'ordre, de méthode, de savoir-faire réfléchi, pour la mise en œuvre précise de quelques connaissances fondamentales, n'exigeant du reste aucune érudition particulière, et pour la présentation correcte et élégante d'une construction, d'un calcul, d'un résultat.

Voici les observations relatives à ces deux épreuves :

COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE : M. HOCQUENGHEM

Énoncé du problème

Le point O, origine des coordonnées, est le centre de la feuille. L'axe Oy, confondu avec la ligne de terre, est orienté positivement de gauche à droite ; l'axe Ox, de bout, est orienté positivement vers l'avant, et l'axe Oz, vertical, est orienté positivement vers le haut.

L'unité étant le millimètre, on donne les trois points

; P(100, 0, 60) ; Q(100, 65, 60) ; R(100, 49, 88).

On désigne par (C) le cercle, situé dans le plan frontal des points P, Q, R ($x=100$), ayant pour centre le point Q et passant par le point R.

Le cercle (C) en tournant autour de la verticale du point P engendre une surface (T). On désigne par (L) la section de (T) par le plan de bout contenant les points P et R.

La courbe (L) en tournant autour de la droite PR engendre une surface (S).

1° Construire l'intersection complète des surfaces (T) et (S).

2° Représenter la portion de surface (S), supposée infiniment mince, et opaque, située à l'intérieur de (T).

3° Dans une notice écrite à l'encre sur les parties libres de la feuille on justifiera brièvement les tracés :

a) en établissant la nature de la méridienne de la surface (S) ;

b) en démontrant les propriétés remarquables de l'intersection des deux surfaces (S) et (T) ;

c) en expliquant la construction du point courant du contour apparent horizontal de la surface (S).

Les lettres utiles pour faciliter l'explication pourront être placées sur l'épure.

Observations

Toutes les candidates ont vu que le plan de bout passant par les points P et R est bitangent au tore (T) et connaissent le théorème de Villarceau. Sauf quelques exceptions, les ellipses projections horizontales des cercles formant la section sont correctement construites.

Le point courant de l'intersection des deux tores est déterminé, soit comme point commun à deux surfaces de révolution, dont les axes sont dans un même plan, soit comme point d'une section plane d'un tore, une fois démontré ou admis que l'intersection se compose de courbes planes. Quant à la tangente en un point quelconque, elle est trop souvent construite comme intersection des plans tangents, alors que « la méthode des normales » est en général plus facile à utiliser.

Le fait que l'intersection des deux tores est formée de sections planes a été découvert expérimentalement par la plupart des candidates, mais les justifications correctes sont très rares. En général on se borne à des considérations sur les degrés et à une remarque sur l'alignement des projections

frontales de cinq points. Il convient de signaler quelques essais de raisonnements, plus ou moins réussis, faisant intervenir l'inversion. Une excellente démonstration est proposée par une candidate : la construction du point courant met en évidence un parallélogramme dont les côtés ont des directions fixes et dont le centre et une diagonale sont fixes ; il en résulte que l'autre diagonale est fixe et que les deux sommets correspondants décrivent une droite.

Le contour apparent horizontal du tore (S), dont l'axe est frontal, est construit point par point, dans plusieurs épreuves, par la méthode des sphères inscrites le long des parallèles. Quelques candidates savent que l'on obtient une courbe parallèle à une ellipse, mais les tracés qu'elles déduisent de cette propriété sont en général compliqués ; une autre utilise les sphères inscrites le long d'une demi-méridienne et obtient ainsi des résultats exacts, malgré certaines maladresses.

La ponctuation de la projection horizontale est fautive dans toutes les épreuves ; celle de la projection frontale a été faite correctement par deux candidates.

L'exécution graphique est en général médiocre ; seule une épreuve est assez propre pour ressembler à un dessin achevé. Quant à la notice, — si elle est brève, conformément à la recommandation de l'énoncé —, elle ne présente trop souvent que des démonstrations ou des raisonnements assez vagues.

Les notes s'échelonnent largement : après un 17, un 16 et deux 15, on trouve deux 13, deux 12 et un 11, puis trois 9, deux 8, dix notes entre 6 et 3, et un 2. La moyenne de l'épreuve est voisine de 8,5.

COMPOSITION DE CALCUL NUMÉRIQUE : M. DUGUÉ

Énoncé du problème

1° On considère la série entière $1 + \frac{u^2}{(1!)^2} + \dots + \frac{u^{2p}}{(p!)^2} + \dots$ convergente dans tout le plan de la variable complexe u ; soit $\varphi(u)$ sa somme. Calculer les valeurs approchées à $1/10^7$ près par défaut du nombre $\varphi(1)$, ainsi que de la partie réelle et du coefficient de i du nombre $\varphi\left(\frac{1+i}{2}\right)$.

2° On considère la fonction de la variable complexe z $F(z) = \frac{e^{az}}{\sqrt{1-z^2}}$, a étant une constante, la détermination du radical étant prise égale à 1 pour $z=0$.

Calculer le résidu à l'infini de $F(z)$, en utilisant le développement en série de Laurent de cette fonction, valable dans la région extérieure au cercle défini par $|z|=1$. Montrer que ce résidu, qui dépend de a , s'exprime simplement au moyen de la fonction φ .

Calculer l'intégrale $I(a) = \int_{-1}^{+1} F(z) dz$.

Observations

Cette composition, qui ne comportait pas de difficultés spéciales, a été dans l'ensemble correctement réussie. Les deux tiers des candidates ont obtenu la précision demandée pour le calcul numérique ; cependant, certaines ont utilisé beaucoup plus de termes qu'il n'était nécessaire, marquant ainsi quelque insuffisance dans la conduite raisonnée des opérations.

La justification théorique demandée ensuite a montré une connaissance correcte des débuts de l'analyse dans presque toutes les copies ; pourtant, on trouve parfois des indications telles que « résidus autour des points critiques... ».

Les reproches que l'on peut adresser très généralement aux candidates concernent la présentation : les calculs sont mal, ou ne sont pas, ordonnés ; ils sont fréquemment difficiles à « déchiffrer » et à comprendre ; la rédaction est négligée, souvent défectueuse, et presque toujours trop longue. La solution complète de ce petit problème pouvait être exposée très brièvement.

Ces remarques expliquent le « tassement » de la majorité des notes, qui se répartissent ainsi : sept notes comprises entre 13,5 et 12, six entre 11 et 10, neuf entre 9 et 7, puis un 6,5, un 4 et un 2,5. La moyenne générale de cette épreuve, pour les vingt-cinq admissibles, est 9,5.

EPREUVES ORALES

Selon la coutume, un tirage au sort a attribué à chacune des vingt-cinq admissibles une leçon de « Mathématiques Élémentaires » et une leçon de « Mathématiques Spéciales », préalablement associées par le Jury. Voici d'abord la liste de ces cinquante questions, avec l'indication, pour les « Élémentaires », de la classe devant laquelle elles devaient être traitées ; les numéros entre parenthèses accompagnant chacun des textes d'« Élémentaires » et de « Spéciales » correspondent au groupement des deux sujets exposés par chaque candidate :

Leçons de Mathématiques « Élémentaires »

(1) Arithmétique : définition et extraction de la racine carrée d'un nombre entier à une unité près (Classe de Mathématiques). — (2) Arithmétique : opérations sur les fractions (la définition des fractions et les propriétés d'égalité et d'inégalité sont supposées déjà traitées). (Classe de Mathématiques). — (3) Première leçon sur les nombres positifs et négatifs. (Classe de Mathématiques). — (4) Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. (Classe de Seconde C et Moderne). — (5) Les deux systèmes fondamentaux de relations entre les côtés et les angles d'un triangle quelconque ; équivalence de ces deux systèmes. (Classe de Mathématiques). — (6) Traiter un ou deux exemples de résolution de triangle en dehors des cas classiques. (Classe de Mathématiques). — (7) Cosmographie. Inégalité des jours et des nuits aux diverses latitudes. (Classe de Mathématiques). — (8) Mouvement circulaire uniforme ; projection sur un diamètre de la trajectoire. Mouvement rectiligne défini par une équation de la forme :

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\omega t + \beta).$$

(Classe de Mathématiques). — (9) En fin d'année, dans la classe de Seconde C et Moderne, traiter, à titre de révision, quelques exemples de problèmes de constructions géométriques. — (10) Plans tangents aux surfaces coniques et cylindriques ; plans tangents à la sphère. (Classe de Première C et Moderne). — (11) Première leçon sur le volume des parallélépipèdes et des prismes. (Classe de Première C et Moderne). — (12) Faisceaux harmoniques de droites. Applications. (Classe de Mathématiques). — (13) Lieu géométrique des points M d'un plan orienté tels que, A et B étant deux points fixes de ce plan, l'un des angles des vecteurs $\vec{MA}$ et $\vec{MB}$, ou des droites MA et MB, ait une mesure algébrique donnée. (Classe de Mathématiques). — (14) Faisceaux linéaires de cercles. (Classe de Mathématiques). — (15) Translation et rotation dans l'espace, définies comme transformations ponctuelles. (Classe de Mathématiques). — (16). Première leçon sur l'inversion. (Classe de Mathématiques). — (17) Applications de l'inversion, les propriétés classiques de l'inversion étant supposées connues. (Classe de Mathématiques). — (18) Problèmes classiques sur les tangentes à une conique ; théorèmes de Poncelet. (Classe de Mathématiques). — (19) Equations de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à leurs axes de symétrie. Applications. (Classe de Mathématiques). — (20) Rabattements en géométrie descriptive. Applications. (Classe de Mathématiques). — (21) Conditions pour que quatre points soient sur un cercle (leçon de révision). Applications. (Géométrie pure. Classe de Mathématiques Supérieures). — (22) Etude, en géométrie plane, des cercles tangents à deux cercles donnés. (Géométrie pure. Classe de Mathématiques Supérieures). — (23) Similitude plane. (Géométrie pure. Classe de Mathématiques Supérieures). — (24) Transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle. (Géométrie pure. Classe de Mathématiques Supérieures). — (25) Sections planes d'un cône de révolution. (Géométrie pure. Classe de Mathématiques Supérieures).

Leçons de Mathématiques Spéciales

(10) Première leçon sur les déterminants. — (16) Résolution d'un système d'équations linéaires, le cas des systèmes dits de « Cramer » étant supposé déjà étudié. — (12) Elimination d'une inconnue entre deux équations algébriques entières ; résultant. — (17) Transformation d'une équation algébrique entière par une substitution rationnelle portant sur une seule racine ; applications. — (20) Fonction exponentielle. — (24) Fonction logarithmique. — (22) Théorème de Rolle et formule des accroissements finis ; applications. — (21) Formule de Taylor pour les fonctions d'une variable ; applications. — (18) Développements limités d'une fonction ; développement limité d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction de fonction ; applications. — (14) Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables ; applications. — (9) Première leçon sur l'intégrale définie d'une fonction continue. — (25) Changement de variable dans une intégrale définie et dans une intégrale indéfinie ; applications. — (15) Equations

tion différentielle linéaire du premier ordre ; exemples. — (23) Multiplification des séries absolument convergentes, à termes réels ou complexes ; application aux séries entières. — (13) Les généralités sur les séries à termes réels et à termes complexes étant supposées traitées, établir les caractères de convergence dits de « Cauchy » et de « d'Alembert » pour les séries à termes positifs et pour les séries à termes quelconques. Exemples. — (11) Développement en série entière de la fonction $(1+x)^{\alpha}$, α étant une constante réelle. Applications. — (2) Produit vectoriel de deux vecteurs ; applications. — (6) Systèmes de vecteurs glissants. Moment résultant. Axe central. Équivalence de deux systèmes de vecteurs glissants (l'étude des moments d'un vecteur glissant est supposée déjà faite). — (3) Géométrie analytique : étude d'une courbe plane au voisinage d'un de ses points ; tangente ; concavité. Exemples. — (1) Courbure d'une courbe plane. — (5) Enveloppe d'une famille de droites dans le plan. — (7) Géométrie analytique dans l'espace : tangente et plan osculateur à une courbe. — (8) Directions principales des surfaces du second ordre. — (19) Travail d'une force ; théorème de la force vive pour un point matériel. — (4) Mouvement d'un point sous l'action d'une force centrale inversement proportionnelle au carré de la distance ; différentes formes de trajectoires. L'étude détaillée du mouvement ne sera faite que dans le cas d'une trajectoire circulaire et dans celui d'une trajectoire elliptique.

(Toutes les leçons de Mathématiques Spéciales devaient être traitées dans une classe de Mathématiques Spéciales).

Les sujets proposés étaient, on le voit, très classiques et ne pouvaient guère embarrasser, quant au fond, une candidate ayant normalement préparé les épreuves du concours. En fait, les lacunes graves dans les connaissances fondamentales se sont révélées assez rares, et, dans cet ordre d'idées, les défauts qui apparaissent, plus fâcheux parfois qu'un manque de savoir sur tel ou tel point, relèvent plutôt d'une insuffisance ou d'une mauvaise compréhension de la question traitée, d'une certaine maladresse, ou d'une certaine négligence, manifestée lorsqu'il s'agit de replacer cette question dans un ensemble, — de lui donner des proportions justes, ou, au moins, raisonnables, — de la présenter dans un ordre valable en mettant en évidence les faits essentiels, ceux qu'il conviendrait de fixer avant tout dans l'esprit des élèves.

La structure d'un exposé figure évidemment parmi les éléments d'appréciation d'ordre pédagogique, et, si l'oral de l'agrégation ne permet guère de prévoir quel serait le comportement de la candidate en présence d'élèves « réels », ni quelle est son aptitude à faire vivre une classe, à intéresser profondément un auditoire de débutants, à le faire participer valablement à la recherche d'un raisonnement ou d'une solution, après lui avoir appris ce qu'est effectivement une telle recherche à partir d'une question bien posée, et d'abord soigneusement analysée et comprise, — il donne cependant des indications très précieuses sur certaines qualités d'esprit et de caractère qui jouent un rôle important dans l'accomplissement des tâches

incombant à un professeur, et qu'il semble possible d'acquérir ou de développer au cours même de la préparation, pour peu qu'on y prête quelque attention et qu'on y apporte quelque volonté.

Parmi ces qualités, il en est de primordiales, comme le bon sens, la rectitude du jugement, qui ne manquent pas de se révéler dans la bonne organisation, dans l'équilibre de l'ordonnance d'une leçon. D'autres, touchant davantage à la forme, à l'extérieur, ne sont pas du tout négligeables et contribuent sans aucun doute à rendre plus efficace l'action du maître, à donner plus de valeur à l'influence qu'il exerce sur ses élèves. L'épreuve orale du concours est, à leur égard, parfaitement probante. Reprendre, à ce sujet, quelques observations déjà formulées dans des rapports antérieurs n'est peut-être pas inutile, puisque chaque année montre, dans ce domaine, le retour de fautes ou d'erreurs sur lesquelles l'attention des candidates avait déjà été attirée.

Ne faut-il pas redire, par exemple, qu'un exposé risque fort de perdre beaucoup de sa portée et de sa signification s'il est présenté, même correctement, avec une telle rapidité dans le débit que l'important et l'accessoire finissent par se confondre, emportés dans un torrent de mots qui ne laisse plus apercevoir les nuances, ni les articulations marquant les étapes successives de la pensée ? Ce défaut est fréquent, et il ne peut trouver une excuse dans la limitation de durée qu'impose le règlement, car les sujets proposés peuvent toujours être valablement traités dans les cinquante minutes prévues pour chaque leçon ; il faut naturellement qu'un effort de composition et qu'un choix interviennent, ce qui exige évidemment que la question soit suffisamment « dominée », qu'on en ait saisi correctement le sens, qu'on sache la situer.

Ne faut-il pas rappeler également quelle est l'importance de la forme apparente, de la présentation extérieure, qui sont presque inévitablement le reflet de la pensée et des qualités d'esprit, et qui figurent aussi parmi les éléments essentiels de l'impression que l'auditoire peut ressentir et du jugement qu'il est tenté, ou obligé, de formuler ? Que le « vocabulaire » soit soigneusement contrôlé, — que la phrase soit bien construite, — que le schéma tracé au tableau, pour faciliter la compréhension de l'exposé, soit clair, — que les figures ou les calculs nécessaires pour suivre un raisonnement soient bien ordonnés, lisibles et restent en bonne place autant qu'il est utile, ... : ce sont là recommandations élémentaires, dont certaines s'appliquent aussi bien aux épreuves écrites qu'aux épreuves orales.

Ces dernières remarques me donnent l'occasion d'attirer l'attention sur un détail grammatical qui mérite, je crois, d'être signalé : il s'agit d'une tournure de phrase, d'abord admise unanimement comme parfaitement normale, et qui, par une extension assez naturelle, est devenue, me semble-t-il, intolérable. Pour poser la question, le mieux est de prendre comme exemple le texte incriminé, qui est extrait de l'une des copies de *Mathématiques Élémentaires* du concours de 1951 ; le voici : « *Les enveloppes des coniques (C) sont deux coniques de foyers F et R, de cercles directeurs relatifs à R les enveloppes des cercles directeurs correspondant au*

« foyer F' ». Bien sûr, l'on comprend ce que la candidate a voulu dire, et la forme correcte se rétablit aisément, mais n'est-il pas fâcheux que les mathématiques paraissent ainsi disposer, à côté d'un vocabulaire technique indispensable, d'une syntaxe spéciale que rien de valable ne justifie, je crois, pas même une raison d' « économie » dans l'expression de la pensée. Si j'ai cru devoir souligner cette phrase, prise au hasard parmi d'autres semblables, c'est parce qu'elle dérive directement de locutions couramment employées, telles que : « le cercle de centre A », « l'ellipse de foyers A et B », , qui nous sont parfaitement familières, et qui ne paraissent choquer personne ; peu à peu, assez logiquement, des expressions construites sur ce modèle (les lettres A, B, . . . remplacent en réalité, dans les locutions précédentes, des substantifs précédés d'un article défini) ont été utilisées, et il n'est plus rare aujourd'hui d'entendre, ou de lire : « *le cercle de centre l'origine* », « *la parabole de foyer F et de tangente au sommet la droite de Simson de F...* ». Je ne me charge point de fixer le moment où l'incorrection, s'il y en a une, devient flagrante ; peut-être existait-elle dès le début ? Il serait alors facile d'y remédier, en s'habituant à dire : « le cercle ayant A pour centre », ou « le cercle dont le centre est A »...

Les observations et les critiques relatives à chacune des cinquante leçons entendues par le jury ont été faites directement aux candidates, à la fin du concours ; je n'en rappellerai ici que quelques-unes.

En arithmétique, la leçon sur la définition et l'extraction de la racine carrée d'un entier à une unité près contenait l'essentiel des propriétés qui conduisent à la solution traditionnelle du problème, et même une remarque intéressante, rarement exprimée, sur la possibilité de limiter inférieurement et supérieurement, au moyen de deux divisions, la valeur du chiffre des unités de la racine, lorsque le nombre des dizaines est déjà connu. Pourtant l'exposé donnait une impression de confusion, due sans doute en partie à un débit bien trop rapide, mais aussi à une certaine négligence dans la mise en évidence des étapes successives de la théorie, qui se construit à partir de deux résultats : détermination du nombre des dizaines de la racine, puis détermination du chiffre des unités, mais qui doit comporter aussi quelques explications claires sur la mise en jeu progressive de ces deux résultats, et sur les simplifications que suggère la pratique, peu à peu dégagée, de l'opération. L'une des difficultés que l'on rencontre dans cet exposé provient du fait que le raisonnement repose en grande partie sur le maniement et sur l'interprétation de relations d'inégalité entre nombres entiers, et il convient de montrer le rôle important que jouent dans cette étude une observation attentive des éléments que l'on fait intervenir et un examen réfléchi des relations qui existent entre eux. Notons, à ce propos, que la racine carrée à une unité près d'un entier est souvent définie en remarquant simplement que la suite ordonnée des carrés des entiers est une suite croissante, sans établir qu'il existe toujours au moins un terme de cette suite qui est supérieure à un nombre arbitrairement choisi, c'est-à-dire que le terme général de cette suite tend vers l'infini ; la lacune est

évidente, car ces deux propriétés de la suite des carrés interviennent l'une et l'autre dans la question. De même, il paraît utile de traduire explicitement, par une double inégalité, l'encadrement du reste de l'opération entre zéro et le double de la racine carrée à une unité près par défaut, ces deux nombres inclus, car si l'on se borne à l'inégalité limitant supérieurement le reste, on ne fait pas apparaître que cet entier peut être effectivement nul. Une remarque analogue s'applique d'ailleurs au reste de la division d'un entier par un autre, ou au reste de la division d'un polynôme à une variable par un autre (le polynôme identiquement nul jouant ici le rôle que joue le nombre zéro en arithmétique).

L'étude des opérations sur les fractions, en supposant déjà connues la définition et les propriétés d'égalité et d'inégalité, a été faite en utilisant raisonnablement un point de départ concret, lié à la mesure des longueurs. Cette leçon aurait été bien meilleure, bien plus efficace, si la candidate avait pris le soin de dégager nettement l'application des idées générales qu'elle avait exposées au début, comme préliminaire, de définir effectivement les nouveaux symboles opératoires, et de faire ressortir l'importance du problème de la division et de la notion de quotient exact. Sans doute la crainte, peu justifiée, de ne pas avoir « tout dit » dans le temps réglementaire, explique-t-elle la hâte, pleine de dangers, avec laquelle cet exposé a été présenté.

Une première leçon sur les nombres positifs et négatifs a été construite à partir des propriétés, supposées déjà connues, des vecteurs portés par une même droite ; mais le simple rappel de ces propriétés, en particulier de celles d'entre elles qui concernent les sommes et les différences vectorielles, peut laisser quelque doute sur la valeur logique de la théorie, quand rien n'indique comment elles ont été « démontrées ». Il importe, bien entendu, comme dans tous les exposés analogues où sont présentés des êtres nouveaux, que les symboles de comparaison et d'opérations apparaissent bien, eux-mêmes, comme des symboles nouveaux, malgré leur ressemblance formelle avec ceux que l'on connaît déjà ; si ce point de vue n'est pas nettement précisé, une certaine confusion risque fort de se produire.

Dans le leçon sur les cas « non classiques » de résolution de triangles, où l'on demandait seulement de traiter un ou deux exemples, la candidate a choisi deux problèmes de types assez différents, en s'efforçant de dégager quelques idées générales des remarques faites au cours de la solution. L'une des parties les plus délicates, dans ces questions, concerne « la mise en équations », et il importe de faire apparaître dans quelle mesure le système de relations algébriques et trigonométriques que l'on résout en définitive représente fidèlement l'ensemble des conditions imposées dans l'énoncé. Les raisonnements, sur ce point, sont parfois difficiles à conduire, surtout lorsque interviennent des éléments autres que les côtés et les angles du triangle. Mais une étude de ce genre, si elle est bien menée, en allant au fond de l'analyse des idées, est susceptible de constituer un excellent modèle de recherche.

En cosmographie, l'inégalité des jours et des nuits aux diverses lati-

tudes constitue un sujet qui n'exige, pour être traité, que la connaissance de faits fondamentaux, et le recours à l'Annuaire du Bureau des Longitudes, mis à la disposition des candidates, devrait à peine être nécessaire. Il s'agit, en fait, pour l'exposer, de construire la solution d'un problème dépendant de deux variables, d'en ordonner clairement la discussion en fonction de la signification concrète de ces deux paramètres, après avoir mis en évidence le rôle que joue chacun d'eux et précisé l'ordre dans lequel on les fera entrer en jeu. Les deux modes de présentation que l'on peut adopter suivant que l'on fixe d'abord la latitude du lieu d'observation, ou bien la déclinaison du soleil, sont valables l'un et l'autre, et, à certains égards, se complètent. Parmi les défauts que l'on relève fréquemment dans cette leçon, et qui indiquent sans doute que la question n'est pas très sûrement dominée, on peut citer, par exemple, le fait de ne pas donner en temps opportun, ou même de ne pas donner du tout, une explication logique du partage de la terre en zones par les tropiques et par les cercles polaires, — l'insuffisance des indications concernant le mouvement apparent du soleil dans les différentes zones, de part et d'autre de l'équateur, particulièrement dans la zone tropicale, et dans les zones glaciales, — l'absence, presque totale, d'un commentaire sur les saisons aux différentes latitudes.

Une leçon de révision, en fin d'année, dans la classe de Seconde, sur les problèmes de constructions semblait facile à composer, et la matière ne risquait guère de faire défaut. Si la candidate a eu, au départ, l'excellente pensée de souligner que l'étude attentive d'une construction géométrique pouvait conduire à la découverte et à la démonstration naturelle de certaines propriétés d'une figure, puis, si elle s'est efforcée d'ordonner son exposé autour de quelques idées directrices, elle n'a cependant pas fait ressortir avec assez de netteté, ni surtout avec assez de persévérance, la structure des modes de raisonnement qui doivent intervenir dans la solution de ces problèmes. Et plusieurs des exemples choisis, qui auraient dû apparaître comme des modèles, furent traités avec une certaine maladresse, parfois même avec des lacunes ou des fautes qui en amenuisaient quelque peu la valeur. Convient-il de rappeler, une fois encore, que l'hypothèse « supposons le problème résolu », ou toute autre équivalente, faite au départ, ne peut conduire qu'à des propriétés nécessairement vérifiées par la figure que l'on cherche à réaliser, et que l'on ne peut pas substituer aux conditions initialement imposées les conditions nouvelles ainsi obtenues, si l'on n'a pas établi, par une étude de « réciproque », la validité de ce remplacement ?

Lorsque l'on expose, dans une classe de Première, le début de l'étude des volumes, il ne paraît pas très indiqué d'introduire prématurément l'idée de mesure, avant même d'avoir posé le problème de la comparaison des volumes des polyèdres ; en particulier, la définition de l'équivalence de deux polyèdres peut être construite à partir de la notion géométrique de somme de polyèdres. On peut ainsi obtenir un développement de la théorie tout à fait analogue, au moins dans ses débuts, à celui que les élèves connaissent déjà à propos des aires des polygones plans.

Une leçon sur les faisceaux harmoniques de droites est relativement

facile ; mais il est bien évident qu'elle est incomplète si elle ne met pas en évidence la propriété essentielle de « projectivité » des divisions et des faisceaux harmoniques. Un détail de présentation mérite sans doute aussi d'être signalé : la dénomination de « faisceau harmonique de quatre droites » ne prend tout son sens que lorsqu'on a établi qu'il existe bien une propriété appartenant au système de droites joignant un point de l'espace à quatre points alignés formant une division harmonique ; il paraît donc préférable de donner le qualificatif d'« harmonique » à un tel système seulement après avoir démontré que les quatre points d'intersection par une sécante quelconque forment toujours une division harmonique.

L'étude des rabattements en géométrie descriptive gagnera beaucoup en netteté et en simplicité, d'une part, si l'on met bien en évidence dès le début la nécessité de choisir l'une des deux rotations possibles autour de la charnière pour que le rabattement soit bien déterminé ; d'autre part, si l'on a établi en bonne place, c'est-à-dire dès que l'on a étudié le rabattement d'un point du plan étudié, qu'il existe une correspondance par affinité entre les rabattements des différents points du plan et les projections orthogonales de ces mêmes points sur le plan de référence. Ces remarques ont été déjà signalées ; c'est à partir d'elles que l'on peut donner les solutions pratiques du problème du rabattement d'une figure et du problème du « relèvement ».

Les problèmes classiques sur les tangentes aux coniques peuvent être traités par différentes méthodes, également valables ; il convient de remarquer, à ce sujet, que les propriétés tangentielles de l'ellipse ou de l'hyperbole relativement à leur cercle principal, et celles de la parabole relativement à sa tangente au sommet sont aussi faciles à exploiter que celles qui font intervenir un cercle directeur ou la directrice, et qu'elles permettent parfois de mettre en évidence des propriétés que l'emploi des cercles directeurs rend moins apparentes, comme, par exemple, la symétrie, par rapport au centre, des tangentes à une ellipse ou à une hyperbole parallèles à une direction donnée, et des points de contact de ces tangentes. Il est à remarquer, à propos de cette leçon, que les problèmes élémentaires de construction qui y sont traités peuvent être résolus simplement en faisant intervenir, dès le début, des conditions nécessaires et suffisantes correspondant aux propriétés caractéristiques des tangentes aux coniques. Peut-être n'est-il pas inutile de rappeler, à propos de la discussion de l'un de ces problèmes, que les conditions pour que deux cercles soient sécants ne sont autres que les conditions d'existence d'un triangle admettant pour côtés la distance des centres des deux cercles et leurs deux rayons, et que ces conditions peuvent, par conséquent, être exprimées par la double inégalité d'encadrement de l'une quelconque de ces trois longueurs entre la somme et la valeur absolue de la différence des deux autres ; cette remarque évidente allège souvent bien des calculs, grâce à un choix convenable de celle des longueurs qui va jouer un rôle particulier.

Une leçon sur les équations de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à leurs axes de symétrie, intelligemment construite, a pourtant présenté le

grave défaut de ne pas exploiter raisonnablement et naturellement les propriétés de structure d'une formule qui avait été choisie, très valablement, comme point de départ. Partant de la définition de ces courbes au moyen d'un foyer, de la directrice associée et de l'excentricité, et prenant comme système d'axes de coordonnées l'axe focal de la conique et la perpendiculaire à cet axe menée par le foyer considéré, l'équation s'obtient facilement et peut être écrite sous la forme $y^2 = e^2 (h - x)^2 - x^2$. Il suffit alors de rappeler et d'utiliser les formes classiques que peut prendre le trinôme du second degré en x figurant au second membre de cette relation pour mettre en évidence, d'une part, le deuxième axe de symétrie, ainsi que les équations des coniques rapportées à leurs axes, d'autre part certaines propriétés simples des deux courbes relatives aux tangentes aux sommets situés sur l'axe focal. L'occasion était donnée par là d'attirer l'attention sur le double courant qu'il faut savoir établir entre les faits algébriques et les faits géométriques ; l'exposé, ainsi présenté au niveau de la classe de Mathématiques, pouvait donc prendre une véritable valeur d'initiation à l'idée fondamentale de la géométrie analytique. Il n'est pas inutile de noter, au sujet de cet exposé, que la définition adoptée au départ pour l'ellipse laisse de côté le cercle.

Parmi les aspects variés qu'il convient de signaler dans l'étude des cercles tangents à deux cercles donnés, il importe de ne pas oublier celui qui fournit la considération des homothéties transformant l'un quelconque des cercles cherchés en l'un ou en l'autre des cercles donnés, et ayant respectivement pour centres les points de contact ; les propriétés classiques des homothéties par lesquelles se correspondent trois cercles pris deux à deux font alors apparaître certains caractères importants de la figure, particulièrement ceux qui concernent la nature des contacts. Ces résultats apportent un utile complément à ceux que l'on obtient par l'emploi de l'inversion, et facilitent sensiblement la solution générale du problème.

L'étude des sections planes d'un cône de révolution est parfois abordée en utilisant une propriété caractéristique des points d'une surface conique de révolution circonscrite à une sphère, faisant intervenir la puissance d'un point par rapport à cette sphère et la distance de ce point au plan du cercle de contact ; c'est là une conception tout à fait acceptable, mais il est évidemment nécessaire, pour que le raisonnement apparaisse dans toute sa rigueur, que l'on commence par donner de cette propriété, sinon la démonstration, du moins l'énoncé précis et complet, faisant bien ressortir les éléments mis en jeu.

Revenant à l'algèbre, la leçon sur les systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues, en Seconde, avait été commencée, très raisonnablement, par le rappel des résultats obtenus en résolvant une équation linéaire à deux inconnues ; c'est là un bon point de départ, qui, bien exploité, conduit immédiatement à la résolution et à la discussion du système par la « méthode de substitution ». Il est assez curieux de constater, à propos de ce problème, qui est pourtant l'un de ceux que les apprentis mathématiciens ont dû rencontrer le plus fréquemment, et sous tous ses

aspects, au cours de leurs études, la permanence de fautes que l'on retrouve presque chaque année, soit dans les compositions écrites, soit dans les exposés oraux. C'est, par exemple, le fait d'affirmer que, si les deux déterminants $(ab' - ba')$ et $(cb' - bc')$ sont nuls, le déterminant $(ac' - ca')$ est lui-même obligatoirement nul, et, comme le hasard est parfois malicieux, l'exercice choisi par la candidate pour illustrer la théorie comportait justement le cas particulier où les deux coefficients b et b' des termes en y dans les équations proposées pouvaient s'annuler simultanément sans que les coefficients a , c et a' , c' soient, en même temps, proportionnels. Quant à l'interprétation géométrique du problème, elle doit être présentée, au niveau de cette classe, avec certaines précautions, en se référant à ce que les élèves connaissent ; en particulier, la notion d'équation d'une droite par rapport à un système de coordonnées cartésiennes, apparaît encore comme étroitement liée à celle de courbe représentative d'une fonction linéaire, et il paraît utile de rappeler, au moins succinctement, comment a été franchi le passage qui sépare l'idée de représentation graphique d'une fonction $y = ax + b$ de l'idée de détermination du lieu géométrique des points dont les coordonnées vérifient une relation telle que $Ax + By + C = 0$, car c'est bien l'idée de lieu géométrique qui intervient effectivement ici.

Il convient aussi de rappeler, à propos d'une leçon voisine, que les mots « racine » et « solution » ne peuvent se substituer l'un à l'autre quand il s'agit d'équations à plusieurs inconnues, et qu'il est incorrect de dire qu'une équation telle que $ax + by + c = 0$ admet une infinité de « couples de solutions », chaque solution de cette équation étant, par contre, constituée par un couple de nombres.

Dans l'étude de l'élimination d'une inconnue entre deux équations algébriques entières, en Mathématiques Spéciales, il est naturel d'établir une liaison entre ce problème et celui du plus grand commun diviseur de deux polynômes, ne serait-ce que pour ne pas omettre de parler de la racine commune, ou des racines communes, aux deux équations données, et de la structure des coefficients de l'équation donnant cette ou ces racines communes. Il est également utile de donner une indication précise sur le fait que le résultant de deux polynômes à une variable, dont les degrés sont au plus égaux à m et à p , s'annule quand les coefficients des termes, qui ont, dans le cas général, respectivement pour degrés m et p , deviennent tous les deux nuls.

Le maniement de la fonction inverse d'une fonction, et particulièrement de la relation qui existe entre les dérivées premières de deux telles fonctions, cause parfois des désastres quand l'énoncé du théorème, ainsi que le sens exact des notations mises en jeu n'ont pas été suffisamment précisés. C'est ainsi qu'une candidate a été amenée à écrire que la dérivée de la fonction exponentielle e^x , définie comme fonction inverse d'une fonction logarithmique, était égale à $x...$

La comparaison entre la formule classique des accroissements finis déduite du « théorème de Rolle », et la formule traduisant la définition élémentaire de la dérivée d'une fonction $f(x)$ en un point x_0 , est intéres-

sante à signaler ; elle prépare d'ailleurs l'étude des deux formes aujourd'hui classiques de la formule de Taylor, avec les restes dits de Lagrange et de Young ; mais il convient de faire comprendre que ces deux formules ne font pas intervenir les mêmes hypothèses relativement à la dérivée première de la fonction considérée. La formule généralisant la formule des accroissements finis et donnant une expression du rapport des accroissements de deux fonctions d'une variable en fonction du rapport des dérivées, et l'application de cette formule à la démonstration de la « règle de l'Hospital », doivent faire justement apparaître que l'existence des dérivées, pour la valeur particulière de la variable au voisinage de laquelle on étudie le problème, n'est pas obligatoirement requise, et que les résultats sont valables lorsque le rapport des dérivées existe à l'intérieur d'un intervalle dont l'une des bornes est précisément cette valeur particulière.

Dans l'étude de la formule de Taylor pour une fonction d'une variable, faisant intervenir le reste dit « de Young », il importe de remarquer que la seule condition requise pour la dérivée d'ordre maximum figurant dans la formule est son existence pour la valeur a de la variable au voisinage de laquelle on étudie la fonction, et non pas sa continuité ! D'ailleurs, cette formule, écrite sous la forme

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} [f^n(a) + g(x)],$$

définit en réalité $g(x)$ comme une fonction de x qui existe en même temps que $f(x)$, sauf pour la valeur a , et le « théorème » de Taylor-Young énonce simplement le fait que la fonction $g(x)$ ainsi déterminée est infiniment petite quand x tend vers a .

Au sujet des développements limités d'une fonction, il est bon d'attirer l'attention sur le cas du produit de deux fonctions admettant chacune un développement limité d'ordre n , au voisinage de $x=0$ par exemple ; lorsque ces fonctions sont infiniment petites en même temps que x , le développement limité de la fonction-produit, que l'on peut obtenir par une multiplication ordonnée suivant les puissances croissantes de x , est d'ordre supérieur à n .

Une partie importante de la leçon, dont le sujet était : « différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables », a été prise par des considérations, qui manquaient du reste souvent de netteté, sur les fonctions différentiables, et cette longue digression n'a été aucunement reliée à l'étude proprement dite de la notion de différentielle totale. Quant à la propriété fondamentale de la différentielle totale, c'est-à-dire l'invariance formelle de cette expression lorsqu'on effectue un changement de variables, sa démonstration exige, pour être claire et pour ne pas risquer d'être interprétée comme un simple jeu de lettres, que l'on adopte des notations suffisamment explicites, ne prêtant à aucune confusion, et que l'on commente avec précision l'interprétation qu'il convient de donner aux symboles utilisés.

La présentation de l'intégrale définie d'une fonction $f(x)$, définie et

continue dans un intervalle (a, b) est faite presque toujours à partir des « sommes S et s », et des sommes plus générales correspondant à des divisions de l'intervalle (a, b) en intervalles partiels consécutifs. L'exposé est classique, mais il comporte cependant, assez fréquemment, une lacune, car on y parle de limite de sommes telles que S et s , sans avoir remarqué, ou fait remarquer, que la notion de limite n'a été envisagée jusque-là que pour des fonctions d'un nombre fini de variables, et qu'il convient, par conséquent, de préciser le sens nouveau du mot « limite », et d'établir les propriétés élémentaires de ces limites qui vont être utilisées au cours de la théorie. D'autre part, il peut être intéressant de montrer comment ces sommes s'introduisent assez naturellement dans la recherche d'une primitive d'une fonction $f(x)$, en faisant remarquer qu'elles constituent des valeurs approchées de la différence des valeurs prises par l'une quelconque des primitives (s'il en existe) de la fonction $f(x)$ aux extrémités b et a de l'intervalle considéré.

L'étude des équations différentielles linéaires du premier ordre constitue aussi un sujet classique. Il importe évidemment, dans cette leçon, de souligner les caractères qui tiennent à la forme linéaire de l'équation, et que l'on retrouve dans les problèmes analogues. Les propriétés générales des courbes intégrales doivent naturellement trouver place dans cet exposé, qu'il est souhaitable de voir illustrer par quelques exemples présentant des particularités intéressantes.

Une leçon sur les règles de convergence, dites de Cauchy et de d'Alembert, avait été proposée, cette année, à la fois pour les séries à termes positifs et pour les séries à termes quelconques, réels ou complexes, en supposant déjà connues les généralités sur les séries. Le texte aurait dû attirer l'attention de la candidate sur l'extension du champ d'application de ces critères ; le fait que la divergence de la série des valeurs absolues ou de la série des modules, lorsqu'elle a été établie par l'application de l'une de ces règles, entraîne la divergence de la série elle-même, puisque le terme général ne peut alors tendre vers zéro, présente une importance évidente et mérite d'être signalé. Il convient aussi de donner leur véritable valeur aux conséquences que l'on déduit de certaines hypothèses d'inégalité vérifiées par la racine n^{e} du module du terme de rang n de la série, ou par le rapport des modules de deux termes consécutifs ; ces résultats ont en effet un caractère plus général que ceux qui font intervenir l'existence et la valeur des limites de ces expressions.

La recherche du développement en série entière en x de $(1+x)^x$, en utilisant une relation différentielle linéaire et homogène par rapport à la fonction et à sa dérivée première, peut être conduite sans faire appel aux propriétés des intégrales de l'équation différentielle formée à partir de cette relation, car il ne s'agit, en fait, que de comparer deux fonctions définies et dérivables dans l'intervalle $(-1, +1)$ et vérifiant toutes deux la relation ; l'une de ces fonctions $(1+x)^x$, est certainement non nulle dans l'intervalle, l'autre est la somme $f(x)$ d'une série entière ayant pour rayon de convergence l'unité ; la relation différentielle permet d'établir bien sim-

plement que le quotient de $f(x)$ par $(1+x)^2$ a une dérivée identiquement nulle dans l'intervalle ; on en déduit le développement cherché.

Une leçon sur le produit vectoriel de deux vecteurs a été fâcheusement marquée, non point par de graves erreurs techniques, mais par un manque complet d'équilibre dans la conception du sujet. Il ne pouvait s'agir, en effet, de présenter, sous prétexte d'application, toute la théorie des vecteurs glissants, y compris l'équivalence et la réduction des systèmes de vecteurs. Une telle conception de l'exposé ne pouvait guère conduire qu'à une présentation un peu vertigineuse d'une multitude de questions, au détriment de la clarté, et souvent de la rigueur. Les parties un peu délicates, concernant la propriété de distributivité de la multiplication vectorielle par rapport à l'addition, ou bien le problème de la division vectorielle, ont été, de ce fait, assez négligées, alors qu'elles constituent des points essentiels de la théorie.

Un exposé sur les tangentes et les plans osculateurs à une courbe a été, dans l'ensemble, fort correct, manifestant en particulier le très légitime souci d'établir que l'existence de ces éléments et leurs propriétés sont indépendantes de la représentation paramétrique de la courbe. Cependant, dans l'étude de ces problèmes, il serait intéressant de montrer, tout en restant dans un domaine très élémentaire, que la détermination de la tangente ou du plan osculateur en un point ne fait pas intervenir nécessairement les vecteurs dérivés du « vecteur-espace » et ne suppose pas obligatoirement que la formule de Taylor, sous sa forme vectorielle, est applicable en chaque point ; des exemples simples, utilisant les fonctions classiques pourraient facilement être imaginés pour illustrer une telle remarque.

Cette observation est encore plus importante lorsqu'il s'agit de l'étude d'une courbe plane au voisinage d'un point ; l'emploi des dérivées vectorielles successives fournit un exposé assez commode et donnant l'impression d'une grande généralité. Mais il convient peut-être de distinguer le point de vue théorique, naturellement très important, où pourra apparaître l'idée de l'ordre de contact de la courbe et de la tangente en l'un de ses points, et le point de vue pratique, où certaines propriétés élémentaires peuvent souvent intervenir pour faciliter l'étude : par exemple, le fait que, pour une courbe définie en coordonnées cartésiennes par une équation résolue par rapport à l'une des coordonnées y en fonction de l'autre x , le sens de variation dans un intervalle de la dérivée première de la fonction y de x permet de définir la position de la courbe par rapport à la tangente en chacun des points de cet intervalle, sans qu'il soit obligatoire de recourir à la dérivée seconde.

L'étude de la courbure d'une courbe plane en un point est fréquemment abordée en introduisant *à priori* un élément algébrique (courbure ou rayon de courbure), sans qu'apparaisse nettement une justification valable de l'idée d'orientation ainsi mise en jeu, car la comparaison avec un cercle, très naturellement évoquée, ne suggère pas nécessairement la nécessité d'une convention de cette nature. Il est certain que la théorie de la courbure orientée conduit à des résultats simples et très utiles pour l'étude

d'ensemble d'une courbe ; cependant, l'étude locale faite systématiquement à ce point de vue peut masquer certains aspects géométriques simples de la question, et l'apparition tardive, presque à la fin de la leçon, du cercle osculateur paraît reléguer au second plan une notion très importante. Dans un autre ordre d'idées, il convient de ne pas oublier que la définition classique de la courbure en un point fait intervenir, en même temps qu'une mesure de longueur, une mesure d'angle, ce qui suppose le choix d'une unité angulaire. Signalons enfin que l'emploi, très naturel dans cette théorie, d'un produit vectoriel, formé avec les vecteurs « vitesse » et « accélération », risque de provoquer quelques erreurs si on fait intervenir, dans les calculs, ce vecteur comme un nombre, en le confondant, sans le dire, avec sa mesure algébrique sur un axe que l'on n'a pas pris soin, du reste, de situer.

Une leçon sur le travail d'une force a été fâcheusement encombrée de longues considérations sur les premières notions que l'on rencontre au début d'un cours de mécanique, et n'a finalement point fait apparaître de définition claire du travail. L'un des dangers que présente l'exposé de cette théorie provient du maniement d'expressions qui ne sont pas nécessairement des différentielles totales, alors qu'elles en ont apparemment la forme, et l'emploi d'un vocabulaire approximatif, ne serrant pas de près la question, risque fort de créer des incompréhensions et des idées fausses.

Au sujet de la recherche des trajectoires d'un point soumis à l'action d'une force centrale inversement proportionnelle au carré de la distance, je n'insisterai pas sur la remarque classique relative à l'équivalence du système des équations différentielles du second ordre traduisant la relation fondamentale de la dynamique et du système constitué par les deux intégrales premières exprimant la « loi des aires » et le théorème des forces vives ; je me bornerai à attirer l'attention sur la conduite du calcul, lorsqu'on résout le problème à partir de ces deux intégrales premières : d'abord, il est naturel de justifier d'un mot, une fois mis à part les mouvements rectilignes, la possibilité de prendre comme variable indépendante, en coordonnées polaires, l'angle polaire du mobile ; puis, lorsqu'a été formée l'équation différentielle du premier ordre qui relie l'angle polaire et le rayon vecteur du point, une observation un peu attentive de la structure algébrique de cette équation fait apparaître un trinôme du second degré par rapport à l'inverse du rayon vecteur, et suggère un changement de variable qui ramène très simplement l'intégration à celle d'une équation telle que $s'^2 + s^2 = K$, s' étant la dérivée de s par rapport à l'angle polaire, et K une constante ; enfin, si l'on dirige avec soin les opérations, en déterminant en temps opportun les valeurs des constantes en fonction des données initiales, les différentes formes possibles de trajectoires sont facilement mises en évidence. A ce propos, le fait que, seules, l'intensité de la vitesse initiale et la distance initiale du mobile au centre des forces interviennent dans la discrimination des trajectoires elliptique, parabolique et hyperbolique (dans le cas d'une force attractive) est assez remarquable pour qu'on n'omette pas de le signaler. Quant à l'étude du mouvement, qui

n'était demandée ici que pour les trajectoires circulaires et elliptiques, elle est évidemment insuffisante si elle se borne à quelques indications sur le sens de rotation du rayon vecteur, même accompagnées d'un commentaire sur la « troisième loi de Képler » ; un tel commentaire ne prend sa véritable valeur que si l'on montre les liaisons existant entre le problème traité et le problème du mouvement des planètes, en rappelant, bien entendu, le rôle et la portée des deux premières « lois de Képler ».

*

**

La répartition des notes de l'oral présente les particularités suivantes :

En Mathématiques Élémentaires, l'échelonnement est presque régulier de 15 à 7 sur 20 : deux 15 ; un 14,5 ; deux 14 ; un 13,5 ; trois 13 ; sept notes de 12 à 11 : trois 10 ; deux 9 ; quatre notes de 8 à 7. La moyenne pour l'ensemble de ces leçons est d'environ 11,25 ; elle est légèrement inférieure à celle de l'an dernier (11,5). On voit donc que les meilleures leçons n'ont pas été particulièrement brillantes, et que les moins bonnes étaient loin d'être franchement mauvaises. Il est souhaitable qu'un sérieux effort de réflexion soit fait, par les futures candidates, afin de dominer suffisamment l'ensemble des théories, qui formeront justement, pour la plupart, la matière de leur enseignement, et afin de clarifier leurs idées sur un certain nombre de notions et de méthodes fondamentales. Il s'agit bien d'ailleurs d'un effort personnel, conduit en profondeur, qui devra s'attacher parfois à des questions que l'on croit banales ou familières, et dont les difficultés se manifestent à l'occasion de tel problème que l'on cherche, ou de tel exposé que l'on s'efforce de mettre sur pied.

En Mathématiques Spéciales, un groupe de trois leçons se détache en tête, avec un 17,5, un 17 et un 16,5, correspondant à des exposés sur les transformations d'une équation algébrique entière, sur le plan osculateur, et sur les déterminants. Les vingt-deux autres notes se répartissent assez régulièrement entre 13,5 et 6 ; huit notes de 13,5 à 12 ; quatre de 11,5 à 10 ; six de 9,5 à 8 ; puis deux 7 et deux 6. La moyenne générale est voisine de 11, légèrement supérieure à celle de l'année dernière (10,6).

Les épreuves orales apparaissent donc encore comme tout à fait comparables à celles des précédentes sessions ; il faut remarquer que le nombre d'admissibles était un peu plus élevé que celui du concours de 1950 : vingt-cinq au lieu de vingt-deux.

RESULTATS GENERAUX

Pour l'ensemble des épreuves écrites, pratiques et orales, le total des notes obtenues par les vingt-cinq admissibles varie de 281 à 144,5 sur 400, c'est-à-dire que les moyennes générales s'échelonnent entre 14 et 7 sur 20. Le classement d'admissibilité a été sensiblement modifié par les épreuves pratiques et orales : c'est ainsi, par exemple, que les deux candidates qui avaient nettement les deux premières places, presque *ex-aquo*, à l'écrit,

avec une avance sensible, figurent respectivement au troisième et au huitième rang de la liste finale.

Le Jury a proposé pour l'admission définitive les quinze premières classées, avec deux *ex-æquo* en tête, et deux *ex-æquo* en queue de liste. Les notes de ces candidates, pour l'ensemble des épreuves, se répartissent entre 14 et 10,2 sur 20, la moyenne générale étant, comme en 1950, voisine de 11,6. Il est intéressant d'indiquer que les moyennes relatives aux épreuves écrites, aux épreuves pratiques et aux épreuves orales, pour le groupe des quinze reçus, sont très voisines respectivement de 11, de 10 et de 12,5, tandis que les mêmes moyennes, pour les dix admissibles non reçues, sont environ 8,7 ; 7,3 et 9,3 (moyenne générale 8,8).

Le groupe des quinze nouvelles agrégées comprend six élèves de l'Ecole Normale Supérieure (dont les trois premières et la cinquième), et une ancienne élève ayant accompli une quatrième année à l'Ecole ; deux étudiantes venant respectivement des Facultés de Lyon et de Montpellier ; trois professeurs titulaires dont l'une, ancienne élève de l'Ecole Normale Supérieure, en exercice dans la métropole et les deux autres en Tunisie ; une élève de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses ; deux anciennes élèves de l'Ecole Normale Supérieure stagiaires d'enseignement, l'une à Lille et l'autre à Clermont. Cinq de ces nouvelles agrégées avaient déjà été admissibles à des sessions antérieures.

Parmi les dix admissibles non reçues, six étaient titulaires du certificat d'aptitude à l'enseignement dans les collèges : deux professeurs titulaires en exercice et un professeur titulaire en congé, une auditrice à l'Ecole Normale Supérieure déjà admissible en 1950, et deux élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses. Le Jury a proposé, pour les quatre autres, le bénéfice de l'équivalence du certificat d'aptitude à l'enseignement dans les collèges. Toutefois, en vertu de la législation en vigueur en 1951, ces candidates pouvaient renoncer à l'attribution de cette équivalence, pour obtenir un poste de « stagiaire d'enseignement », avec dispense des épreuves théoriques du nouveau certificat d'aptitude au professorat de l'Enseignement du Second Degré (C.A.P.E.S.). Cette possibilité d'option n'a été utilisée que par l'une des candidates, étudiante à la Faculté de Clermont, qui a été nommée stagiaire d'enseignement à Paris en octobre 1951 ; les trois autres (deux stagiaires d'enseignement, l'une à Lyon, l'autre à Paris, et une auditrice à l'Ecole Normale Supérieure) ont choisi le bénéfice de l'équivalence du certificat d'aptitude à l'enseignement dans les collèges (C.A.E.C.). Signalons enfin que, sur les dix admissibles non reçues, trois avaient été antérieurement admissibles et ont obtenu ainsi, en 1951, le titre de bi-admissible à l'agrégation.

**

Les indications données dans les différentes parties de ce rapport montrent que, depuis quelque temps, les résultats qui permettent d'apprécier le niveau du concours sont très sensiblement les mêmes. Une sorte de stabilité paraît ainsi être établie, et cette constatation est en un sens fort satisfai-

sante, puisqu'elle permet, en se référant à la valeur des agrégées des années antérieures, de compter que chaque session apportera un nouveau contingent de professeurs de qualité.

Cependant, je pense qu'une telle permanence ne constitue pas une solution idéale, car, même en ce domaine où interviennent évidemment trop de facteurs humains pour que l'on puisse raisonnablement envisager autre chose que des moyennes, c'est le progrès, le progrès de l'ensemble, qui est profondément souhaitable. Et il semble bien que l'on puisse obtenir, de la part d'un bon nombre de candidates, une notable amélioration sur quelques points qui concernent, non pas l'étendue des connaissances, mais bien, comme il a été dit déjà, la compréhension plus complète, acquise par un effort véritablement personnel de réflexion et de mise au point, de notions mathématiques fondamentales, ainsi que l'acquisition d'une méthode de travail valable tant pour l'organisation d'une recherche que pour l'exposition ordonnée d'une question.

D'ailleurs, cet effort vers une maîtrise accrue, vers une perfection plus grande, n'est-il pas celui que tout professeur doit poursuivre, d'année en année, durant toute sa carrière ? Car l'expérience du métier et de la vie ne tarde pas à rendre évident, puis confirme chaque jour davantage, le fait qu'il est toujours possible d'aller au delà et de mieux faire.

J. DESFORGE.

II. Assemblée générale du 6 avril 1952

1. Compte rendu financier du 3 juin 1951 au 24 mars 1952

(M. LEGRAND, trésorier)

RECETTES

En caisse le 3 juin 1951	571.957
Cotisations, abonnements et compléments de cotisations.....	671.800
<i>Bulletins</i>	4.130
Recettes brutes de publicité	179.800
Total des recettes	1.427.587

DÉPENSES

Frais d'impression, d'expédition des <i>Bulletins</i> 141, 142, 143. 144, 145, 143 bis	688.399
Abonnement <i>Education Nationale</i>	1.380
Frais de secrétariat et de gestion	22.963
Total des dépenses	712.742

Actif au 24 mars 1952 : 714.945 francs

L'actif comprend un fonds de réserve de 5.930 francs concernant 33 rachats de cotisations.

Compte rendu financier du 1^{er} octobre 1950 au 3 juin 1951

(M. MINOIS, trésorier)

RECETTES

Cotisations et abonnements	571.261
Versements complémentaires	4.200
Expéditions isolées	35.068
Publicité de juillet 1950 à mai 1951	168.500
Total	779.029

DÉPENSES

<i>Bulletins</i> n ^{os} 136, 137, 138, 139, 140 (frais d'impression et d'expédition)	371.537
Fascicules de Baccalauréat (frais d'impression et expédition) ..	100.217
Rachat d'une collection de <i>Bulletins</i>	2.000
Note de M. EDDE	780
Abonnement <i>Education Nationale</i>	900
Note de M. POCHARD	8.253
Note de M. CANONGE	200
Note de M. MONJALLON	985
Note de M. BENOIST	410
Note de M. BIGUENET	2.175
Note de M. MOUGENOT	453
Achat de Fascicules des Journées de Philosophie	14.000
Note de M. GIRARD	1.500
Note de M. WALUSINSKI	800
Total	504.210

Actif au 3 juin 1951

Réservé 33 rachats de cotisation	5.930
Disponible au 30 septembre 1950	291.208
Excédent de recettes	274.819
	571.957

Constitution de l'actif

En caisse, au compte de chèques postaux 571.957 francs

S. MINOIS.

Rectificatif aux questions posées pour l'Assemblée générale :

Il faut lire dans la 4^e question (3^e ligne, 1^{er} mot) quatre ans et non six ans.

2. Le nouveau C.A.P.E.S.

Rapport de M. CANONGE

Mis à l'amende par mon ami POCHARD d'un « rapport » à l'Assemblée générale, et reconnaissant que je n'ai pu assister à aucune réunion du Comité de l'Association, je rappellerai ci-dessous, sans prétention, ce que chacun sait sur le nouveau C.A.P.E.S., en précisant que je n'entends pas amener l'A.P.M. à prendre position sur celle des questions soulevées qui relèvent des organisations syndicales, mais seulement sur celles qui concernent exclusivement les Mathématiques.

Donc, le C.A.E.C. (certificat d'aptitude à l'enseignement dans les collèges) termine cette année sa courte carrière de sous-agrégation physico-mathématique.

Le C.A.P.E.S. (certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement public du Second Degré), dit « ancien régime », institué par décret du 1^{er} avril 1950, est mort avant d'avoir vécu (sa première session a eu lieu en 1951, sa dernière aura lieu en 1953), étouffé par le problème des stagiaires.

Le C.A.P.E.S. « nouveau régime » est institué par le décret du 17 janvier 1952 (B.O. du 31 janvier 1952) : les 500 millions obtenus par la Direction du Second Degré sont utilisés à créer des *centres pédagogiques régionaux* (première caractéristique) où les candidats licenciés recrutés par les *épreuves théoriques* passeront un an avant de subir les *épreuves pratiques* finales. Ce renversement de l'ordre des épreuves est la deuxième caractéristique du nouveau certificat.

Chronologiquement :

1. L'inscription aux épreuves théoriques a lieu à une date qui place le dernier certificat de licence au plus tard en novembre de l'année précédente. L'orientation de ces épreuves vers les programmes d'enseignement du Second Degré et la concurrence que rencontreront les nouveaux licenciés parmi les candidats ayant déjà pratiqué l'enseignement, situent cette année « préalable » dans une perspective assez différente de celle du Diplôme ou de l'Agrégation. La bonification de 20 points (sur 200) à l'écrit des épreuves théoriques aux titulaires de la mention Bien au Diplôme ne sera l'apanage que du très petit nombre.

Diverses dispenses sont accordées aux admissibles à l'Agrégation, aux élèves des E.N.S., aux maîtres de cours complémentaires (article 5 du décret).

2. Les arrêtés du 24 janvier 1952 fixent ainsi les *épreuves théoriques* :

Écrit : 1° Première composition constituée par un ou plusieurs problèmes (durée : 5 heures ; coefficient : 6).

2° Deuxième composition, constituée par un ou plusieurs exercices tels qu'ils peuvent être proposés aux élèves d'une classe du Second Degré des lycées et collèges, et devant faire l'objet d'une solution raisonnée soulignant les méthodes utilisées, et suggérant certaines réflexions d'ordre général — telle qu'elle pourrait être proposée aux élèves en corrigé oral

de devoir — puis une rédaction soignée, figures comprises (durée : 5 heures ; coefficient : 4).

Programme : celui des classes du Second Degré. Toutefois, la première composition peut porter aussi sur la géométrie pure de Mathématiques Supérieures (arrêté du 21 septembre 1941, VIII).

Oral : se passe à Paris. Un exposé (demi-heure après trois heures de préparation, sur le programme du second cycle), suivi d'une interrogation (demi-heure), soit sur des questions suggérées par l'exposé, soit sur d'autres parties du programme. Coefficient : 5. L'oral est éliminatoire.

Le Jury est présidé par un Inspecteur général ; mais le nombre de ses membres agrégés ou certifiés n'est pas encore fixé.

3. *Les centres pédagogiques régionaux* ne sont pas encore organisés. Nous ne savons pas encore ce qu'ils seront. Sur ce point et sur leur nombre (il n'y aura pas une spécialité « mathématique » dans chaque centre) l'A.P.M. peut formuler utilement ses vœux. On y pourra suivre les cours de préparation à l'Agrégation dans les Facultés.

4. *Les épreuves pratiques* consistent, après une année passée au centre, en deux leçons d'une heure, faites dans deux classes différentes, l'une du premier cycle, l'autre du second, et suivies d'un entretien comportant présentation de documents. L'une des leçons comportera un exposé, l'autre la correction d'un devoir ou d'une composition.

Le Jury comprend un Inspecteur général et deux professeurs dont au moins un conseiller pédagogique.

En concluant ce rapport très peu original, je ne crois pas devoir formuler, de façon très précise, un questionnaire pour l'Assemblée générale.

Je pense cependant que l'activité de l'A.P.M. pourrait trouver à s'utiliser avantageusement dans deux directions principales, sans que par là je fasse fi d'aucune suggestion sur tel autre point :

1) l'organisation de la spécialité « mathématiques » dans les centres régionaux ;

2) le contrôle du nombre des places mises au concours (nombre de chaires de mathématiques, besoins réels, possibilités de les satisfaire).

C. CANONGE,

Membre du Conseil Supérieur.

P.-S. — Ceci a été écrit avant la parution du rapport de M. l'Inspecteur général ROBERT, sur le concours d'Agrégation de 1951, qui apporte dans ses conclusions un aliment important à la discussion que nous aurons le 6 avril. On méditera particulièrement la partie du rapport concernant les leçons de Mathématiques Élémentaires. Mais nos collègues verront s'il y a lieu d'envisager certaines précautions pour que la « fusion » entre agrégatifs et stagiaires, souhaitée par M. ROBERT, soit à l'abri de la confusion en admettant que celle-ci soit indésirable.

3. Examens et Concours 1951

Rapport sur les B.E.P.C., B.E., E.N. (1), par M. EBDE

L'étude des sujets proposés en 1951 à ces divers examens et concours n'apporte pas encore à l'A.P.M. toutes les satisfactions qu'elle serait en droit d'attendre. Certes, l'ensemble des épreuves semble révéler de légers progrès sur les années précédentes ; mais ces progrès sont modestes, beaucoup trop modestes ; et bien qu'habitué à devoir nous contenter de peu, nous aurons à persévérer dans la tâche entreprise et à batailler encore.

Une constatation dominante s'impose : les textes de géométrie sont d'une qualité très supérieure à ceux d'algèbre. Tous ou presque restent dans les limites des programmes, et si quelques-uns sont un peu longs et parfois trop difficiles, si la question des lieux géométriques n'est pas encore résolue au mieux, au moins ont-ils le mérite de la variété. Bon nombre d'entre eux cherchent à sortir des sentiers battus et rebattus et témoignent d'un certain souci d'originalité, assez souvent avec bonheur. On se demande alors s'il n'apparaît pas plus difficile de choisir de bons textes d'algèbre, en raison de l'exiguité relative du programme de la classe de Troisième. La question n'est cependant pas insoluble, mais elle exige un effort et les auteurs de textes semblent parfois répugner à le fournir. Au reste, est-il certain que l'Administration leur en donne toujours le temps ? Et n'arrive-t-il pas qu'on demande à des professeurs, le 15 par exemple, des propositions de sujets pour le 18... quand ce n'est pas pour le 16 ? C'est évidemment un non-sens contre lequel nous devons nous insurger : un bon sujet ne saurait être le fruit d'une telle précipitation, même dans les domaines les plus élémentaires.

Que les progrès réalisés soient très modestes implique encore des lacunes multiples et de sérieuses critiques. Tout d'abord, pour ne pas échapper à la tradition sans doute, certains textes restent d'une banalité alarmante, soit qu'ils présentent aux candidats des questions par trop classiques, soit qu'ils aient été extraits d'un manuel (exemple : Nancy, B.E.P.C., J.A., copié mot à mot dans le Manuel de M. Maillard, classe de Troisième, page 284, exercice 144, avec suppression de la 4^e question ; Guadeloupe, B.E., J.A. ; Rennes, B.E., O. Ar. ; Grenoble, E.N., J.A., qui sentent tout autant le manuel ou le déjà vu), soit enfin qu'ils reproduisent textuellement ou presque les sujets de la session ou de l'année précédente (exemple : Allemagne occupée, B.E.P.C., J.A., à peu près identique au texte de Lille, J. 1950, de même que Dijon. d'ailleurs, B.E.P.C., J.A. 2/3 ; Allemagne occupée encore, B.E.P.C., O.A., déjà donné ; Grenoble, E.N., J.A., copié mot à mot et nombre pour nombre sur Clermont-Ferrand, B.E., J. 1950, avec cependant une note d'originalité, voire... d'humour, puisque canot à « moteur » a été remplacé par canot à « vapeur » !...). Toutefois, le nombre de ces cas est plutôt en régression et nous devons nous en réjouir.

En régression aussi sont les sujets d'algèbre à caractère par trop « géo-

(1) *Abbréviations utilisées. Exemples :*

J.A. 3 = session de juillet, Algèbre, 3^e question.

O.G. 2/4 = session d'octobre, Géométrie, 2^e et 4^e questions.

métrie analytique », ou qui font appel à la condition d'orthogonalité de deux droites représentant des fonctions linéaires. Pourtant Aix-Marseille (B.E.P.C., J.A. 5), Poitiers (B.E.P.C., J.A. 4), Guyane (B.E., J.A. 3/4/5), Bordeaux (E.N., J.A.), Lyon (E.N., J.A. 1_b), Caen (E.N., O.A. 5), n'ont pu résister à la tentation ; laissons-leur le privilège de l'exception qui confirme la règle.

Malheureusement, il y a plus grave et de trop nombreux textes d'algèbre comportent des questions hors programmes que la simple lecture de l'énoncé permettrait le plus souvent de déceler. Il en est ainsi pour de multiples Académies. Dijon (B.E.P.C., J.A. 3), Clermont-Ferrand (B.E., J.A. 4) proposent des équations paramétriques ; Aix-Marseille (B.E., J.A. 2), Alger (E.N., J.A. 1/3), Lyon (E.N., J.A. 2), des systèmes paramétriques ; Lyon (E.N., J.A., 3), l'étude d'une famille de courbes dépendant d'un paramètre ; Paris (B.E.P.C., J.A. 3/4), une résolution en nombres entiers exigeant les théorèmes sur les nombres premiers entre eux ; Grenoble (B.E., J.A. 4), une question demandant la connaissance de la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre décomposé en facteurs premiers soit un carré parfait ; Bordeaux (B.E.P.C., J.A. 3 fin), Toulouse (B.E.P.C., J.A. fin 2 et 3), une application du théorème dit « *de la bissectrice* » ; Poitiers (B.E., J.A. 4), la résolution d'inéquations simultanées à deux inconnues par le procédé des régions ; Clermont-Ferrand encore (E.N. J.A. 3/4) parle enfin d'« *équations horaires* » de mouvements uniformes, sans d'ailleurs préciser que ceux-ci sont rectilignes, ce qui est assez gênant pour trouver les vitesses demandées et surtout pour résoudre la question suivante, où $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ représentent — paraît-il — des « *distances* ». Tout cela serait déjà beaucoup, mais il y a dans ce domaine des Académies qui cumulent et par là-même exagèrent. C'est ainsi que Lyon, déjà cité, rassemble (E.N., O.A.) une équation du second degré dans 2° , une équation paramétrique ou résolution en nombres entiers dans $3/4^\circ$, doublée d'une ambiguïté sur « *la* » différence considérée. C'est ainsi également que Caen se signale de façon plutôt regrettable, avec un B.E. (J.A. 2) qui propose l'étude d'une famille de droites dépendant d'un paramètre ; un B.E.P.C. (O.A. 1/4) qui donne à « *discuter et résoudre suivant les valeurs de a* » (a est un paramètre algébrique), le système $ax + y = 2$ (1), $x - 2y = a$ (2), avec application dans 4° ; enfin, un B.E. (O.A. 1/4) dont la seule originalité est constituée par la résolution d'un système paramétrique (cette fois, il est vrai, le paramètre s'appelle p !) et par une résolution en nombres entiers.

Ces graves erreurs conduisent évidemment les Jurys à annuler les questions incriminées. Ce faisant, ils essaient le plus souvent, par un barème approprié, de ne pas défavoriser les candidats. Mais ce n'est là qu'apparence trompeuse, et ce qui ne souffre pas de remède, c'est le temps perdu par le bon candidat, celui qui pense et réfléchit. Perplexe devant un sujet étranger au programme, ou qu'il ne comprend pas, ou bien il l'abandonne, ou bien il s'énerve en vaines recherches : de toute façon, il gâche son épreuve. A qui la faute ? Et qui paiera ? Il faudrait tout de même que ce soient les vrais responsables et non les innocents candidats.

Dans un autre domaine, on semble vraiment trop oublier les possibilités matérielles d'un bon élève de Troisième. Il a deux heures pour : lire deux textes (la plupart sont de plus en plus longs), les comprendre, résoudre les questions au brouillon, faire des figures claires (parfois multiples), puis rédiger les solutions, que les correcteurs voudraient simples et claires, elles aussi. Et c'est par surcroît jour d'examen ou de concours. Dans ces conditions, nombre de sujets sont longs, ou beaucoup trop longs, quelques-uns trop difficiles, et l'épreuve perd en partie de sa valeur. Là, c'est plutôt le problème de géométrie qui, dans l'ensemble, porte la responsabilité. Mais souvent aussi c'est la totalité du sujet. Il arrive en effet assez fréquemment que les professeurs qui proposent des textes associent un problème d'algèbre un peu long à un problème de géométrie plus court, ou inversement. Telle quelle, l'épreuve serait convenable. Mais pour peu qu'au moment du « choix » on réunisse sans discernement le long problème d'algèbre de M. X... et le long problème de géométrie de M. Y..., il en sort un monstre. Quelques exemples de sujets longs, parmi d'autres : B.E.P.C. de juin (Bordeaux, Aix-Marseille A. 5, Rennes, Dijon, Clermont-Ferrand, Toulouse) et d'octobre (Besançon, Guyane, Toulouse) ; B.E. de juin (Guyane) et d'octobre (Aix-Marseille) ; E.N. de juin (Aix-Marseille, Bordeaux — G. surtout —, Besançon, Paris). Plus longs encore et — partant — trop difficiles, quel que soit leur intérêt, sont ceux de Rennes (B.E.P.C., J.), Bordeaux (B.E., J.), Caen (B.E. O.), Caen (E.N., J.), Paris (E.N., J.) dont la première question d'algèbre, mal rédigée, a égaré les candidats et dont la quatrième, en géométrie, simple en soi, aurait demandé un complément pour guider la recherche, Nancy (E.N., J., G. 1/2) qui, par une intervention de ces questions, oriente les candidats vers une solution plus ou moins compliquée au lieu d'une construction immédiate, Lille enfin (E.N., J.A.) dont la question *d* exige une solution dépassant les possibilités de la majorité des candidats ou les conduit à des raisonnements sans aucune rigueur, du genre de celui qu'imprime *L'Ecole libératrice* dans son numéro du 23 novembre 1951.

Une question se rattache d'elle-même à la précédente : c'est celle des « lieux géométriques ». Au risque de répéter ce qui a été dit et écrit maintes fois, il faut bien rappeler que dans un grand nombre de problèmes il y aurait avantage à ne pas demander au candidat de trouver un lieu géométrique, ce qui implique, directe, limites et réciproque (ou contraire) — travail parfois long et toujours négligé — mais de lui faire prouver seulement qu'un point mobile reste sur une ligne fixe, qu'on peut ou non faire limiter. Ainsi les Jurys n'auraient-ils pas à se poser l'éternelle question : « Tient-on compte de la Réciproque ? » pour arriver trois fois sur quatre à ne pas la noter, ce qui est une sanction contre les seuls bons élèves ayant passé du temps à la rédiger. Et cela éviterait par surcroît au texte de Strasbourg (B.E.P.C., J. G. 2/3) de contenir une véritable faute de raisonnement, quand il demande dans la deuxième question de trouver un lieu, puis dans la troisième seulement d'établir la réciproque indispensable à la solution correcte de la seconde.

Reste maintenant la forme des textes. Si les multiples erreurs et négligences qu'on y rencontre sont dans l'ensemble moins préjudiciables aux candidats — encore que certaines d'entre elles risquent fort de les désorienter et par suite de fausser l'épreuve — elles n'en accusent pas moins un laisser-aller inadmissible de la part de gens chargés de donner l'exemple, et un mépris total de l'un des objectifs essentiels des Mathématiques dans des classes de formation de base comme la Quatrième et la Troisième : la rigueur. Or, cette rigueur est aussi bien celle du « *raisonnement* » que celle de « *l'expression* ». Pourquoi, dans ces conditions, laisser passer tant de rédactions vagues, tant d'imprécisions, d'inexactitudes même et d'impropriétés aussi ?

Ce n'est tout de même pas aux candidats à « *deviner* » ce qu'on leur demande. Et, pourtant, les textes ne manquent pas où ce soin leur est laissé. Voyez, par exemple, ceux de B.E.P.C. d'Alger, J.A. 3 (où il faut représenter graphiquement la marche d'un cycliste sans savoir quand elle commence, ni quand elle finit), de Besançon J.A. 3 (qui demande une solution algébrique sans dire de quoi), de Bordeaux O.G. 2/3 (médiante PI, côté PN, de quoi ?) ; ceux de B.E. d'Alger J.G.4 (quel est « *le* » prolongement du segment C.M. ?), de Lyon O.A. 4 (qu'appelle-t-on « *la* » différence des termes d'une fraction algébrique ?), de Besançon J.A. 2/3, Lyon J.A. 1/3 et Alger B.E.P.C., J.A. 3 (qui demandent des graphiques de fonctions linéaires, déterminations d'équations ou d'intersections de droites, sans fournir les systèmes de référence), de Nancy J.A. 1 (étude d'un trapèze indéterminé), de Poitiers J.A. (qui fournit des abscisses en ordonnées a, b, c sans les préciser positives ; résultat : la formule (1) à démontrer dans 1° et à appliquer dans 4° est fautive, puisqu'elle peut conduire à une aire mesurée par un nombre négatif ; de plus, la cinquième question demande une valeur de x , alors qu'il y en a trois possibles, correspondant à trois cas de figure 1), de Lyon J.G. (qui utilise « *perpendiculaires* » pour demi-droites perpendiculaires, lesquelles deviennent d'ailleurs des droites dans la troisième question), de Grenoble O.G. 2 (de quel point M s'agit-il ?), de Paris O.A. (où est M ? sur AB ou sur CD ?), de Lyon O.A. 4 (que reste-t-il à expliquer, si la solution est déduite de la troisième question, ce qui est immédiat ?) ; ceux enfin des concours d'E.N. de Besançon J.A. 3 (l'utilisation de « *droites* » pour segments de droites rend le rectangle indéterminé), de Toulouse J.G. 3 (où la seconde demi-droite perpendiculaire à OA n'est pas déterminée avec précision), des Antilles J.A. 3, enfin (qui parle de distances, sans qu'on sache à quoi, ni où, ni sur quelle trajectoire, et de « *départ* », mais qu'appelle-t-on départ ?).

Et que penser des inexactitudes relevées dans les sujets de Grenoble B.E.P.C. J., qui, dans A. 1, demande de représenter par une droite une fonction de x non définie pour $x = \pm 2$, et dans G. 3 fait intervenir un point M « *quelconque* » sur l'arc $\widehat{BC}$, contradiction manifeste avec les données initiales où le point I est défini, donc fixe, d'Alger B.E.P.C., O. (qui écrit encore $\overline{ED}$ et $\overline{EA}$ pour mesurer des segments non orientés), et de Nancy E.N., J. (qui, par compensation, écrit et répète « *mesures algébriques de $\overline{AM}$ et $\overline{BM}$* ») ?

Relevons enfin les plus courantes impropriétés, qu'il semble si difficile de faire disparaître, comme : tracer le graphique « *d'un parcours* » (Besançon, B.E., J.A. 2), représenter des fonctions « *sur* » des axes de coordonnées (Caen, B.E.P.C., J.A. 1), trouver les points d'intersection de « *deux fonctions* », qui s'appellent d'ailleurs y^1 et y^2 avec insistance (Nancy, B.E., O.A.), en revanche représenter graphiquement « *des courbes* » (Casablanca, B.E., O.A.), parler des droites $y = 4x - 1$, $y - 2 = 3(x - 2)$, etc..., « *limiter le lieu* » (Casablanca, B.E., O.G. 1) — ce qu'aucun candidat n'a d'ailleurs su faire —, introduire le demi-plan « *supérieur* » à une droite (Aix-Marseille, E.N., J.G.), construire un triangle « *extérieur* » à un segment AB, appelé « *côté* » — sans qu'on sache de quoi (Paris, E.N., O.G.), écrire encore « *droite indéfinie* » (Lille, B.E.C.P., J.G.), etc... N'oublions pas de signaler aussi les multiples usages inconsiderés de : tracer « *un* » point, « *une* » droite, « *un* » cercle, alors que ces éléments sont parfaitement déterminés, « *élever* » et « *abaisser* » des perpendiculaires ; prouver qu'un quadrilatère est « *inscriptible* », sans dire dans quoi ; trouver une « *surface* », pour aire (dans plus de 20 textes), etc... Et terminons par les sens aussi nombreux qu'imprévus donnés au mot « *valeur* » employé indifféremment comme synonyme de longueur, de mesure (très souvent), de rapport, de nombre, etc... et au mot « *grandeur* », dont la signification varie parfois d'une épreuve à l'autre à l'intérieur même d'une Académie (exemple : « *mesure* », pour Dijon B.E.P.C., J.G. 2/3, et « *nombre* », pour Dijon E.N., J.A. 2). Et nous ne parlons pas des oublis de lettres, des fautes de frappe non rectifiées comme l pour I , x et y pour X et Y , etc...

La conclusion de ce rapport, c'est qu'il reste encore beaucoup à faire pour obtenir des textes impeccables. Que tous les membres de l'A.P.M. joignent donc leurs efforts aux nôtres ; qu'ils essaient d'obtenir dans leur Académie un contrôle minutieux des sujets « *avant* » et « *après* » leur impression ; mieux vaut prévenir que guérir, et c'est là certainement l'action la plus efficace. Après quoi, si les négligences ou erreurs ont cependant été commises, qu'ils ne manquent pas de nous en informer d'urgence, au lendemain même de l'examen, et de protester énergiquement sur le plan local, bien qu'il ne faille pas trop attendre de ces démarches *à posteriori*.

Je dois, avant de terminer, de vifs remerciements aux collègues qui ont bien voulu m'envoyer des textes, accompagnés de judicieuses remarques. Plus nombreux que l'an passé, quoique encore en infime minorité, ils ont contribué à alléger ma tâche et fourni des éléments précieux à cette étude : je leur en suis tout à fait reconnaissant.

R. EDDE.

De la liberté !

Un examinateur a demandé à l'oral du Baccalauréat la variation d'un trinôme en exigeant la mise sous forme canonique, ce qui n'était pas la méthode connue par le candidat.

La liberté d'exposition des professeurs étant entière, comme l'a toujours reconnu l'Inspection Générale, une telle exigence est inadmissible.

LE BUREAU.

4. Définitions et notations

Rapport de M. CROZES

Formules relatives aux grandeurs. — Les propositions de l'A.F.N.O.R. semblent accueillies favorablement.

Principe : L'expression d'une grandeur est un produit de 2 facteurs, le premier est un nombre, le second une grandeur unité. On écrira par exemple : $3.5\ m + 2.3\ m = (3.5 + 2.3)\ m$; $2\ m \times 5\ m = 10\ m^2$. Le symbole m indiqué ci-dessus n'est plus le simple rappel de l'unité choisie, mais il représente effectivement une grandeur. Le schéma opératoire doit donc traduire une des lois de composition dessinant la notion de grandeur.

Une incertitude demeure quand à l'emploi du mot *mesure* : la mesure est-elle l'expression monôme de la grandeur ou simplement son coefficient numérique ? Il s'agit d'une question d'ordre fondamental ; nous lui consacrerons, dans le courant de la prochaine année scolaire, une séance de la commission « axiomatique et redécouverte ».

Transformations conservant les distances. — Quasi-unanimité pour le mot *isométrie*, ainsi que pour les mots *déplacement* et *antidéplacement* toujours très en faveur.

Antidéplacement plan supplante peu à peu l'expression « déplacement inverse » pour la géométrie plane. Un antidéplacement d'un espace à n dimensions peut être l'empreinte sur ce dernier, d'un déplacement d'un espace à $n + 1$ dimensions.

Symétrie. — Incertitude, ce mot doit-il être lié à l'idée de réciprocité (comme le suggère M. CHAUVIN), il convient alors de caractériser le changement d'orientation des figures par un autre mot ; on dira, par exemple : figures contraires, ou retournées, ou réfléchies... Le mot symétrie suppose-t-il, au contraire, un changement d'orientation (solution indiquée par M. SIROS), il convient alors de dire transposition centrale et symétrie par rapport à un axe en géométrie plane, tandis qu'on dira symétrie centrale et transposition par rapport à un axe en géométrie à trois dimensions.

Ani et méta. — Ces deux préfixes signalés par M. CHEVALLIER permettent de construire un vocabulaire ingénieux ; ainsi, parmi les isométries, on peut distinguer les métamétries (déplacements) et les antimétries (antidéplacements).

Nous remercions les collègues qui nous ont envoyé d'élégantes solutions ; qu'ils veuillent bien nous excuser de ne pouvoir les publier toutes. En relisant nos vieux *Bulletins* nous avons pu voir qu'il s'agit en fait ici d'une question « permanente ». Toute autorité doit donc y être proscrite et le rapporteur doit se contenter de signaler pour information l'évolution des usages.

Question à l'étude. — Les mots similitude et antisimilitude cadrent assez bien avec les mots déplacement et antidéplacement, mais que faudra-t-il mettre en face d'isométrie ?

Le rapporteur : Y. CROZES.

5. Axiomatique et Redécouverte

Rapport de M. CROZES

Si nous voulons suivre avec nos élèves « la longue chaîne de raisons », dont parlait Descartes, il nous faut choisir prudemment une source : termes primitifs et propriétés initiales. Mais le sens généralisateur de l'enfant est fragile, ses possibilités d'appréhension ne se développent que lentement ; il ne faut pas l'éblouir par une perspective trop riche, il ne faut pas lui mentir par un simulacre de rigueur fondé sur des sous-entendus. C'est de cet ensemble de sources qu'est née, en mai 1950, notre Commission « Axiomatique et Redécouverte ». Le terme « Axiomatique » affirme la droiture du fondamental, le terme « Redécouverte » rappelle que notre aventure doit se vivre avec des enfants et pour eux.

Conférences. — Déjà, plusieurs de nos Régionales — Alger, Lyon, Nancy — tentaient et réussissaient des expériences. En juin 1950, invités par la Société Mathématique de France, nous écoutions G. CHOQUET « Sur un essai d'enseignement rigoureux de la géométrie ». En octobre, notre Commission tenait sa première réunion, M. GLAESER l'animait du récit de deux expériences, l'une faite sur le terrain pré-euclidien, avec de petits élèves du Lycée Michelet, l'autre vécue à Lyon, aux côtés de M. THOVERT en classe de Mathématiques Élémentaires.

M. BOULIGAND vint en mars 1951 nous parler de « L'accès aux Principes de la géométrie euclidienne ». Le petit livre qu'il écrivait alors, répond fidèlement à notre enquête ; l'adresse au petit élève de *Seconde*, l'examen de la géométrie expérimentale, la naissance de l'exigence logique, la satisfaction de celle-ci par une volte-face réorganisatrice d'une belle sportivité, ont engagé beaucoup d'entre nous à tenter des essais en ce sens, et cet effort nous a causé de grandes joies.

En avril dernier, D. LACOMBE, jeune agrégé de Mathématiques, préparant une thèse de philosophie, nous apporta sa belle ardeur et ses idées originales ; nous serons toujours heureux d'entendre de jeunes défricheurs de cette trempe.

Enfin, en janvier 1952, nous avons entendu une double première leçon sur les nombres positifs et négatifs. M. MIRABEL, au niveau de la classe de Mathématiques Supérieures, et M. SIROS, au niveau de la classe de Mathématiques Élémentaires, nous ont présenté des modèles d'une rare perfection. Ils ont également fait des suggestions qui retiendront notre attention.

Toutes ces conférences ont paru ou vont paraître au *Bulletin* de l'Association.

Projets. — Vous pouvez les entrevoir par les titres suivants : le développement logique de l'enfant ; l'Arithmétique (Evolution et perspectives) ; la notion de grandeur en Mathématiques et en Physique ; la notion de vecteur dans l'enseignement.

Objections. — Ne risquons-nous pas la négligence des secteurs pratiques de notre enseignement : astronomie, mécanique, descriptive, appui au physicien, applications techniques.

Nous ne le pensons pas. Si nous étions tentés de tenir pour méprisable notre premier modèle concret : « l'espace sensible local », les belles pages écrites par Poincaré à son sujet suffiraient à nous rappeler à plus de modestie. Le professeur et son petit disciple ont raison de se placer d'abord au centre de leur modèle, de regarder, d'écouter, de toucher... Mais il faut ensuite amorcer ce travail déjà délicat de classement, de sélection, d'oubli du divers, d'attention à l'intime que GONSETH nomme « l'abstraction schématisante ». Ainsi, la pensée dépasse le modèle, l'objet s'incline devant la relation, aux idées de superposition, de juxtaposition encore empreintes d'anthropomorphisme succèdent les idées d'équivalence, d'associativité, de distributivité, en un mot au cours de sept années de lente évolution, naît et se développe « l'esprit opératoire ».

Les modèles concrets sont-ils perdus pour cela ? Bien au contraire, l'espace sensible local n'est plus « le » modèle exclusif, mais « un » modèle appartenant à un concret enrichi. Chaque fois qu'une figure se dessine, nous signalons un détail de ce modèle, la figure belle et « vraie » étant celle qui traduit fidèlement l'idée que nous lui offrons pour qu'elle en devienne le symbole visible.

D'ailleurs l'intérêt que portent à notre étude bien des collègues physiciens, la présence assidue à nos réunions de membres de l'Enseignement Technique, nous sont une garantie contre toute désincarnation stérile. Nous n'oublions pas que « la logique est la physique de l'objet commun » (GONSETH) et que l'objet commun est au fond le bénéfice de « l'adaptation collective de la pensée aux faits » (LANGEVIN).

Convictions. — Nous croyons à la valeur morale des Mathématiques qui, ignorant les voies royales, initient, sans facilité à la recherche du vrai. Ainsi que GLAESER nous le rappelait, à la base de l'axiomatique est un *principe d'honnêteté* : il faut distinguer ce que l'on admet et ce que l'on démontre, ce que l'on définit et ce que l'on ne définit pas ; s'il m'est impossible de dire ce que sont un point, une droite, un plan, je dois l'avouer franchement à mes élèves. D'autre part, il suffit d'avoir contemplé le même paysage mathématique à la lumière helbertienne, ou à celle d'H. WEYL, pour comprendre que si la vérité est une, nos aperçus vers elle sont divers, et que les sûres références commandant les belles perspectives peuvent et doivent se choisir. L'axiomatique est alors école de tolérance et de liberté.

Le grand humaniste, Louis LAVELLE aimait à parler de la « vertu des sources ». Par elle, nous pensons embellir la pensée de nos enfants.

Le rapporteur : Y. CROZES.

DEUXIÈME PARTIE

Axiomatique et Redécouverte

La notion de nombre dans l'enseignement En Mathématiques Supérieures

Conférence de M. MIRABEL, professeur au Lycée Saint-Louis

A. — PRÉAMBULE

Le but que s'est proposé notre Commission est de : « rechercher dans quelle mesure et à quel niveau une base axiomatique peut être donnée à notre enseignement ».

Nous nous proposons, M. SIROS et moi de montrer aujourd'hui que : au niveau des Mathématiques Élémentaires et des Mathématiques Supérieures, il est possible et important d'atteindre ce but dans le domaine de l'arithmétique et de l'algèbre.

Nous noterons, d'abord, que le professeur de philosophie en Mathématiques Élémentaires, va proposer à ses élèves de faire connaissance avec la Logique formelle. N'est-ce pas l'occasion de leur en donner une application pratique ? Tout notre cours de Mathématiques Supérieures, qui vient ensuite a pour but de préciser les connaissances antérieures et d'inculquer à nos élèves le souci de la rigueur. Ne devons-nous pas d'abord leur en donner l'exemple ?

L'analyse, qui va être l'objet de leurs études ultérieures, est essentiellement fondée sur la notion de « nombre ». L'analytique, qui leur sera concurremment développée, l'est sur celle de « vecteur ». Ne faut-il pas reprendre ces notions et les asseoir sur une base *solide* ?

Par ailleurs, si l'arithmétique en Élémentaire est considérée comme un chapitre mineur et peu intéressant du programme, n'est-ce pas parce que l'élève a le sentiment d'être appelé à reprendre des raisonnements déjà faits depuis longtemps et qu'il croit bien connaître. Il n'y trouve qu'une révision qui lui semble superflue et fastidieuse. Il s'y intéresserait bien davantage s'il y découvrait du nouveau, et quel nouveau !...

Enfin, ne faut-il pas que cesse ce paradoxe qui atteint bien de nos propositions : en Seconde on lui dit : « On vous la démontrera plus tard » ; en Mathématiques Élémentaires : « On vous a démontré cela autrefois. » Et chacun accepte, tacitement, d'en rester là !

Mon but est de démontrer : qu'à partir de définitions clairement précisées, de principes bien mis en évidence, on peut éclairer complètement les notions de nombre et de vecteur et parvenir ainsi, en Mathématiques Supérieures, jusqu'au nombre complexe, et à l'algèbre linéaire, dont l'importance devient chaque jour plus grande.

Il ne nous sera pas possible, dans cette brève conférence, de tout développer. Nous nous contenterons de tracer le cadre et de développer un des chapitres que nous avons choisi dans la partie commune aux deux classes : celui qui concerne le corps des nombres réels.

Je rappellerai que : tout ce qui concerne la notion de nombre peut être extrait de la conférence faite par M. CHATELET, à Sèvres, il y a deux ans : — tout ce qui concerne la notion de vecteur est inclus dans les ouvrages de M. LICHNEROVITZ : *Calcul vectoriel*, chez A. Colin, et *Algèbre linéaire*, chez Masson.

Ces deux maîtres nous ont tracé la voie. Il nous appartient, à nous, de la suivre.

B. — GÉNÉRALITÉS

Le point de départ sera pris dans la définition d'un ensemble due à Cantor : *réunion en un tout d'objets de notre intuition ou de notre pensée, bien déterminés et différenciables les uns des autres.*

Quelques généralités suivront. Détermination d'un ensemble : 1) Loi de formation. — 2) Relation d'égalité : réflexive, symétrique, transitive.

Lois de composition ou opérations internes : elles associent à tout couple x, y , un élément z : $x + y = z$. Elles doivent être : déterminées, unipares. Elles peuvent être : associatives, commutatives. L'une peut être distributive par rapport à l'autre.

Opérations inverses : notion essentielle. Parfois impossible dans l'ensemble.

Cette impossibilité partielle pose le problème de l'*extension*. C'est l'application du *principe* d'extension qui va nous permettre, partant de :

l'ensemble E_0 des nombres entiers dans lequel les opérations inverses de l'addition, de la multiplication, de l'exponentiation, sont parfois impossibles ;

de créer l'ensemble E_1 des nombres rationnels dans lequel le quotient devient toujours possible ;

puis : l'ensemble E des nombres absolus dans lequel l'extraction des racines est devenue toujours possible ;

puis : l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels dans lequel la soustraction est devenue toujours possible, mais où l'extraction des racines est redevenue parfois impossible ;

enfin : l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes où toutes ces opérations sont devenues toujours possibles.

Un même thème se reproduira dans chaque cas avec les variations qui s'imposent et ceci montrera bien l'unité de la notion de nombre.

Ce même thème sera repris en Mathématiques Supérieures sur la notion d'espace vectoriel abstrait, à 1, 2, 3, ..., n , développé et appliqué à l'espace euclidien.

Tout est donc dominé par : 1° le principe d'extension ; 2° cette idée générale que les propriétés d'un ensemble sont faites par les lois de composition.

Principe d'extension. — Un ensemble E est donné d'éléments $(a, b, \dots)$. Dans cet ensemble sont définies une égalité et des opérations : $*$, ... Une des opérations inverses au moins est parfois *impossible*. L'ensemble $\mathfrak{G}$ étendu formé d'éléments $(\alpha, \beta, \gamma \dots)$. Chaque élément est issu d'un couple d'éléments de E (a, b) qui ne jouent pas le même rôle. Une égalité est définie dans $\mathfrak{G}$ pour assurer sa détermination. A toute opération $*$ définie dans E , on associe une opération notée $*$ et dénommée de même définie dans $\mathfrak{G}$ qui possède les mêmes propriétés.

Il existe dans l'ensemble $\mathfrak{G}$ un sous-ensemble $\bar{E} (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots)$ isomorphe à l'ensemble E avec conservation des lois.

Les définitions doivent être telles que si : $\bar{a} * \bar{b} = \bar{c}$ dans $\bar{E}$, on ait : $a * b = c$ dans E .

Enfin, à l'une au moins des opérations inverses définies dans E et parfois impossible dans cet ensemble est associée dans $\mathfrak{G}$ une opération définie de même et devenue toujours possible dans $\mathfrak{G}$. Tel est le thème.

Je vais, par exemple, supposer étudiés : l'ensemble des entiers E_0 ; l'ensemble des nombres rationnels E_1 : extension de E_0 ; l'ensemble des nombres absolus E : extension de E_1 et créer l'ensemble $\mathfrak{G}$ des nombres réels.

La soustraction, en général impossible dans l'ensemble E des nombres absolus, sera toujours possible dans l'ensemble des nombres réels : tel est le but de cette extension nouvelle.

E $a, b, c, \dots$ $\bar{E}$ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ $\mathfrak{G}$ $\alpha, \beta, \gamma,$

$a * b = c$ $\bar{a} * \bar{b} = \bar{c}$ $\alpha * \beta = \gamma$

$c \xi a = b$ Si $c > a$ $\bar{c} \xi \bar{a} = b$ $\gamma \xi \alpha = \beta$

Opération inverse ξ
impossible sans E
dans certains cas.

Opération inverse ξ
toujours possible
dans $\mathfrak{G}$.

ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS $\mathfrak{G}$

Extension de l'ensemble des nombres absolus. — Dans l'ensemble des nombres absolus la soustraction peut encore être parfois impossible. Il faut donc en réaliser une « extension » et créer un nouvel ensemble dans lequel cette opération sera toujours possible. Ce but imposera les définitions des règles opératoires dans le nouvel ensemble.

Définition de l'ensemble des nombres réels. — Nous appellerons : nombre réel tout élément formé d'un couple de deux nombres absolus (a, b) rationnels ou non, appelés à jouer un rôle différent.

Dans cet ensemble, un sous-ensemble $\bar{E}$ sera constitué par les nombres réels de la forme $(a, 0)$. Il sera vérifié isomorphe avec conservation des lois de l'ensemble E des nombres absolus : $a, \dots$ Il y a visiblement déjà correspondance biunivoque entre l'élément $(a, 0)$ de $\bar{E}$ et l'élément a de E .

Conditions à réaliser dans l'extension. — Les règles adoptées dans le nouvel ensemble doivent s'appliquer à l'ensemble $\bar{E}$ et par isomorphisme à l'ensemble E des nombres absolus. Or, dans cet ensemble : si $a > b$ et $a' > b'$, c'est-à-dire $a = b + c$ et $a' = b' + c$, on aura :

1° $a + b' + c' = a' + b + c$. Pour que $c = c'$, il faudra que

$$a + b' = b + a'.$$

2° $a + a' = (b + b') + (c + c')$. Donc $c + c' = (a + a') - (b + b')$.

3° $aa' + bb' = (ab' + ba') + cc'$. Donc $cc' = (aa' + bb') - (ab' + ba')$.

Le but recherché sera : $(a, b) = (a, c) - (b, c)$ qui met en évidence le rôle des deux nombres a et b dans le couple (a, b) .

Les relations vont motiver nos définitions.

Egalité. — Deux nombres réels (a, b) et (a', b') seront dits égaux et l'on notera cette relation $(a, b) = (a', b')$ si, et seulement si : $a + b' = b + a'$. Cette relation est visiblement : réflexive, symétrique et transitive. On notera que $(a, a) = (o, o)$, ce nombre sera dit : zéro, et noté : o .

L'ensemble $\mathcal{G}$ des nombres réels est donc déterminé.

Éléments canoniques. — Il existe dans $\mathcal{G}$ une infinité de sous-ensembles constitués par des éléments égaux. Dans chacun d'eux existe un élément de la forme (a, o) ou (o, b) ou (o, o) .

Le sous-ensemble constitué par les éléments de la forme (a, a) qui contient (o, o) est formé de nombres nuls : o en est l'élément canonique.

Tout élément (a, b) dans lequel $a > b$ donc tel que : $a = b + \alpha$ fait partie du sous-ensemble qui contient l'élément (α, o) .

On a, en effet : $a = a + o = b + \alpha$, donc $(a, b) = (\alpha, o)$. Nous le noterons : $*\alpha$.

Un tel élément est dit positif. L'élément canonique qui lui est égal est noté : (α, o) où α est sa valeur absolue.

Tout élément (a, b) dans lequel $a < b$ donc tel que : $a + \beta = b$ fait partie du sous-ensemble qui contient l'élément (o, β) .

On a, en effet : $a + \beta = b + o$. Donc, $(a, b) = (o, \beta)$. Nous le noterons $*\beta$.

Un tel élément est dit négatif. L'élément canonique qui lui est égal est noté : (o, β) , où β est sa valeur absolue.

L'ensemble comprend donc : des nombres nuls : o ; des nombres positifs : $(\alpha, o) = *\alpha$; des nombres négatifs $(o, \beta) = *\beta$.

Addition. — On appelle somme de deux nombres réels (a, b) et (a', b') le nombre réel $(a + a', b + b')$ et l'on note cette opération :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

Cette opération est visiblement : déterminée, unipare, commutative et associative, ce qui n'est pas le cas dans la voie classique.

Étant déterminée on peut remplacer dans cette opération chaque élément par l'élément canonique qui lui est égal.

1° *Somme de deux nombres positifs.* — Soit : (a, b) avec $a > b$ donc $a = b + c$; (a', b') avec $a' > b'$ donc $a' = b' + c'$.

On a $(a, b) = (c, o) = *c$, $(a', b') = (c', o) = *c'$, donc :

$(a, b) + (a', b') = (c, o) + (c', o) = (c + c', o) = * (c + c') = *c + *c'$.
donc : La somme de deux nombres positifs est un nombre positif dont la valeur absolue est la somme des valeurs absolues des nombres donnés.

2° Somme de deux négatifs. — Soit : (a, b) avec $a < b$, donc $a + c = b$.
 (a', b') avec $a' < b$, donc $a' + c' = b'$.

On a $(a, b) = (o, c)$, $(a', b') = (o, c')$, donc
 $(a, b) + (a', b') = (o, c) + (o, c') = (o, c + c') = *(c + c') = *c + *c'$,
donc : La somme de deux nombres négatifs est un nombre négatif dont la valeur absolue est la somme des valeurs absolues des nombres donnés.

3° Somme de deux nombres réels de caractère différent. — Soit (a, b) avec $a > b$, donc $a = b + c$, (a', b') avec $a' < b'$, donc $a' + c' = b'$.

On a $(a, b) = (c, o) = *c$, $(a', b') = (o, c') = *c'$, donc
 $(a, b) + (a', b') = (c, c')$,
si $c > c'$, donc $c = c' + d$, la somme est : $(d, o) = *d$; si $c < c'$, donc $c + d = c'$ la somme est : $(o, d) = *d$.

La somme de deux nombres réels de caractère différent a même caractère que celui des deux nombres qui a la plus grande valeur absolue. Sa valeur absolue est la différence des valeurs absolues des nombres donnés.

4° $(o, o) + (c, o) = (c, o) = *c$; $(o, o) + (o, c) = (o, c) = *c$;
 $(o, o) + (o, o) = (o, o) = o$.

5° Nombres opposés. — Deux nombres réels sont dits « opposés », s'ils ont la même valeur absolue et des caractères différents. Donc

$$*c + *c = (c, o) + (o, c) = (c, c) = (o, o).$$

La somme de deux nombres opposés est nulle. Ainsi se trouve démontrée la mystérieuse règle d'addition des nombres réels utilisée comme définition dans la méthode classique.

Soustraction. — Etant donné deux nombres réels (a, b) et (c, d) , nous appellerons différence de ces deux nombres et noterons : $(a, b) - (c, d)$ le nombre x tel que : $(a, b) = (c, d) + x$.

Théorème : La soustraction est donc toujours possible dans $\mathfrak{E}$.

En effet : soit (ξ, η) un nombre tel que $(a, b) = (c, d) + (\xi, \eta)$. Il faudra que $a, b = (c + \xi, d + \eta)$. Donc $a + d + \eta = b + c + \xi$. Donc

$$(\xi, \eta) = (a + d, b + c).$$

Cette condition nécessaire est visiblement suffisante.

Théorème : $(a, b) = (a, o) - (b, o) = *a - *b$.

En effet : $*a - *b = (a, o) - (b, o) = (a + o, o + b) = (a, b)$.

Théorème : Si $\bar{\beta}$ est l'opposé de β : $\alpha - \beta = \alpha + \bar{\beta}$.

En effet : $(\alpha + \bar{\beta}) + \beta = \alpha + (\bar{\beta} + \beta) = \alpha + o = \alpha$.

C'est la règle usuelle de soustraction des nombres réels.

Multiplication. — Nous appellerons produit de deux nombres réels (a, b) et (a', b') , le nombre réel γ ($aa' + bb'$, $ab' + ba'$). Note : $(a, b) \cdot (a', b')$.

Si l'on applique cette définition aux éléments canoniques égaux aux deux nombres donnés :

$$\begin{aligned} (c, o) \cdot (c', o) &= (cc', o) \text{ ou } *c \cdot *c' = *cc' \\ (o, c) \cdot (o, c') &= (cc', o) & *c \cdot *c' &= *cc' \\ (c, o) \cdot (o, c') &= (o, cc') & *c \cdot *c' &= *cc' \end{aligned}$$

Le produit de deux nombres réels est un nombre réel qui a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues. Il est positif si les deux nombres ont le même caractère ; il est négatif si les deux nombres ont un caractère différent.

Cas particuliers : $x \cdot 0 = (a, b) \cdot (0, 0) = (0, 0) = 0$,
 $x' \cdot 1 = (a, b) \cdot (1, 0) = (a, b) = x$.

C'est la mystérieuse règle usuelle de la multiplication qui se trouve ainsi démontrée.

Théorème : La condition nécessaire et suffisante pour qu'un produit de deux nombres réels soit nul est que l'un au moins des deux nombres soit nul.

Conséquences : $(a, 0) \cdot (1, 0) = (a, 0)$, ou : $*a \cdot *1 = *a$,
 $(a, 0) \cdot (0, 1) = (0, a)$, $*a \cdot *1 = *a$
 $(0, a) \cdot (0, 1) = (0, a)$, $*1 \cdot *1 = *1$

Théorème : La multiplication des nombres réels est : déterminée, unipare, commutative, associative. Vérification immédiate.

Théorème : La multiplication des nombres réels est distributive relativement à l'addition. Vérification immédiate.

Opération inverse de la multiplication : quotient. — Le quotient du nombre réel α par le nombre réel β tel que : $\alpha = \beta \xi$ on notera : $\frac{\alpha}{\beta}$.

Si $\alpha = (a, b)$, $\beta = (c, d)$, $\xi = (x, y)$. Il faut que :

$$(a, b) = (c, d) \cdot (x, y) = (cx + dy, dx + cy),$$

ou, en utilisant la condition d'égalité : $a + dx + cy = b + cx + dy$, ou :

$$x - y = \frac{b - a}{d - c} \text{ à condition que } d \neq c, \text{ cette relation pouvant s'écrire aussi si cela est nécessaire : } x - y = \frac{a - b}{c - d} \text{ ou } y - x = \frac{a - b}{c - d} \text{ ou } y - x = \frac{b - a}{d - c}.$$

Cette condition nécessaire est suffisante. Diviseur non nul. C'est la condition pour que le quotient soit déterminé.

Sous la forme conique l'on trouve immédiatement la règle usuelle :

$$(c, 0) : (d, 0) = \left(\frac{c}{d}, 0 \right) \text{ ou } *c : *d = \frac{*c}{*d}$$

$$(c, 0) : (0, d) = \left(0, \frac{c}{d} \right) \quad *c : *d = \frac{*c}{*d}$$

$$(0, c) : (d, 0) = \left(0, \frac{c}{d} \right) \quad *c : *d = \frac{*c}{*d}$$

$$(0, c) : (0, d) = \left(\frac{c}{d}, 0 \right) \quad *c : *d = \frac{*c}{*d}$$

*Puissances : Définition usuelle. On a évidemment : Si n est entier positif : $(*a)^n = *a^n$ avec : $(*a)^n = (*1)^n (*a)^n = (*1)^n \cdot *a^n$.*

$$\text{Et : } (*1)^{2n} = *1 \quad (*1)^{2n+1} = *1.$$

Donc : toute puissance, paire d'un nombre réel, est positive.

Racine n : Un nombre réel a étant donné, la racine n^e serait le nombre réel x tel que : $x^n = a$. Mais si n est pair $x^n > 0$. L'opération est donc impossible en ce cas si $a > 0$.

L'opération inverse de l'exponentiation n'est donc pas toujours possible dans l'ensemble des nombres réels.

Une nouvelle extension sera nécessaire.

Relations d'ordre. — Quand a et b sont des nombres absolus nous avons vu que : $a > b$ a pour conséquence que $a - b$ existe et est un nombre absolu considéré par suite comme supérieur à zéro, parce que $c = 0 + c$. On a montré que : $a > b + c$ entraîne $a - b > c$; $a < b + c$ entraîne $a - b < c$, lorsque cette opération est possible. Il en résulte en particulier que : $a > b \rightarrow a - b > 0$, mais l'on ne peut rien déduire de $a < b$ en ce cas. Par extension on dira que $*c > 0$ et $*c < 0$ par définition. Et aussi, par extension, on dira que, par définition : $a > b$ si $a - b > 0$; $a < b$ si $a - b < 0$, a et b étant deux nombres réels quelconques.

Cette relation a symétrique est transitive :

$$\left. \begin{array}{l} a > b \\ b > c \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{entraîne en effet : } a > c \\ \text{Démonstration immédiate} \end{array}$$

Il importerait grandement de supprimer toute opération sur des équations ou des inégalités ou inéquations qui sont des circonstances.

Cela amènerait : 1) à chercher des zéros de l'expression : $a - b$, au lieu de résoudre l'équation : $a - b = 0$; — 2) à chercher le signe de l'expression : $a - b$, au lieu de résoudre l'inéquation : $a - b > 0$ ou $a - b < 0$.

Se trouveraient ainsi supprimées ces opérations qui conduisent la plupart du temps à des fautes graves : multiplication des deux membres d'une équation ou inéquation par un facteur ; — passage avec changement de signe d'un membre à l'autre d'une telle relation d'un terme qui figure dans l'une de ces expressions ; — chasser les dénominateurs, etc...

Pour résoudre : $\frac{a}{d} < \frac{c}{d}$ on chercherait le signe de $\frac{a - c}{d}$ ou ses zéros et les précautions à prendre apparaîtraient. Et les relations entre les équations : $a = b$ et $a^2 = b^2$, où les inéquations : $a > b$ et $a^2 > b^2$ deviendraient les relations entre les zéros ou les signes des expressions : $a - b$ et $a^2 - b^2$ qui pourraient être aisément étudiés et sans erreur.

Notation classique des nombres réels. — Nous avons posé $(c, 0) = *c$ et $(0, c) = *c$ et nous avons vu que $*c = (c, 0) = 0 + (c, 0)$ et $*c = (0, c) = 0 + (0, c) = 0 - (c, 0)$.

D'autre part, la règle de *soustraction* permet de remplacer cette opération par une *addition*. Aucun signe opératoire n'est donc nécessaire pour indiquer celle-ci, les autres opérations : multiplication et quotient ayant leurs signes respectifs : . et —.

L'isomorphisme entre les nombres $(c, 0)$ et les nombres absolus c a permis de les confondre occasionnellement sans inconvénient : $(c, 0) = c$. On a pu écrire : $*c = 0 + c$ et $*c = 0 - c$. D'où le zéro jouant un rôle passif : $*c = +c$ $*c = -c$. C'est la notation usuelle. Elle est complétée par le symbole $|c|$ pour désigner la valeur absolue du nombre réel c .

Elle permet de lire la suite opératoire : $+3 -5 +7 -2$, soit : $*3 + *5 + *7 + *2$ en rétablissant le signe $+$ opératoire de l'addition.

Soit : $*_3 - *_5 + *_7 - *_2$. En écrivant : $*_1 = +1$ $*_1 = -1$, on écrira $+3 = (+1) \cdot (+3)$; $-7 = (-1) \cdot (+7) = (+1) \cdot (-7)$.

La confusion des signes $+$ et $-$ opératoires de l'addition et de la soustraction avec les signes $+$ et $-$ distinctifs des caractères des nombres réels qui eût été très regrettable dans les paragraphes précédents, se trouve ne plus avoir maintenant aucune importance.

Là est la raison du choix de la notation classique des nombres réels.

Applications : Comme cela aura été fait antérieurement pour les ensembles E_0 , E_1 , E on montrera que l'ensemble des nombres réels est un instrument utile aux mathématiciens, ces nombres, s'y révélant, comme dans les cas précédents, comme des « opérateurs ».

Dans cet ordre d'idées, seront créés, sur l'ensemble des nombres réels, les « Espaces vectoriels » à 1, 2, ... n , dimensions et il en sera fait application à l'Espace euclidien.

Ce sera le début de l'algèbre linéaire qui, en Mathématiques Supérieures, dans la voie tracée par M. LICHNEROVICZ dans les ouvrages ci-dessus rappelés, conduira tout naturellement au calcul vectoriel, aux Déterminants, aux Equations et formes linéaires, à la Géométrie analytique.

D. — CONCLUSION

Tel est l'aspect théorique de la question.

Quel en est l'aspect pédagogique pratique ? Je crois que, selon ce schéma, pourrait être développée la première partie du programme d'Arithmétique et d'Algèbre de Mathématiques Élémentaires : nombres entiers, rationnels et réels et applications aux Vecteurs de l'Espace euclidien linéaire, à deux et trois dimensions.

Le professeur de Mathématiques Supérieures n'aurait plus qu'à terminer.

On notera que, à aucun moment, on ne s'écarte du programme actuel. Il faudrait toutefois renvoyer à la fin du cours d'Arithmétique, la numération et l'exécution des opérations dans le système de numération choisi. Il serait aisé, alors, de rendre ces paragraphes plus intéressants.

Est-il possible, pratiquement, de faire un tel développement en Mathématiques Élémentaires ? Evidemment, il ne peut donner lieu à bachotage et le but est « non de faire retenir le détail », mais seulement des « idées générales ». *Leur petit nombre et leur constante utilisation sous les mêmes formes doivent conduire au résultat.* Il suffit de prendre garde de n'employer que « très peu » de mots nouveaux. L'exposé sur les nombres entiers peut d'ailleurs être fait de façon « concrète » avec les mêmes mots en utilisant les « collections d'objets » comme éléments de l'ensemble E et non les « objets ». Car en ce dernier cas, le nombre entier est lié à la « puissance » de l'ensemble étudié et il ne semble pas qu'il y ait un intérêt quelconque à introduire cette notion nouvelle bien plus difficile et délicate. Le rôle passif du caractère concret de ces éléments apparaîtra très vite et il sera aisé de s'en débarrasser.

Ce qui pourrait différencier les exposés dans les deux classes serait, qu'en Mathématiques Élémentaires on irait du concret, qui serait « préambule » à l'abstrait qui serait « final », alors qu'en Mathématiques Supérieures on partirait directement dans l'abstrait et on appliquerait au concret.

Cela peut être conçu différemment. M. SIROS se propose de vous le montrer. Si le but est atteint, si les élèves qui nous arrivent en Mathématiques Supérieures ont senti le besoin de revenir sur le passé pour l'asseoir définitivement sur une base axiomatique solide et ne se contentent plus d'habitudes acquises par mimétisme (et elles ne sont, souvent, même pas acquises), le professeur de Mathématiques Supérieures pourra remplir son rôle avec plus d'aisance et d'efficacité.

H. MIRABEL,

*Professeur de Mathématiques Supérieures
au Lycée Saint-Louis.*

Note de M. MAILLARD

Hypothèses : Ensemble de nombres $a, b, \dots$ dans lequel est défini :

une addition commutative et associative ;

une multiplication : distributive à droite et à gauche relativement à

l'addition : $a(b + c) = ab + ac$ et $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$.

Conclusion : La multiplication envisagée est commutative si l'on suppose l'axiome d'Archimède.

1° n entier, a quelconque :

$$an = a(1 + 1 + \dots + 1) = a + a + \dots + a \text{ (Dist}^{\text{te}} \text{ à droite)}$$

$$na = a + a + \dots + a \text{ (Dist}^{\text{te}} \text{ à gauche)}$$

Donc : $an = na$.

2° n quelconque, a quelconque : supposons, que, par exemple :

$$a > 0 \quad b > 0 \quad ab - ba > 0.$$

Soit c tel que : $(a + b + 1)c = ab - ba$ et d tel que : $d > 0, d < 1, d < c$.

D'après l'axiome d'Archimède, il existe m et n entiers tels que :

$$md < a \leq (m + 1)d ; \quad nd < b \leq (n + 1)d.$$

$$ab \leq mnd^2 + (m + n + 1)d^2 \quad ba > mnd^2 = nmd^2 \text{ (d'après 1°)}.$$

$$\text{Donc : } ab - ba < (m + n + 1)d^2 < ad + bd + d^2 < (a + b + 1)d.$$

$$\text{Et comme : } d < c : \quad ab - ba < (a + b + 1)d < (a + b + 1)c.$$

Or : $(a + b + 1)c = ab - ba$, par définition de c . Contradiction.

Il ne peut donc exister $c \neq 0$ tel que : $ab - ba = (a + b + 1)c$.

Donc : $ab = ba$.

C.Q.F.D.

R. MAILLARD,

*Professeur de Mathématiques Spéciales
au Lycée Charlemagne.*

En Mathématiques Élémentaires

Conférence de M. SIROS, Professeur au Lycée Lakanal

Si nous nous rappelons les programmes d'arithmétique en Cinquième, Quatrième et Troisième, nous soulignons aussitôt la pauvreté des connaissances et des idées chez l'élève entrant en classe de Mathématiques Élémentaires en ce qui concerne cette discipline.

On peut juger qu'il est logique, en Mathématiques Élémentaires, de commencer par l'arithmétique, et comme l'algèbre doit se développer aussi dès le début, on est conduit à brancher les nombres relatifs sur les propriétés générales des opérations.

Le mois d'octobre est ainsi une période d'apprentissage de l'axiomatique.

Faisons quelques remarques où nous indiquerons les difficultés de cet enseignement, et qui seront l'occasion de poser quelques questions à nos collègues.

SUR L'ÉGALITÉ. — Elle est « réflexive, symétrique et transitive », dites-vous, mais, moi, élève de Mathématiques Élémentaires, je ne comprends pas le besoin de ce décorticage. Si elle n'était pas ainsi, ce ne serait plus l'égalité ! Et n'a-t-elle que ces qualités ? Ceci est très naïf, c'est toujours dire que « a » c'est « a » !

En effet, l'égalité, c'est souvent l'identité, et avec le « principe d'identité » on a plusieurs échantillons du même objet.

Quand nous précisons, nous, ces qualités, nous pensons en même temps une réciproque, nous *définissons* l'égalité, ou, plutôt, nous définissons une catégorie de « relations » qui ressemblent (à préciser) à l'égalité. L'élève conçoit-il cela ? Peut-être un peu, s'il pense aux fractions. Mais avant d'atteindre ce chapitre, nous aurons des occasions excellentes, par exemple, les mesures d'un angle : les nombres α et $\alpha + 2\pi$ — non égaux — mesurent le même angle, on peut les considérer comme égaux, mais alors attention à de purs mécanismes opératoires issus d'une analogie (multiplication et division) ; il faut se défier du langage ordinaire, par suite, il faut préciser complètement l'emploi de la *congruence*, « relation » à cultiver. Et comme deuxième exemple, prenons les théorèmes sur les restes (reste d'une somme, etc...) ; ici le reste perd son caractère $r < d$, et ces théorèmes se réduisent beaucoup plus simplement aux premiers résultats sur les congruences : $f(a, b, \dots) \equiv (f(a', b', \dots))$, f , opération entière, — énoncés combien plus aisés, et cette manière éveille beaucoup de curiosité.

La première question que je pose est donc : Que pensez-vous de l'usage systématique des congruences en Mathématiques Élémentaires, et peut-être même avant ?

On peut noter aussi que la conduite à observer quant à l'égalité au sein d'une famille d'éléments dépend de la façon dont ces éléments sont définis :

a) définition avec unicité (exemple : nombres naturels), l'égalité est définie implicitement en même temps que l'objet, — égalité = identité ;

b) définition sans unicité : l'élément a plusieurs déterminations, ou une infinité (fractions, vecteur libre). L'égalité doit être définie et justifiée par ses trois qualités.

SUR LES NOMBRES NATURELS ET L'ADDITION. — Un exposé rigoureux de l'arithmétique s'appuie sur les cinq axiomes de Péano ; c'est ce que fait M. MIRABEL. Dans cette façon de faire, le nombre est un numéro, on a une « numérotation ».

Si l'on veut obtenir le nombre cardinal, il faut donner la notion d'ensemble, définir la puissance : qualité commune attachée aux ensembles en correspondance biunivoque, on désigne par un mot chacun de ces qualités, et cela constitue la suite des nombres ; on sait compter, l'égalité est définie. (On peut remplacer les mots savants par : collection, mesure, correspondance parfaite, ce qui fait qu'on n'a pas l'air de s'engager dans une théorie réservée à l'enseignement élevé).

Alors la suite des nombres apparaît comme un objet expérimental tout fait, dont on va dégager quelques énoncés *suffisants* constituant une base axiomatique :

Définitions : 1) ajouter zéro ; — 2) ajouter 1 à a ; — 3) ajouter b à a (on « compte » le nombre des réitérations de « ajouter un »).

Postulats : 1) de détermination, sous deux formes :

{ on peut ajouter membre à membre deux égalités,
} réciproque : uniparité de l'addition ;

2) de commutativité $(a + b = b + a)$;

3) d'associativité $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Bien entendu le mathématicien critique ici le professeur de mathématiques : Vos postulats, Péano les démontre ! — Je sais, répond le professeur, mais je ménage mes élèves, je veux être suivi par la majorité d'entre eux, je craindrais de les rebuter par de longs développements, et Gonsseth, mathématicien, m'y autorise : tout en soulignant la beauté d'une base axiomatique *intègre*, il dit qu'une base surabondante est permise, cela ne nuit pas à la solidité de l'édifice, « l'intégrité de la base axiomatique reste à l'arrière-plan de nos préoccupations. C'est une exigence esthétique, désirable, non indispensable »... et il signale une autre préoccupation, la non contradiction, question difficile à régler.

Nous pouvons d'ailleurs remarquer que la définition de l'addition prise par Peano : $a + b + = (a + b) +$ (a plus le suivant de b égale le suivant de $a + b$) équivaut à un postulat d'associativité $a + (b + 1) = (a + b) + 1$, si l'addition a été définie autrement.

La deuxième question que je pose est alors : Est-il acceptable de faire en Mathématiques Élémentaires une « axiomatique tempérée », pourvu qu'on la présente honnêtement comme telle ?

Dans le même ordre d'idées je demande s'il n'est pas intéressant de cultiver la notion de *groupe* : aussitôt les nombres relatifs, dans les progressions, dans les congruences, la division des arcs, etc... et en géométrie pour ordonner l'enchaînement des chapitres ? Ne pourrait-on même faire

nieux et ne pas se borner à des exemples, entrer un peu dans le langage de l'algèbre moderne ?

SUR LA DÉFINITION. — Dans tout ce qui nous occupe il s'agit en somme de définitions. Mais comment définit-on ? — Pour répondre, permettez-moi de citer Paul Valéry : « Essayer de définir un nombre, c'est essayer de se mettre au point où l'on était *avant de savoir ce qu'est un nombre*, et en même temps *ne pas perdre ma connaissance actuelle du nombre*, et enfin passer de ce premier état d'ignorance au point actuel sans la revivre, mais en somme remplacer le tâtonnement... par un *procédé fini*, par un *système d'actes strictement suffisants* ; c'est un raccourci. » (*Tel quel*, tome II, p. 227).

Le rôle de la redécouverte est de rendre *consciente* cette double position, de faire en sorte qu'on ne se borne pas à énoncer ce système d'actes strictement suffisants (attitude un peu hypocrite), de faire sentir le besoin de ce raccourci.

Un exemple remarquable d'un tel raccourci, c'est le principe d'extension, nous voudrions le faire découvrir aux élèves.

Je vais prendre maintenant un exposé ancien et à peu près traditionnel de la leçon sur les nombres relatifs. Il suffit que nous nous bornions à en faire le plan.

I. RAPPELS. — 1) la soustraction $b - c = x$ est possible si $b \geq c$;

2) deux théorèmes sur la soustraction conduisent à la formule

$$a - (b - c) = a + (c - b)$$

dont les deux membres ont des existences contradictoires ;

3) on a défini les « polynômes arithmétiques » et donné leurs propriétés : commutativité, chaque terme conservant son caractère additif ou sou-

stractif,
associativité, par exemple : $a - b - c \dots = a - (b + c) \dots$,
zéro est élément neutre.

II. DÉFINITION DES NOMBRES RELATIFS. — Si $b > c$, $b - c = x$, on pose

$b - c =$ nombre positif noté $\overset{+}{x}$, identique à x .

Si $b < c$, soit $c - b = x$, on pose $b - c =$ nombre négatif noté $\bar{x}$.

Si $b = c$, $b - c = 0$.

Notation usuelle : si $b = 0$, en posant : zéro est élément neutre, on obtient :

dans la soustraction $0 - c = -c = \bar{c}$; dans l'addition : $0 + c = \overset{+}{c} = c$.

III. APPLICATIONS. — La formule $a - (b - c) = a + (c - b)$, donne :

si $b < c$: $b - c = -x$ ($x = c - b$), d'où :

$$a - (-x) = a + (\overset{+}{x}) \text{ ou } a + x ;$$

si $b > c$: $b - c = \overset{+}{x}$ ou x , et $c - b = -x$:

$$a - x = a - (\overset{+}{x}) = a + (-x).$$

D'où : 1) la règle des « double-signes » : $-(+ \dots) = -$, etc... ;

2) l'écriture d'un polynôme arithmétique, sous forme de somme ; algèbre, et énoncé simple de la commutativité, et calcul toujours possible ;

3) la réduction de la soustraction à l'addition, définition de l'opposé d'un nombre ;

4) la règle d'addition : $(+a) + (+b)$ identique à $a + b$;

$a + (-x) = a - x$ avec deux cas : $a \geq x$, d'où la règle ;

$(-x) + a$ ramené à ce qui précède après commutativité ;

$(-x) + (-\beta)$ obtenu par l'associativité dans $a - x - \beta = a - (x + \beta)$.

IV. MULTIPLICATION. — Utilisons la distributivité :

1) $a(b - c) = ab - ac$, où nous supposons $b < c$: $b - c = -x$ ($x = c - b$) ; alors $ab < ac$, et $ab - ac = -(ac - ab) = -[a(c - b)] = -ax$. C'est la règle $(+a)(-x) = -ax$; $(b - c)a$ donne la règle $(-x)a = -xa$.

2) $(a - b)(c - d) = a(c - d) - b(c - d)$. Si $c < d$: $c - d = -\beta$ ($\beta = d - c$), le second membre s'écrit $a(-\beta) - b(-\beta)$ ou
 $-a\beta - (-b\beta) = b\beta - a\beta = \beta(b - a)$

et si $a < b$: $a - b = -x$ ($x = b - a$), on obtient βx . C'est la règle
 $(-x)(-\beta) = x\beta$.

On pourrait continuer par la « comparaison » et les règles sur les inégalités. Nous voulions seulement indiquer une façon de procéder — façon que l'on peut d'ailleurs critiquer pour diverses raisons — mais qui va nous servir de support aux commentaires suivants, faits avec la participation de la classe.

Je propose aux élèves de rechercher les points importants de ce qui précède, ce qu'il y a de nouveau, etc... Nous obtenons ainsi, par exemple :

1) la soustraction est rendue toujours possible grâce aux nouveaux nombres ;

2) on a adjoint les nombres négatifs aux nombres naturels, qui s'appellent maintenant nombres positifs ;

3) en ce qui concerne les règles de calcul, opinions variables : les élèves pensent qu'on n'a fait qu'utiliser un nouveau symbole pour interpréter et compléter les opérations connues, ou bien qu'elles sont démontrées comme des théorèmes d'arithmétique, mais en utilisant la définition nouvelle.

Dans les deux cas je souligne qu'on reconnaît bien la présence d'une définition, et je précise : Les nouveaux nombres, et les règles de calcul qui les accompagnent, sont des *définitions* :

a) nous avons défini en réalité l'ensemble des relatifs : positifs, négatifs, zéro ; ce qui est mieux qu'une juxtaposition des nombres négatifs aux nombres naturels,

b) mais on veut une *correspondance* (on va dire à quel point de vue) entre les positifs et les naturels,

c) ces règles de calcul sont bien des *définitions*, car, par exemple : $(-x) + (-\beta)$ n'avait pas encore d'existence : sont-elles arbitraires ? — Non, elles sont suggérées par les propriétés des polynômes arithmétiques. Autrement dit, alors elles sont établies de manière à *posséder les propriétés générales* (commutativité, etc...), et comme on les applique à tous les relatifs, on veut que dans la correspondance indiquée plus haut l'addition et la multiplication soient respectées.

En résumé, nous avons une *construction* selon les exigences suivantes :

- 1) zéro est élément neutre vis-à-vis de l'addition ;
- 2) la soustraction est toujours possible ;
- 3) les opérations ont les propriétés générales ;
- 4) les relatifs contiennent un sous-ensemble, les positifs, qui s'ajoutent et se multiplient comme les nombres naturels ; on dit qu'il y a *isomorphisme* vis-à-vis de l'addition entre ces deux sortes de nombres.

Plus brièvement encore : cette méthode, appelée *méthode d'extension*, consiste en une construction imposée par

- { des règles de calcul,
- { un principe de *concordance*.

On peut terminer en disant qu'on aura à faire d'autres extensions, par exemple pour rendre la division toujours possible, et qu'on suivra alors très exactement cette méthode (sans redécouverte).

Résumons les questions que nous posons à nos collègues :

- 1) La redécouverte de l'axiomatique est-elle possible en Mathématiques Élémentaires, mieux encore : dans une classe antérieure ?
- 2) Usage des congruences, des groupes, des premières définitions sur les ensembles.

3) Une axiomatique non intègre est-elle acceptable, ou bien :

4) Doit-on faire le développement de Péano en Mathématiques Élémentaires ; un fragment du cours de Mathématiques Supérieures peut-il entrer en Mathématiques Élémentaires ?

5) Et enfin — là il faut insister beaucoup — si nous voulons pouvoir faire une arithmétique seulement un peu satisfaisante en Mathématiques Élémentaires, obtenons un changement dans le libellé du programme, qu'on ne nous inflige pas un début par la numération décimale, qu'on ne nous inscrive pas « notion de fraction ». Il faut que nous obtenions une autre rédaction.

J. SIROS,

Professeur au Lycée Lakanal.

Histoire des Mathématiques

Je voudrais signaler un petit ouvrage que vient de publier M. Pierre SERGESCU aux éditions Sédès, Paris : *Coup d'œil sur les origines de la science exacte moderne*.

Il rendra de grands services à ceux qui voudront s'initier, ou initier leurs élèves, à l'histoire de notre science.

Une première partie, de 106 pages, est formée du texte des causeries de l'auteur à la Radiodiffusion française, émissions culturelles de 1950. La lecture en est aisée et attachante.

Suit un copieux index des noms, de 74 pages, en petits caractères, où les renseignements sont puisés aux meilleures sources. Les notices sur d'Alembert, Archimède, Aristote, par exemple, occupent chacune toute une page.

Un index explicatif de quelques termes techniques s'adresse aux non-spécialistes, mais l'article « Infini », entre autres, sera utile à tout mathématicien pour comprendre certaines conceptions du Moyen Age.

Les notes bibliographiques qui terminent le volume guideront sérieusement ceux qui voudront pousser plus loin leur initiation d'historiens des sciences.

Un seul reproche : l'auteur oublie de signaler qu'il est le secrétaire perpétuel de l'Académie d'Histoire des Sciences.

Jean ITARD.

Avis

Groupes de Travail des Professeurs de Mathématiques

Quelques questions relatives à l'enseignement de la géométrie

(Mlle FÉLIX et M. FOUCHÉ)

(On peut naturellement ne répondre qu'à certaines des questions qui suivent)

Question préalable. — Pensez-vous que l'on doive envisager trois phases de l'enseignement de la géométrie avec buts et méthodes propres :

Premier stade : Enseignement prélogique : usage des instruments ; observations ; première classification des formes ; vocabulaire de base (substantifs, adjectifs).

Deuxième stade : Initiation à la logique (en France, classes de Quatrième et Troisième). Forme de raisonnement et divers schémas logiques ; vocabulaire logique ; connaissance des théorèmes fondamentaux (programme très souple) ; liaison avec l'arithmétique et l'algèbre.

Troisième stade (classes de Seconde, Première, Mathématiques) : Étude systématique de la géométrie élémentaire.

Quelle que soit la réponse, y a-t-il une distinction nécessaire ou désirable de divers ordres d'enseignement ? À quel stade ? Pour quels élèves ? Dans les réponses, à tout ce qui suit, préciser le niveau considéré.

I. LES BASES PSYCHOLOGIQUES. — 1. Les conceptions de l'enfant acquises avant le début de l'enseignement de la géométrie, spécialement, de l'enseignement logique. Les connaît-on ? Peut-on, doit-on en tenir compte ?

2. Les notions obtenues par la géométrie pratique sont-elles utiles ? Dangereuses ? Avant l'étude logique ? Pendant celle-ci ?

3. Est-il exact que l'enfant a le sens d'une région (papier découpé) plutôt que d'une ligne ou d'un point ? Jusqu'à quel stade ?

Qu'est-ce qu'une ligne pour l'enfant ? Une figure perçue avec sa forme, sa grandeur, etc..., ou la frontière d'une région, ou la frontière commune à deux régions, ou la trajectoire d'un point mobile (ligne dessinée), ou un ensemble de points, ou une enveloppe de lignes plus simples (droites, par exemple) ? Quand la notion se complète-t-elle et dans quel ordre ?

Croyez-vous que la réponse à cette question éclaircirait les difficultés de l'enseignement des lieux géométriques ?

4. Les difficultés dues au vocabulaire courant et aux notions vulgaires.

5. Les possibilités de constructions logiques de l'enfant. De quoi dépendent-elles ? Leur évolution.

6. L'intuition. Est-elle plus qu'une vision mentale de plus en plus rapide

résultant de la confiance en soi due à l'habitude du succès, et de la puissance de l'imagination ?

II. LA RECHERCHE COLLECTIVE ET INDIVIDUELLE. — 1. Le choix du sujet. Peut-il être suggéré par l'enfant, par la classe ? En tout cas, quel est le rôle de l'intuition, de la logique, des sentiments esthétiques (simplicité, symétrie) ?

L'énoncé du travail proposé doit-il préciser le résultat demandé ? Dans quelle mesure ? Quel est, pour l'enfant, le cas normal et le cas d'exception ? Le cas particulier ou le cas général ? Ordre de leur étude ?

Que le but soit précisé ou non, l'énumération des théorèmes connus est-elle le premier acte de la recherche ? Est-elle essentielle ou seulement utile parfois ? Les tâtonnements, les expériences graphiques, les constructions matérielles sont-ils utiles ? Recommandés ?

Le rôle de l'intuition, ou simplement de la sympathie pour une évidence est-il avouable ? Dans la rédaction de la solution, les traces sont-elles autorisées ou bien la logique est-elle seule admise ?

2. Est-il utile que les élèves soient persuadés du rôle de la logique ? Si oui, comment peut-on le leur faire sentir ? Peut-on donner des exemples simples pour faire sentir que la logique donne plus que l'expérience et l'observation même très soignée ? Pour faire sentir que l'intuition est utile ? Dangereuse ?

3. Quelles sont les qualités morales ou intellectuelles que forment ou développent la sportivité mentale de l'esprit de découverte, l'exercice de la logique, la pratique de la géométrie en général ? Voyez-vous là un des buts de notre enseignement ?

4. La construction préalable du précis réel concret aide-t-elle à la conception de l'exact idéal abstrait ? Quelle efficacité présente, après l'étude abstraite, le retour au concret précis ? L'examen des conditions à réaliser pour la précision du dessin est-il utile ? (Par exemple, dénombrement des opérations, des traits de construction). D'autres instruments que la règle et le compas font-ils partie de la géométrie ? Utilisez-vous d'autres constructions que le dessin (Meccano, etc...) ?

III. LE COURS (en particulier au deuxième stade). — 1. Le cours doit-il être un enchaînement logique de théorèmes et de définitions ? Cela seulement ? La structure du cours doit-elle être « linéaire », chaque théorème pouvant être numéroté à une place déterminée à connaître, ou bien « régionale », chaque chapitre étant centré sur l'étude d'un genre de figure sans que, dans chaque chapitre, l'ordre des théorèmes importe, ni même que leur individualité soit nettement marquée ?

2. Aux divers stades, les bases intuitives du cours doivent-elles être examinées au point de vue de l'axiomatique ou des évidences sensorielles. Quels faits mathématiques, considérés comme évidents faut-il analyser ou bien admettre implicitement ? Comment reconnaître ce qu'il est inutile de démontrer ? Impossible de démontrer ?

3. Que pensez-vous des méthodes où l'on part, non des éléments simples (segments, angles, etc...), mais des figures habituelles de la vie courante (briques, cubes, rectangles, carrelages, etc...).

4. Est-il avantageux, au début de la géométrie logique, d'admettre, en se bornant à des observations, de nombreux énoncés de théorèmes (tous les cas d'égalité des triangles, existence des rectangles, angles formés par des parallèles, somme des angles d'un triangle) dans le but de pouvoir faire rapidement des problèmes exerçant la logique et l'intuition ?

Admettez-vous ou démontrez-vous (en classe de Quatrième) l'existence des parallèles ? Comment présentez-vous le postulatum d'Euclide ? Démontrez-vous les inégalités fondamentales ? Les positions relatives de deux cercles, d'une droite et d'un cercle, avant d'utiliser ceci pour les constructions ? Quels autres théorèmes préférez-vous admettre ?

IV. AUTRES OBSERVATIONS qui vous semblent opportunes. — Prière d'adresser les réponses à :

Mlle FÉLIX, professeur au Lycée La Fontaine, 1, place Molitor, Paris, 16^e.

M. FOUCHÉ, professeur au Lycée Janson-de-Sailly, 106, rue de la Pompe, Paris, 16^e.

Mlle DIONOT, Centre International d'Etudes Pédagogiques de Sèvres (Seine-et-Oise).

Le Gérant : L. PARAZINES.

Cahors. Imp. A. Coueslant (*personnel intéressé*). 82.931 — 1952
C.O.A.L. 31.2330. — Dépôt légal : 1-1952

Librairie DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, PARIS-V^e

COURS COMPLET BRACHET DUMARQUÉ

avec la collaboration de **P. COUDERC** pour la Cosmographie

Signalé spécialement, parmi les ouvrages nouveaux :

COSMOGRAPHIE, classe de Mathématiques.

Largé synthèse des plus récentes découvertes.

PETITES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES NATURELLES.

(Dépliant à trois volets, sur papier fort.)

Modèle commode pour Cours et Examens (Bacc, B.E.P.C.), Mathématiques et Physique.

TABLES DE LOGARITHMES A 5 DÉCIMALES.

Nombres — Degrés — Grades — Sans astérisques ni chevauchements.

Initiation facile — Utilisation rapide — Risques d'erreur réduits au minimum.

AIDE-MÉMOIRE DE MATHÉMATIQUES, classes de Première.

Tout le cours condensé dans un cahier illustré de 20 pages.

Catalogue et Spécimens sur simple demande

LAROUSSE

à l'usage de *l'Enseignement classique*
l'Enseignement moderne

Un Cours vivant et complet

MATHEMATIQUES

M. FAUCHEUX — R. FRANCK

Agrégés de Mathématiques

des volumes établis selon la lettre et l'esprit
des plus récents programmes officiels, qui
assurent aux élèves, avec les connaissances
nécessaires pour réussir aux divers examens,
une véritable culture mathématique

Un cours objectif, un cours sobre, un cours
gradué, avec de très nombreux exercices et
figures, présenté dans le format 13 X 19 cm.

CLASSE DE SIXIÈME

Elève et Maître 2 vol.

CLASSE DE CINQUIÈME

Elève et Maître..... 2 vol.

CLASSE DE QUATRIÈME

Elève et Maître 2 vol.

CLASSE DE TROISIÈME

et Tables Trigonométriques. 1 vol.

CLASSE DE SECONDE

Géométrie plane..... 1 vol.

CLASSE DE PREMIÈRE

Géométrie dans l'espace.... 1 vol.

A L G È B R E

et Trigonométrie 1 vol.

Classes de Seconde et de Première

En vente chez tous les LIBRAIRES et à la LIBRAIRIE LAROUSSE

13 à 21, RUE MONTPARNASSE - PARIS-6°

Roland MAILLARD et

Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne,
Chargé d'un cours
à l'École Normale Supérieure

Albert MILLET

Professeur agrégé
au Lycée Janson-de-Sailly
et à l'École Normale Supérieure
de l'Enseignement Technique

COURS DE MATHÉMATIQUES

Classe de Sixième Classique et Moderne

Mathématiques. Un vol. in-16, br. ou cart.,
de 192 p., avec 900 exercices et problèmes.

*Une méthode
efficace*

Classe de Cinquième Classique et Moderne

Mathématiques. Un vol. in-16, br. ou cart.,
de 272 p., avec 900 exercices et problèmes.

Une culture

Classe de Quatrième Classique et Moderne

Mathématiques. Un vol. in-16, br. ou cart.,
de 288 p., avec 687 exercices et problèmes.

mathématique



Classe de Troisième et Brevet d'études

Mathématiques. Un vol. in-16, broché, de
304 p., avec 1185 exercices et problèmes.

Une

Classe de Seconde Classique A et B

Mathématiques. Un vol. in-8, broché, de
320 p., avec 714 exercices et problèmes.

nouvelle

Classe de Seconde Classique C et Moderne

Algèbre. Un vol. in-8, br. ou cart. de 256 p.,
avec 633 exercices et problèmes.

présentation

Géométrie. Un vol. in-8, br. ou cart., de
444 p., avec 724 exercices et problèmes.

typographique

Classe de Première Classique A et B

Mathématiques. Un vol. in-8, br. ou cart.
de 288 p., avec 600 exercices et problèmes.

LIVRES DU MAÎTRE :

Classe de Première Classique C et Moderne

Algèbre et Trigonométrie. Un vol in-8, br.
de 288 p., avec 634 exercices et problèmes.

Livre du Maître de Sixième
(Corrigés)

Géométrie. Un vol. in-8, broché, de 336 p.,
avec 528 exercices et problèmes.

Livre du Maître de Troisième
(Corrigés)

Classe de Mathématiques

Algèbre. Un vol. in-8, br. ou cart. de 368 p.,
avec 890 exercices et problèmes.

Géométrie. Un vol. in-8, broché ou cart.,
de 480 p., avec 693 exercices ou problèmes.

A PARAÎTRE :

Classe de Mathématiques (Technique)

Géométrie. Un vol. in-8, broché ou cart.,
496 p., avec 711 exercices et problèmes.

Classe de Mathématiques

Trigonométrie.. (Avril 1952)
Cosmographie (Rentrée 1952)

HACHETTE