

DEUXIÈME PARTIE

Sur l'introduction et l'utilisation des droites focales en géométrie élémentaire

Résumé de la conférence de M. l'Inspecteur général DONTOT, faite au cours des Journées d'information franco-belges au Centre International d'Etudes Pédagogiques de Sèvres, le 24 novembre 1951.

M. l'Inspecteur général DONTOT expose brièvement — en une heure — le plan, avec quelques détails, d'un ouvrage destiné aux élèves des classes de Mathématiques Élémentaires et de Mathématiques Supérieures, qu'il se propose de publier. Son objet est d'abord de définir quelles sont les propriétés des droites focales qu'il est souhaitable d'introduire dans l'enseignement de la géométrie en classe de Mathématiques Élémentaires, ensuite d'examiner s'il est possible, comme le désirait M. LEBESGUE, de substituer à l'exposé traditionnel de la théorie des coniques un exposé plus rationnel en utilisant la perspective et les propriétés des droites focales. Un tel exposé ne semble, dans l'état actuel de l'Enseignement du Second Degré, à sa place qu'au début de la classe de Mathématiques Supérieures.

I. INTRODUCTION DES DROITES FOCALES EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE. — Il semble bien que la notion de droite focale puisse être dégagée très simplement de l'étude d'un faisceau linéaire de sphères. Nous laissons au lecteur le soin de faire une épure. Soit $a'b'$ la projection frontale d'un cercle (O) dont le plan est de bout ; soient (o, o') le centre de ce cercle, $(os, o's')$ son axe, R son rayon. Une sphère (S) du faisceau linéaire de sphères contenant le cercle (O) est définie par son centre $S(s, s')$, point quelconque de l'axe du cercle (O). On notera que le cercle (O) étant donné, le plan horizontal de projection peut être arbitrairement choisi et que, par conséquent, la direction des verticales de l'épure est quelconque.

Les sphères (S) sont, sur l'épure, définies par leurs contours apparents frontaux, les cercles (S') d'un faisceau linéaire à points fixes a', b' . La similitude (Σ), par laquelle le vecteur $\overrightarrow{o's'}$ est transformé en $\overrightarrow{os}$ est une similitude fixe ; les transformés des cercles (S') par cette similitude sont des cercles passant par deux points fixes α, β . Soit (D) la verticale dont la projection horizontale est α ; la distance du centre S à la droite (D) est $s\alpha$. Soit ρ le rayon de la sphère (S) et θ l'angle des verticales et du plan du cercle ; nous avons $s\alpha = \rho \cos \theta$ et $o\alpha = R \cos \theta$. Il en résulte que :

1° le rayon d'une sphère (S) du faisceau est proportionnel à la distance de son centre à la droite (D) ;

2° la sphère (S) coupe la droite (D) sous un angle θ constant.

Cette dernière propriété, moins utile, mais plus spectaculaire que la première, introduit la notion de droites privilégiées — nous les appellerons focales du cercle (O) sans expliquer l'origine de cette dénomination —

qui coupent les sphères d'un faisceau linéaire dont le cercle de base est le cercle (O) sous un angle constant.

Il existe deux droites focales (au moins) du cercle (O) parallèles à une direction donnée (la direction des verticales) ; elles coupent le plan du cercle (O) en un point H intérieur à ce cercle, sont perpendiculaires au diamètre OH de ce cercle et font avec le plan du cercle un angle θ défini par l'égalité $OH = R \cos \theta$.

Le problème : existe-t-il une ou plusieurs sphères passant par un cercle (O) et coupant une droite donnée sous un angle φ donné ? peut être résolu très simplement en utilisant l'épure précédente. Il est très instructif ; il permet de démontrer que les droites focales définies plus haut sont les seules droites qui coupent les sphères (S) sous un même angle pour une droite focale donnée et que s'il existe une sphère (S) coupant une droite, non focale du cercle (O), sous un angle φ , il en existe une seconde (S₁) généralement distincte de la première et que les *sphères bissectrices* de (S) et de (S₁) sont des sphères fixes.

II. ÉTUDE (EN MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES) DES PROPRIÉTÉS ANGULAIRES ET MÉTRIQUES DE LA FIGURE FORMÉE PAR UN CERCLE (O) ET UNE DROITE FOCALE (D) DE CE CERCLE. — Les propriétés dont il s'agit ici sont celles qui ont été signalées par M. l'Inspecteur Général ROBERT, dans un remarquable article de *l'Enseignement Scientifique*, en 1928 ; elles se déduisent aisément d'une propriété des droites focales qui semble n'avoir pas, jusqu'ici, retenu l'attention des chercheurs.

La figure ci-contre (I) est une figure plane tracée dans le plan du cercle (O), de rayon R. Une droite focale AS perce le plan en A et se projette sur lui orthogonalement suivant As perpendiculaire à OA ; elle fait avec le plan du dessin un angle θ , tel que $OA = R \cos \theta$. S est un point quelconque sur la droite focale AS, mais fixe.

Soit ω le pied sur l'hypoténuse Os de la hauteur du triangle rectangle OAs ; il existe une similitude (ω_1) de centre ω et dans laquelle les transformés respectifs de O et A, sont A et s. L'angle de cette similitude est droit.

Soit M un point du cercle (O), S₁ son transformé par la similitude (ω_1). Constatons que sS₁, transformée de AM, lui est perpendiculaire et que l'on a

$$a \quad \frac{AS_1}{As} = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \text{c'est-à-dire } AS_1 = AS.$$

Il en résulte que :

le transformé de M par la similitude (ω_1) est le transformé du point fixe S dans l'un ou l'autre des rabattements du plan SAM autour de AM sur le plan du cercle (O).

Les propriétés les plus classiques des plans passant par une droite focale se déduisent sans nouvelle démonstration de la précédente. Observons seulement que AS₁, transformé de OM, est parallèle à la tangente MT au

cercle (O) ; les angles S_1Ax , TMx sont donc égaux ; donc, les angles (aigus) qu'une droite variable AM fait avec le cercle (O) et avec la droite focale AS sont égaux.

Observons encore que l'angle de AS_1 avec le plan SAM est égal à l'angle de AS avec le plan du cercle (O) (tout rabattement est une symétrie droite) ; il est donc constant. Or, AS_1 est parallèle à MT, donc, l'angle sous lequel un plan variable SAM passant par la droite focale AS coupe le cercle (O) est constant et a pour mesure θ .

Enfin, soit (Δ) la polaire de A par rapport au cercle (O) ; soient AK la distance de A à MT, polaire de M et MH la distance de M à (Δ) . Nous

$$\text{avons : } \frac{AK}{MH} = \frac{OA}{OM} = \cos \theta.$$

La distance du point M à la droite focale AS est égale à la distance de M à son rabattement AS_1 , donc est égale à AK.

Le rapport des distances d'un point M du cercle (O) à une droite focale AS et à la droite associée, polaire du pied A de la droite focale, est une constante égale à $\cos \theta$.

Par S, il passe deux droites focales du cercle (O) dont les pieds A et B sont symétriques par rapport à (ω) ; il existe donc une seconde similitude (ω_2) , de centre ω , dans laquelle B et s sont les transformés de O et B. L'homologue S_2 de M dans cette similitude est le second transformé de S par un des deux rabattements du plan SAM déjà signalés, S_1 étant le premier.

L'examen de la figure ci-contre conduit à constater que l'on a :

$$\begin{aligned} \widehat{AS_1M} + \widehat{BS_2M} &= \widehat{TMS_1} + \widehat{TMS_2}, \\ &= \pi - \widehat{S_1MS_2}, \\ &= \widehat{AsB}. \end{aligned}$$

C'est un théorème de Chasles.

La somme des angles que fait la génératrice SM d'un demi-cône à base circulaire avec les demi-droites SA, SB est constante.

La génératrice SM du demi-cône joint le sommet S à un point M du cercle de base ; SA, SB, sont les droites focales passant par S du cercle de base, A et B leurs pieds sur le plan du cercle.

III. CONSÉQUENCES DE CETTE ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE. — Nous nous sommes naturellement bornés, dans les paragraphes précédents, à donner un schéma des démonstrations ; ceci suffit pour se rendre compte de leur simplicité et de la façon dont elles s'offrent naturellement au chercheur. Il est regrettable que les propriétés qu'elles permettent de découvrir soient séduisantes, mais inutiles pour l'étude des coniques, parce que non projectives.

Les deux dernières de ces propriétés sont, en réalité, des propriétés des cônes obliques à bases circulaires. Il est possible, en démontrant préalablement quelques réciproques délicates, de définir un cône à base circulaire, soit comme le lieu des points dont le rapport des distances à une

des cônes à bases circulaires est en réalité bien plus simple que celle des coniques. D'abord, parce que les deux propriétés caractéristiques d'un cône, l'une métrique, l'autre angulaire, énoncées plus haut, sont offertes avec la définition du cône à base circulaire et même la précèdent ; la question de leur équivalence ne se pose pas. Ensuite, parce qu'il n'y a qu'un seul genre de cône à base circulaire, alors qu'il y a trois genres de coniques. Enfin, parce que certains problèmes, qu'il est d'usage de résoudre avec des coniques, ont un caractère artificiel qui nous échappe, parce que nous sommes habitués à eux et que ce caractère nous apparaît dès qu'on cherche leur équivalent pour le cône ; d'autres, au contraire, paraissent plus naturels, telle, par exemple, la propriété énoncée pour les coniques sous le nom de théorème de Poncelet. Ce changement de programme serait une occasion d'effectuer un tri dans des théories trop anciennes et un peu poussiéreuses.

IV. DÉFINITION ET ÉTUDE DES CONIQUES. — M. LEBESGUE, dans son ouvrage sur les coniques (Gauthier-Villars, 1942), après avoir signalé le caractère arbitraire et disparate des définitions des trois coniques, rappelle que toute étude des coniques a toujours été celle d'une transformée homographique de cercle. Nous nous proposons donc, comme nous y a invités expressément l'illustre mathématicien, de reprendre l'étude des coniques à partir d'une définition projective en utilisant la notion de droite focale.

Les coniques seront donc définies comme sections planes de cônes à bases circulaires. Nous admettons que les élèves connaissent la théorie de la perspective d'un plan sur un plan et les définitions de points et droites à l'infini introduites à cette occasion ; nous admettons aussi que l'exposé si contestable, quoique classique, de la théorie des pôles et polaires de mathématiques élémentaires, a été raisonnablement reconstruit de manière qu'apparaisse le caractère projectif de cette théorie ; nous admettons, par conséquent, que l'étude projective des coniques a été faite.

Le problème qui se pose est de donner une définition élémentaire de la droite focale, valable à la fois pour le cercle et les coniques. Il ne peut s'agir, naturellement, que de la définition analytique : une droite focale est une droite par laquelle passent une infinité de plans rectangulaires dont les traces sont conjuguées par rapport à la conique.

Il est assez curieux que cette définition, qui est la vraie définition des droites focales, la seule qui s'étende aux coniques, n'apparaisse à aucun moment dans la première étude élémentaire de ces droites, toute encombrée de propriétés d'angles, curieuses mais non essentielles. Nous avons longuement cherché le chemin logique conduisant des propriétés angulaires précédentes à la définition analytique, sans doute parce qu'il n'y avait aucune difficulté à le découvrir.

Rappelons d'abord un résultat injustement méprisé de géométrie dans l'espace ; soient (D) et (Δ) deux droites non coplanaires, d'angle θ , la condition nécessaire et suffisante pour que deux plans définis par (D) et deux points M et M' de (Δ) soient rectangulaires est que la sphère de diamètre MM' coupe (D) sous un angle ($\frac{\pi}{2} - \theta$), constant par conséquent.

Soient, maintenant, une conique (O), une droite (D) qui perce en A, point intérieur à la conique, le plan de celle-ci; et soit (Δ) la polaire de A. La condition nécessaire et suffisante pour que les plans (P) et (P') passant par (D) et coupant (Δ) en M et M' soient conjugués (aient leurs traces conjuguées) par rapport à la conique (O) est que M, M' soient conjugués par rapport à (O); il faut et il suffit pour cela que la sphère de diamètre MM' passe par un cercle réel (Σ), dont il est aisé de déterminer le plan, le centre et le rayon.

La condition nécessaire et suffisante pour que (D) soit une droite focale de la conique (O) est que tous les couples de plans conjugués (P) et (P') soient rectangulaires (cette définition n'est valable que pour les droites focales non singulières); il faut et il suffit pour cela qu'elle coupe toutes les sphères passant par (Σ) sous le même angle; il faut et il suffit pour cela que (D) soit une des droites focales de (Σ).

Nous sommes donc en possession d'une *définition des droites focales, bonne pour le cercle et qui puisse être étendue aux coniques.*

Nous appellerons droite focale d'une conique toute droite (D) telle que si deux plans passant par la droite (D) sont rectangulaires, ils sont aussi conjugués par rapport à la conique.

Si la réciproque de cette propriété est vraie, la droite (D) est une droite focale non singulière; les droites focales singulières sont les tangentes à la conique.

Nous connaissons un moyen de *construire les droites focales passant par un point A du plan de la conique*; il suffit de construire le cercle (Σ) par lequel passent les sphères de diamètre MM', M et M' étant deux points conjugués sur la polaire de A. Les droites focales de la conique passant par A sont les droites focales de (Σ).

L'auteur de la conférence n'a pu, faute de temps, multiplier les exemples de construction de droites focales; il s'est borné à construire les droites focales d'une ellipse passant par son centre O et à signaler que ces droites focales sont aussi focales de tous les cercles ayant pour centre un point M de l'ellipse, pour plan le plan normal en M et pour rayon la longueur du demi-diamètre conjugué de OM, cercle appartenant à une famille étudiée par M. l'Inspecteur Général ROBERT, le matin même. Il a donné ensuite une démonstration simple d'un théorème essentiel.

Le cône ayant pour base une conique (O) et pour sommet un point S arbitrairement choisi sur une droite focale non singulière de cette conique est un cône à base circulaire.

Ce théorème est essentiel pour la raison suivante: une conique (O_1) est définie comme section plane d'un cône (S) de sommet S à base circulaire (O), les deux droites focales SA, SB de ce cône (S) sont les deux droites focales du cercle (O) passant par S; elles sont aussi deux droites focales de la conique (O_1), mais deux droites focales particulières, celles qui passent par S, point qui n'a pas été choisi arbitrairement.

Ces droites focales particulières de la conique (O_1) jouissent de propriétés fort intéressantes; si M est un point de la conique (O_1), la somme

$\widehat{MSA} + \widehat{MSB}$ a une valeur indépendante de M et le rapport entre la distance de M à une de ces droites focales, SA par exemple, et la distance de M à la polaire par rapport à (O_1) du pied A_1 de SA sur le plan de la conique (O_1) est indépendant de M.

Il est important de savoir si deux droites focales de la conique (O_1) , sécantes, dont une au moins peut être arbitrairement choisie, ainsi que le point S' de concours de ces deux droites S'A', S'B', peuvent remplacer le couple SA, SB dans l'énoncé des propriétés précédentes.

Le théorème précédent montre qu'il en est bien ainsi et, dès lors, le conférencier a pu dire à ce public évidemment averti que le problème de la définition des coniques par les droites focales était pratiquement résolu. Il en a très rapidement donné quelques exemples ; soient (D) une droite focale perpendiculaire en F au plan d'une conique (O), (Δ) la polaire de F par rapport à (O), M un point de la conique, on a $MF = e MH$. Soit (D) une droite focale passant par le centre O d'une ellipse (E) ; la distance de M à (D) est constante ; l'équation de l'ellipse, l'existence de cylindres de révolution passant par une ellipse donnée se déduisent de cette proposition.

Il n'est donc pas absurde de penser que l'étude traditionnelle des coniques dans le plan pourrait être supprimée du programme de la classe de Mathématiques Élémentaires, où elle serait remplacée par celle des cônes à base circulaire. En Mathématiques Supérieures ou en première année de propédeutique on étudierait la perspective d'un plan sur un plan comme transformation ponctuelle, les propriétés perspectives des coniques, les droites focales, puis les propriétés métriques et angulaires. Le plan des études ainsi modifié est celui que M. LEBESGUE a pressenti et recommandé comme étant le plus satisfaisant du point de vue logique.