

Angles orientés

Sur un article de M. DELPLA

J'ai lu avec le plus grand intérêt l'article de notre collègue, DELPLA sur les angles orientés, paru dans le n° 144. Si cet article fait le plus grand honneur aux scrupules de notre collègue, il est loin, cependant, d'avoir mon assentiment, car, à mon avis, il dramatise beaucoup trop la notion d'angles orientés. Je ne reprendrai dans ce qui suit, pour justifier mon point de vue, que la question des bissectrices de deux droites et, naturellement, le problème cité par notre collègue.

Dans les classes inférieures, après avoir constaté que les bissectrices (demi-droites) des quatre angles formés par deux droites concourantes forment deux droites perpendiculaires, on appelle celles-ci les bissectrices (droites) des deux droites concourantes en cause. Si l'on veut soumettre ces bissectrices aux raisonnements par angles orientés, il faut, naturellement, en donner une définition — ou une propriété caractéristique — qui les rattache à ces angles.

Dans ma classe de Mathématiques, j'expose la question comme elle est exposée dans le cours de Mathématiques ESTÈVE et MITAULT, édité par Istra, mais, comme un cours écrit ne remplacera jamais un cours parlé, je donne au tableau des explications supplémentaires. Voici donc dans quel esprit j'expose la question devant les élèves :

Soient deux droites OA, OB, concourantes en O, et Ox, Oy leurs bissectrices (droites). En marquant sur la figure le (OA, Ox) et le (Ox, OB) dont les grandeurs sont des angles aigus (il y en a évidemment deux pour chacun, en position), je fais observer que ces deux angles sont égaux (même grandeur et même sens) ; en conséquence, si l'on prend un (OA, Ox) *quelconque* et un (Ox, OB) *également quelconque*, on en déduit que leur différence est un multiple entier de π . Même remarque avec Oy. On peut donc dire que l'on a :

$$(OA, Ox) = (Ox, OB) \text{ mod. } \pi \text{ et } (OA, Oy) = (Oy, OB) \text{ mod. } \pi.$$

La relation ainsi trouvée — c'est, en effet, la même pour Ox et Oy — est-elle caractéristique de ces deux droites ? Si une troisième droite Oz possède la même propriété, on a $(OA, Oz) = (Oz, OB) \text{ mod. } \pi$, et, par soustraction avec $(OA, Ox) = (Ox, OB) \text{ mod. } \pi$, on en déduit $(Ox, Oz) = (Oz, Ox) \text{ mod. } \pi$, c'est-à-dire $2(Ox, Oz) = 0 \text{ mod. } \pi$, ou $(Ox, Oz) = 0 \text{ mod. } \frac{\pi}{2}$: Oz n'est donc autre que Ox ou Oy.

Je tiens à signaler, en passant, que $2(Ox, Oz)$ indique bien une multipli-

cation par 2, car il est loisible de donner aux deux écritures (Ox, Oz) en deux endroits différents la même valeur : c'est en cela, à mon avis, que consiste l'extrême souplesse des raisonnements par angles orientés et qui sent bien mieux en utilisant la mention $\text{mod. } \pi$, par exemple, qu'en traînant, par addition ou soustraction, des $k\pi$, $k'\pi$, $k''\pi$...

La propriété caractéristique rattachant les bissectrices aux angles orientés étant ainsi trouvée, on peut alors soumettre les bissectrices à tous raisonnements au moyen de ces angles. Naturellement, on peut remplacer ladite propriété par toute autre équivalente, par exemple :

$$(OA, Ox) = \frac{1}{2} (OA, OB) \text{ mod. } \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ou} \quad (Ou, Ox) = \frac{1}{2} [(Ou, OA) + (Ou, OB)] \text{ mod. } \frac{\pi}{2}$$

On peut, si l'on veut, faire remarquer aux élèves que tous les angles (OA, OB) sont partagés chacun en deux parties égales, soit par Ox , soit par Oy , mais cela est au fond bien superflu et n'intervient nullement dans les raisonnements.

Cela étant, revenons au problème qui a fait l'objet de l'article de M. DEL-RIA : il s'agit du sujet donné à la deuxième partie à Toulouse en juin 1950.

Le 4° seul est en cause à propos de la relation $(CO, CP) = \frac{2}{3} (CO, \Delta)$. A mon avis, cette relation n'est pas tout à fait exacte (elle l'est cependant, mod. $\frac{\pi}{3}$ car (CO, Δ) y étant défini à $k\pi$ près, $\frac{2}{3}(CO, \Delta)$ y est défini à $\frac{2k\pi}{3}$ près, alors que (CO, CP) y est défini à $h\pi$ près, et comme il doit y avoir accord parfait entre les deux membres, $h\pi$ doit être un multiple de $\frac{2\pi}{3}$, ce qui exige que $h\pi$ soit, en réalité, un multiple de 2π : autrement dit, pour être correcte, et pour mieux répondre à la fin du 4°, la relation aurait dû s'écrire $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CP}) = \frac{2}{3} (CO, \Delta) \text{ mod. } \frac{2\pi}{3}$. C'est ce que prouve le raisonnement suivant : PO et PP'' étant deux cordes égales du cercle (C, CO) , on a : $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CP}) = (\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CP''}) \text{ mod. } 2\pi$.

Δ étant la bissectrice (droite) des demi-droites CP, CP'' , cette relation s'écrit successivement :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CP}) &= 2 (CP, \Delta) \text{ mod. } 2\pi, \\ (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CP}) &= 2 (CP, CO) + 2 (CO, \Delta) \text{ mod. } 2\pi. \end{aligned}$$

En constatant que $(CO, CP) = (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CP}) \text{ mod. } \pi$, donc que $2 (CO, CP) = 2 (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CP}) \text{ mod. } 2\pi$, on obtient facilement $3(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CP}) = 2 (CO, \Delta) \text{ mod. } 2\pi$, et enfin $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CP}) = \frac{2}{3} (CO, \Delta) \text{ mod. } \frac{2\pi}{3}$.

Remarquons que ceci donne, au fond, une condition nécessaire et suffi-

sante pour qu'un point P du cercle (C, CO) soit tel que la corde passant par P et égale à PO (autre que PO) soit perpendiculaire à Δ . Il y a donc trois points P répondant à la question et ils sont les sommets d'un triangle équilatéral. D'où la propriété de l'hyperbole faisant l'objet du 4^e du problème cité, à savoir : *Si une hyperbole a pour excentricité 2, tout cercle qui passe par un foyer, et le symétrique de ce foyer par rapport à la directrice correspondante (ce symétrique n'est autre qu'un sommet) recoupe l'hyperbole en trois points formant un triangle équilatéral.*

Indépendamment de l'hyperbole, on a un problème assez intéressant sur les angles orientés : *Soit un cercle de centre O , A un point de ce cercle et D une droite passant par O . Trouver sur ce cercle un point P tel que la corde passant par P et égale à PA (autre que PA naturellement) soit perpendiculaire à D . Le problème ayant plusieurs solutions, indiquer leur disposition sur le cercle.*

En terminant, je me permets de former le vœu que les collègues échan- gent un peu plus souvent leurs vues sur la pédagogie des notions modernes — disons plutôt, pour être dans le vrai, dernières nées dans le programme de la classe de Mathématiques — comme celles de vecteurs et d'angles orientés : la mise au point de cette pédagogie ne pourra qu'y gagner.

R. ESTÈVE.