

A propos de la « mise en équations »

Deux articles publiés dans les derniers numéros du *Bulletin* m'amènent à livrer à l'appréciation de mes collègues quelques remarques sans prétention.

Nous apprenons à nos élèves à résoudre par le calcul algébrique ou trigonométrique certains problèmes de géométrie, d'arithmétique, etc..., et dans cette intention, à les « mettre en équations ». Je m'élève contre cette expression, car elle consacre la maladresse qui, à mon sens, consiste précisément à négliger dans un premier examen de l'énoncé toute condition qui ne se traduirait pas par une équation, quitte à y revenir en fin de problème.

Pour traiter les problèmes dits « du premier ou du second degré », certains manuels préconisent le processus suivant :

1. Choix de l'inconnue (ou des inconnues).
2. Mise en équation(s).
3. Résolution algébrique de l'équation (ou des équations).
4. Discussion de la résolution algébrique précédente.
5. Retour au problème. Conenance des racines.

Le seul fait qu'on indique « retour au problème » montre bien qu'on s'en est écarté. On a résolu en fait un problème d'algèbre qui n'équivaut pas exactement au problème posé, et c'est pourquoi on est obligé ensuite de déterminer dans quelle mesure les solutions de celui-là coïncident avec celles de celui-ci.

Il me paraît plus satisfaisant du point de vue théorique, et il est souvent plus simple dans la pratique, de déterminer dans une première étape un système de conditions (équations, inéquations, condition pour une inconnue de ne prendre que des valeurs entières, d'être différente de tel ou tel nombre, etc...) dont l'ensemble soit équivalent au problème proposé, de manière à consacrer la seconde étape uniquement à la résolution de ce système.

Soit, par exemple, le problème (Brachet et Dumarqué, 2° AB) : « Un canot à moteur a mis 3 h. 12 mn. pour remonter un fleuve sur une longueur de 30 km. et pour revenir à son point de départ, sans changer sa vitesse propre. La vitesse du courant est 5 km. à l'heure. On demande quelle a été la vitesse propre du canot. »

Le système de conditions à résoudre est :
$$\frac{30}{x-5} + \frac{30}{x+5} = 3,2$$
 avec $x > 5$.

La deuxième condition, qui exprime que le canot peut remonter le fleuve, évite toute difficulté pour résoudre l'équation. Compte tenu de $x > 5$, $x-5$ et $x+5$ sont différents de 0.

De même, si on a obtenu $2(x-1) = \sqrt{25-x^2}$ avec $x \geq 2$, ce système équivaut au suivant : $4(x-1)^2 = 25-x^2$ $x \geq 2$, tandis que les deux équations considérées isolément ne sont pas équivalentes (le domaine d'équivalence étant l'ensemble des nombres réels, bien entendu).

Ces considérations me paraissent s'imposer encore davantage dans les classes de Mathématiques Élémentaires. A ce niveau, les esprits sont assez mûrs du point de vue de la logique pour préférer transposer d'emblée, dans son intégralité, le problème posé sur le plan du calcul, plutôt que de négliger certaines conditions et d'y revenir par la suite.

Les discussions que comportent toutes les résolutions de triangles sont très rarement bien conduites par nos élèves. Quelquefois ils obtiennent les conditions exactes auxquelles doivent satisfaire les données, mais c'est par des procédés disparates et qui ne forment pas une discussion cohérente et bien ordonnée. A lire leurs copies sans idée préconçue, on n'est jamais sûr que toutes les conditions ont bien été obtenues et qu'inversement on n'a pas écrit des conditions trop restrictives. Ils mêlent — et parfois les manuels donnent le ton — à la discussion trigonométrique des considérations géométriques hors de question. Nombre d'entre eux avouent ne pas comprendre pourquoi, après certaines résolutions de triangles, le professeur écrit que le plus grand côté calculé est inférieur à la somme des deux autres (quand il calcule d'abord les côtés), alors que, dans d'autres cas, cette condition ne le préoccupe nullement (quand il calcule d'abord les angles).

La principale qualité à obtenir est donc la clarté. La méthode que je préconise me paraît apporter cette clarté.

Pour préciser, soit à résoudre un triangle connaissant les valeurs e_1, e_2, e_3 de trois grandeurs E_1, E_2, E_3 liées à ce triangle (par exemple, choisies au hasard, une bissectrice, une médiane, une hauteur).

Le problème posé peut se décomposer en deux parties :

1° Déterminer le (ou les) triangles dans lesquels E_1, E_2, E_3 ont respectivement pour valeurs e_1, e_2, e_3 , deux triangles égaux étant considérés comme une solution unique.

2° Calculer les six éléments — et éventuellement l'aire — de chacun des triangles répondant au 1°.

En ce qui concerne la première partie, on peut opérer comme suit :

(a) Choisir comme inconnues principales un côté a et les trois angles A, B, C .

(β) Etablir des formules (F) valables pour tous les triangles, qui expriment E_1, E_2, E_3 , en fonction de a, A, B, C ,

$$E_1 = f_1(a, A, B, C) \quad E_2 = f_2(a, A, B, C) \quad E_3 = f_3(a, A, B, C).$$

Toutes espèces de considérations géométriques et trigonométriques peuvent être utilisées pour l'établissement de ces formules.

(γ) Déterminer un système de conditions nécessaires et suffisantes.

— On signalera que si a, A, B, C sont les mesures de quatre éléments d'un triangle dans lequel $E_1 = e_1, E_2 = e_2, E_3 = e_3$, ces quatre nombres vérifient le système (S) suivant :

$$\begin{aligned} e_1 &= f_1(a, A, B, C) & e_2 &= f_2(a, A, B, C) & e_3 &= f_3(a, A, B, C), \\ A + B + C &= \pi & A &> 0 & B &> 0 & C > 0 & a > 0. \end{aligned}$$

— Inversement on prouvera sans difficultés qu'à tout ensemble de quatre nombres A, B, C, a vérifiant le système (S) correspond un triangle, et un seul, défini à un déplacement (dans l'espace) près, dont les trois angles et le premier côté ont ces nombres pour mesures [d'après les cinq dernières conditions de (S)], et que dans le triangle ainsi obtenu les éléments E_1, E_2, E_3 ont respectivement pour mesures e_1, e_2, e_3 (d'après les trois premières conditions de S).

— Ainsi a-t-on montré de manière indiscutable l'équivalence entre la première partie du problème posé et la résolution du système (S).

(δ) Il ne reste plus qu'à résoudre et à discuter (S), problème de pur calcul.

En ce qui concerne la deuxième partie du problème : calcul des six éléments, quatre d'entre eux ayant déjà été calculés, il ne reste qu'à obtenir b et c . A chaque ensemble A, B, C, a de valeur vérifiant (S) correspond, on vient de le voir, un triangle et un seul répondant à la question 1°. Dans ce triangle b et c sont donnés, par exemple, par les formules

$$b = a \frac{\sin B}{\sin A}, \quad c = a \frac{\sin C}{\sin A}.$$

Mais on peut aussi bien, après s'être servi de la première, calculer c par $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$. On peut même utiliser des considérations géométriques.

Ce qui est important, c'est qu'il n'y a plus aucune espèce de discussion à faire en ce qui concerne b et c .

Au risque de paraître me répéter, j'insiste sur le fait que cette manière de procéder donne toute liberté quant à l'établissement des relations (F) et quant à la détermination finale de b et c . En particulier, le calculateur n'est pas astreint à utiliser uniquement les formules de l'un des deux groupes classiques de relations entre les éléments d'un triangle quelconque, comme on le fait habituellement pour pouvoir appliquer ensuite une certaine réciproque relative au groupe utilisé (réciproque qui, d'ailleurs, ne me paraît pas entièrement satisfaisante en l'occurrence).

Toute la discussion est concentrée dans la détermination des solutions du système (S).

Ce genre de considérations pourrait être étendu à la recherche des lieux géométriques par utilisation de la géométrie analytique. Ce serait une occasion de critiquer les dénominations « lieux étrangers » et « lieux impro-

pres », d'abord du point de vue du vocabulaire, parce que ces épithètes me paraissent inacceptables pour le mot « lieux », mais aussi du point de vue de la méthode, parce que ces expressions prouvent qu'on a modifié le problème posé en passant à l'analytique. Mais je ne voudrais pas abuser de l'attention du lecteur qui a eu la bonne volonté de me suivre jusqu'ici.

A. MAUGUIN,

Professeur au Lycée de Montauban.

Note. — On se sera certainement aperçu que le processus indiqué dans l'article précédent pour la résolution d'un triangle constitue théoriquement une méthode générale applicable à tous les problèmes de ce genre. Il ne faudrait pas l'imposer aux élèves, car elle n'est pas toujours la plus simple. D'autres inconnues principales peuvent être choisies. On peut même n'en choisir que trois. En outre, aucune indication n'a été donnée — et pour cause — sur la résolution du système S.

Il serait souhaitable, surtout pour la pratique, que quelqu'un réussît à classer tous les problèmes imaginables de résolutions de triangles en un certain nombre de catégories bien définies, à chacune desquelles correspondrait une méthode générale de résolution, de telle sorte qu'il fût possible, dès qu'on aurait déterminé à quelle catégorie appartiendrait le problème posé, de connaître immédiatement la meilleure façon d'obtenir un système tel que (S), et, l'ayant obtenu, la meilleure façon d'en orienter la résolution.

MAUGUIN.