

Etude d'une démonstration d'équivalence entre propriétés géométriques

Les élèves connaissent déjà la définition d'une conique à centre comme lieu des centres des cercles passant par un point fixe F' et tangents à un cercle fixe (δ) de centre F . Les cas particuliers où F' est, soit sur (δ) , soit en F , ont été étudiés et sont désormais exclus. Le problème consiste à transformer cette définition.

On suppose établie la formule de la différence des puissances d'un point A par rapport à deux cercles non concentriques (C) et (C') ayant pour centres respectifs O et O' : (1) $P_C(A) - P_{C'}(A) = 2\overline{O'O} \cdot \overline{Aa}$ où a est la projection orthogonale de A sur l'axe radical de (C) et (C') .

DONNÉES. — α . Deux cercles égaux fixes de rayon égal à $2a$ l'un (δ) ayant pour centre un point F' , l'autre (δ') ayant pour centre un point F . On pose $FF' = 2c$ avec $c \neq 0$ et $c \neq a$ (cette dernière restriction n'étant pas indispensable).

β . Un point *quelconque* M du plan, et le cercle (μ) de rayon ϱ , qui a pour centre M et qui passe par F' .

(Le lecteur est invité à faire la figure).

MÉTHODE. — On cherchera une relation qui permette d'exprimer simplement *par la suite* que le cercle (μ) est tangent au cercle (δ') .

RECHERCHE DE LA RELATION. — α . *Position relative de (μ) et de (δ')* : Il n'est évidemment pas indiqué de comparer la distance des centres à la

somme et à la différence des rayons. Trop de cas de figure devraient être examinés : on ne sait rien sur M.

Les élèves se rappellent facilement que le nombre de points d'intersection de deux cercles est le même que celui de l'un d'eux avec leur axe radical. On tracera donc Δ , axe radical de (μ) et (δ') , et on cherchera à évaluer la distance FK de F à Δ . La formule (1) est toute indiquée :

$$P_{\delta'}(F) - P_{\mu}(F) = 2 \overline{MF} \cdot \overline{FK}.$$

D'où $|-4a^2 + \varphi^2 - MF^2| = 2 MF \cdot FK$. Ainsi, FK est exprimée en fonction de MF et de φ .

β . Le cercle (μ) passe par F' : c'est-à-dire que $\varphi = MF'$. Par suite, $2MF \cdot FK = |-4a^2 + MF'^2 - MF^2|$. On reconnaît dans $-4a^2 + MF'^2$ la $P_{\delta}(M)$ donc au second membre $|P_{\delta}(M) - P_F(M)|$, F désignant ici le cercle-point.

On est conduit à tracer l'axe radical D de (F) et (δ) . Et en désignant par H la projection orthogonale de M sur D, par application de la formule (1), on obtient : $2 MF \cdot FK = 2 F'F \cdot MH$. En définitive, quel que soit M dans le plan, on a :

$$(R) \quad \boxed{\frac{MF}{MH} = \frac{2c}{FK}}$$

EQUIVALENCE DES DEUX DÉFINITIONS. RÉFLEXIONS SUR LA MÉTHODE. — « μ tangent à (δ) » équivaut — on l'a vu — à $KF = 2a$, c'est-à-dire d'après la relation (R) à $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$. Et, par suite, en ce qui concerne M, le fait qu'il soit sur la conique Γ ayant pour cercles directeurs (δ) et (δ') , et le fait qu'il satisfasse à la relation $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$, sont deux propriétés équivalentes. Posons $\frac{c}{a} = e$. La conique Γ apparaît comme identique au lieu des points M tel que $\frac{MF}{MH} = e$.

Mais il y a plus : il est facile d'amener les élèves — si toutefois ils n'y viennent pas d'eux-mêmes — à se demander « ce qui se passerait » si FK , au lieu d'être égal à $2a$, lui était, soit inférieur, soit supérieur. Les nombres positifs seront donc partagés en trois classes auxquelles correspondront, d'après la remarque faite sur les points communs à deux cercles et à leur axe radical, et d'après la relation (R), les trois lignes du tableau de propriétés équivalentes qui suit :

(μ) coupe (δ)	$\rightleftarrows$	$KF < 2a$	$\rightleftarrows$	$\frac{MF}{MH} > e$
(μ) est tangent à (δ)	$\rightleftarrows$	$KF = 2a$	$\rightleftarrows$	$\frac{MF}{MH} = e$
(μ) ne coupe pas (δ)	$\rightleftarrows$	$KF > 2a$	$\rightleftarrows$	$\frac{MF}{MH} < e$

On est conduit à définir si on ne l'a pas fait plus tôt, l'extérieur et l'intérieur d'une conique, et à remarquer : de même que le nombre $2a$ est la

coupure entre les nombres inférieurs à $2a$ et les nombres supérieurs à $2a$, de même la courbe Γ apparaît comme une coupure entre deux régions du plan, et à chaque propriété caractéristique de Γ correspond une propriété caractéristique de chacune de ces régions.

L'exposé précédent illustre de remarquable manière, sous ses différents aspects (suppression des réciproques, extension au plan des propriétés d'une courbe), la réflexion de Henri LEBESGUE, rapportée par notre collègue POCHARD, dans le numéro 141 du *Bulletin*, auquel le lecteur est prié de se reporter.

Signalons accessoirement à l'actif de la démonstration précédente l'introduction toute naturelle des directrices et de l'excentricité d'une conique.

LIEU DES POINTS DONT LE RAPPORT DES DISTANCES A UN POINT FIXE F ET A UNE DROITE FIXE D EST UN NOMBRE CONSTANT e . — Ce lieu vient d'être trouvé dans le cas où D est l'axe radical du cercle-point F et d'un cercle (δ) non centré en F, ne passant pas par F, e étant le rapport FF' au rayon de (δ) .

Tout ensemble (F, D, e) peut-il être obtenu de cette manière ? D'abord il est évidemment nécessaire que la distance FL de F à D soit différente de 0 et que e soit positif et différent de 1. Il est alors possible de construire (δ) connaissant F, D, e : il suffit pour cela de tracer un cercle (δ_1)

ayant pour centre un point F'_1 de FL, distinct de F et pour rayon $\frac{FF'_1}{e}$,

de tracer l'axe radical D_1 de (F) et (δ_1) [qui ne passe pas par F, puisque $e \neq 1$], et de faire subir à ce cercle (δ_1) l'homothétie de centre F qui transforme D_1 en D. Le cercle obtenu sera (δ) .

REMARQUE. — La formule (R) est encore valable pour le cas exclu où $c = a$, moins intéressant dans la pratique, mais non pas du point de vue théorique. On obtient alors l'équivalence entre le lieu des centres des cercles tangents en un point donné à un cercle donné, et le lieu des points tels

que $\frac{MF}{MH} = 1$ quand F est sur D...

Le lieu $\frac{MF}{MH} = 1$, quand F n'est pas sur D, doit être traité à part.

Dans le même ordre d'idées, si on prend deux axes de coordonnées bien choisis et qu'on laisse provisoirement indéterminé le point $M(x, y)$ du plan, on peut établir la relation

$$MF^2 - e^2 MH^2 = \frac{1}{a^2 - c^2} \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 \right]$$

et par suite l'équivalence entre :

$$\frac{MF}{MH} > e \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} > 1$$

$$\frac{MF}{MH} = e \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$$\frac{MF}{MH} < e \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} < 1$$

dans le cas où $a > c$ (ellipse). Modifications évidentes si $a < c$.

Un dernier mot pour signaler que les élèves apprécient particulièrement ces procédés, d'abord parce qu'ils voient disparaître l'obligation souvent fastidieuse d'une réciproque, mais aussi parce qu'ils ont conscience qu'on obtient ainsi, sans effort supplémentaire, des résultats plus étendus.

A. MAUGUIN,

Professeur au Lycée de Montauban.