

Sur les Réciproques

Réponse à l'enquête de M. Pochard

Le vœu que j'exprime à la fin d'un autre article (1) rejoint bien, à mon avis, les préoccupations de notre Président POCHARD en ce qui concerne les réciproques dans la classe de Mathématiques. La phrase citée par notre collègue, due à M. LEBESGUE (*Traité sur les coniques*), et dont la richesse de sens ne saurait être trop soulignée, ne pouvait être mieux choisie en l'occurrence. Cette phrase devrait nous inciter surtout, non pas à demander toujours des suppressions dans le programme de la classe de Mathématiques — on ne fait que ça depuis une vingtaine d'années — mais, au contraire, à stopper ces suppressions en adoptant des modes d'exposition plus fructueux pour traiter plus aisément les questions figurant au programme : ce sera une façon d'alléger ce dernier sans en rien retrancher. Et cet allègement sera d'autant plus sensible que l'on choisira des outils appropriés, quitte même à les introduire dans le programme si l'on constate vraiment que c'est grâce à eux que l'allègement sera obtenu.

On prend souvent beaucoup de mal à établir le théorème de Simson, surtout si l'on tient à avoir une proposition et sa réciproque. Le mal ne serait certainement pas plus grand, mais avec un bénéfice incomparable quant aux résultats, si l'on se proposait, α , β , γ étant les projections orthogonales d'un point P sur trois droites BC, CA, AB formant un triangle

(1) Voir page 189, ligne 15 et suivantes.

ABC, de calculer $(\alpha\beta, \alpha\gamma)$ en fonction de la position de P dans le plan ; un calcul facile conduit à la relation

$$(1) \quad (\alpha\beta, \alpha\gamma) = (PB, PC) + (AC, AB) \text{ mod. } \pi.$$

On est ainsi invité, automatiquement, à chercher, non pas seulement le lieu des points P donnant des points α, β, γ alignés, mais le lieu des points P donnant à $(\alpha\beta, \alpha\gamma)$ une valeur donnée (à $k\pi$ près) ; en considérant cette valeur comme un paramètre, on obtient ainsi tous les cercles d'un faisceau du premier genre à points de base B et C, dont fait naturellement partie le cercle circonscrit à ABC (d'où le théorème de Simson) et dont l'axe radical correspond à la valeur (AC, AB) de $(\alpha\beta, \alpha\gamma)$. Les cercles de ce faisceau sont en quelque sorte les courbes de niveau d'un champ de vecteurs dont la fonction de forces serait (PB, PC) à $k\pi$ près : on peut l'unifier en convenant de prendre le (PB, PC) dont la grandeur est un angle aigu.

Il est bien évident que, la relation (1) étant trouvée, les deux relations analogues ne pourront échapper à l'attention de l'élève : d'où de nouvelles questions, telles que le lieu des points P donnant chacun un triangle $\alpha\beta\gamma$ rectangle (on trouve les trois cercles orthogonaux au cercle ABC passant respectivement par les couples de points BC, CA, AB), le lieu des points P donnant chacun un triangle $\alpha\beta\gamma$ isocèle (on trouve, en général, les trois cercles d'Apollonius du triangle ABC), les points P donnant chacun un triangle $\alpha\beta\gamma$ équilatéral (on trouve les deux points communs aux trois cercles d'Apollonius, ce qui oblige à une étude poussée de ces cercles et de leurs dégénérescences), etc., etc...

Autre exemple. On ne prendrait pas plus de mal, au lieu de chercher le lieu des points P tels que $\alpha PA^2 + \beta PB^2 = k$ (α, β, k : nombres algébriques donnés), à étudier la quantité $\alpha PA^2 + \beta PB^2$ suivant la position du point P dans le plan : ceci donnera, non seulement ledit lieu, mais aussi des questions de maximum ou de minimum, un champ de vecteurs, etc... ; l'étude envisagée est donc payante et c'est là l'essentiel. Si l'on veut éviter la relation de Stewart, qui permet difficilement une extension à plus de deux points fixes, le recours au produit scalaire s'impose (tant pis si ledit produit ne figure pas au programme). On fait assez facilement comprendre à l'élève que l'introduction d'un point jouant le même rôle vis-à-vis des couples (A, α) , (B, β) apportera certainement une simplification à l'étude

proposée, tout comme le nombre $-\frac{b}{2a}$ dans l'étude du trinôme $ax^2 + bx + c$:

il devinera assez vite que ce point privilégié est le barycentre des points massifs ci-dessus. S'il ne le voit pas, on peut l'inviter à faire le raisonnement suivant, qui a certainement sa valeur éducative : introduisons un point arbitraire I que nous choisirons ensuite au mieux de la question posée, à savoir l'étude de $\alpha PA^2 + \beta PB^2$; il pense tout de suite à transformer en utilisant $\vec{PA} = \vec{PI} + \vec{IA}$, $\vec{PB} = \vec{PI} + \vec{IB}$, ce qui le conduit presque immédiatement à la relation

$$\alpha PA^2 + \beta PB^2 = (\alpha + \beta) PI^2 + 2\vec{PI} \cdot (\alpha\vec{IA} + \beta\vec{IB}) + \alpha IA^2 + \beta IB^2.$$

Il voit alors que le point I, qui fera le mieux son affaire, sera celui qui

annulera $\alpha \vec{IA} + \beta \vec{IB}$, c'est-à-dire le barycentre des points massifs (A, α), (B, β). Avec ce point I, la relation devient, en employant des notations évidentes, $f(P) = (\alpha + \beta) PI^2 + f(I)$.

Il en résulte une étude simple de $f(P)$ et la résolution d'une foule de questions aussi intéressantes les unes que les autres, en particulier le lieu des points P donnant à $f(P)$ une valeur donnée. On peut rattacher à ce lieu celui des points P tels que $PA = kPB$, puisqu'il se confond avec le lieu des points P tels que $PA^2 - k^2 PB^2 = 0$ ($\alpha = 1$, $\beta = -k^2$) : on voit ici que le point privilégié est le point I partageant $\vec{AB}$ dans le rapport k^2 , milieu des conjugués harmoniques de $\vec{AB}$ dans les rapports k et $-k$.

Il est à peine besoin de dire que l'on peut rattacher à la question précédente l'étude de l'expression $\alpha P_0 + \alpha' P_0'$, où P_0 et P_0' désignent les puissances d'un point P pour deux cercles (O) et (O') d'un même plan, cette expression différant de $\alpha PO^2 + \alpha' PO'^2$ par une constante. D'où de nouveaux lieux, en particulier celui des points P, dont le rapport des puissances pour les cercles (O) et (O') a une valeur donnée.

Notons bien que la méthode suivie peut s'appliquer à plus de deux points fixes ou à plus de deux cercles et qu'elle donne immédiatement des résultats analogues dans l'espace, par lequel on peut commencer si l'on veut. (Naturellement, en empiète peut-être sur un domaine... de chasse réservée).

En troisième lieu, je citerai les théorèmes de Menelaüs et de Jean de Céva : l'étude du produit $\frac{\vec{PB}}{\vec{PC}} \times \frac{\vec{QC}}{\vec{QA}} \times \frac{\vec{RA}}{\vec{RB}}$, attaché à un triangle ABC

et à trois points P, Q, R, pris respectivement sur les droites BC, CA, AB [que l'on pourrait noter simplement (PQR)] conduit à des résultats plus étendus que lesdits théorèmes, ceux-ci n'étant que deux aspects particuliers de la question : je laisse à mes collègues le soin d'approfondir.

Il serait facile de multiplier les exemples pour montrer combien la méthode préconisée par M. LEBESGUE est digne d'être prise en considération.

Mais, dira-t-on, que deviennent les réciproques dans cette affaire ? Eh bien ! tout simplement, elles disparaissent. Leur disparition ne tient qu'à la méthode utilisée. J'espère que nous n'allons pas les regretter ! Naturellement, si dans une question on n'a pas pu (ou pas su) trouver une méthode supprimant les réciproques, on traitera les réciproques avec tout le soin désirable.

En nous inspirant des conseils de M. LEBESGUE, qui conduisent à des méthodes permettant de traiter en un temps donné un sujet plus vaste que par le passé, nous couperons court à la maladie vraiment chronique des suppressions éventuelles et, qui sait, peut-être pourrons-nous (ce que beaucoup d'entre nous souhaitent plus qu'ils ne veulent le dire) rétablir dans le programme de la classe de Mathématiques tout ce qui a été supprimé depuis vingt ans, au préjudice de la Physique, surtout. Nous oublions un peu trop que nos collègues physiciens utilisent toujours, dans une classe déterminée des notions de Mathématiques que les élèves n'étudieront dans

leur cours de Mathématiques qu'un an plus tard au moins ; dans l'intérêt de l'élève, ceci est inadmissible et, il faut bien l'avouer, la faute en est plus au mathématicien qu'au physicien. Si des additions dans le programme s'imposent, qu'on n'aille pas surtout les repousser en mettant encore une fois sur le tapis le travail de l'élève. Le remède au surmenage n'est pas là. Si l'on veut alléger la besogne de l'élève, il faut d'abord supprimer la question de cours au Baccalauréat (j'approuve entièrement le point de vue de notre collègue ZERTWOG, de Buffon, exposé dans le n° 144) — mais, hélas ! il s'est encore trouvé une majorité pour son maintien —, il faut supprimer ensuite les compositions trimestrielles, tout au moins dans leur esprit actuel, car elles ne servent qu'à faire escamoter par l'élève le travail normal de chaque semaine (on peut faire des compositions à l'improviste, n'exigeant pas d'autre préparation qu'un travail régulier).

Il y a certainement quelque chose à faire. Si nous arrivons à nous mettre d'accord, il ne sera pas nécessaire de proposer notre point de vue, il suffira de l'imposer.

R. ESTÈVE.