

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Publication trimestrielle

Administration : 7, rue Pasteur, Saint-Cloud (S.-et-O.)

SOMMAIRE

PREMIÈRE PARTIE

I. Documents officiels : <i>Agrégation de Mathématiques 1951</i> , Rapport de M. l'Inspecteur général ROBERT, Président du Jury	129
<i>Concours général pour les Classes de Première 1951</i> , Rapport de M. l'Inspecteur général DESRORGE	148
II. Réunion du Comité : 14 juin 1951	164
III. Conseil Supérieur de l'Éducation Nationale. Extrait du procès-verbal de la séance du juillet 1951	165
IV. Activités des Régionales	168
Assemblée générale 1952 : Voir feuillet spécial	

DEUXIÈME PARTIE

R. DONTOT : <i>Sur l'introduction des droites focales en géométrie élémentaire</i>	170
J. DOLLON : <i>La question de cours au Baccalauréat</i>	176
R. ESTÈVE : <i>Sur les Réciproques. Réponse à l'enquête de M. POCHARD</i>	178
A. MAUGUIN : <i>À propos de la « Mise en équations »</i>	181
A. MAUGUIN : <i>Étude d'une démonstration d'équivalences entre propriétés géométriques</i>	184
R. ESTÈVE : <i>Angles orientés. Sur un article de M. DELPLA</i>	187
J. DAUTREVAUX : <i>Pour un véritable enseignement de la Cosmographie</i>	189
A. HUISMAN : <i>Bibliographie</i>	194
Livres reçus	197
Avis divers	198

Cotisations : 400 fr.

Abonnements : 600 fr.

3 bis, Avenue R.-Poincaré, Margny-les-Complègne (Oise)

Expédition des Bulletins : 29, rue d'Ulm, Paris 5^e

Abonnement d'un an au *Bulletin* (prix net) : France 600 fr.
 Prix d'un numéro du *Bulletin* ou d'un *Supplément* (prix net) : France. 80 fr.

Les membres de l'Association (cotisation : 400 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Énoncés*.

Régler par chèque postal en utilisant l'adresse suivante :

Paris, Cc. 5708-21

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
 29, rue d'Ulm, Paris (5^e)

Couverture page II

Présidents d'Honneur

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

Président : M. POCHARD, 7, rue Pasteur, Saint-Cloud (S.-et-O.).
Vice-Présidents : Mlle PROTIN, 8, square du Champ-de-Mars, Paris (15^e).
M. BIGUENET, 41, rue Mad.-Michelis, Neuilly (Seine).
M. CAGNAC, 53, rue de Babylone, Paris (7^e).
M. EDDE, 51, rue des Rosiers, Saint-Ouen (Seine).
M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris (5^e).
Secrétaires : M. BENOIST, Collège Diderot, 60, bd de La Villette, Paris (19^e).
M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16^e).
M. HUISMAN, 11, rue Jacques-Cœur, Paris (4^e).
M. ROSTOLLAND, professeur au Lycée Marcel-Roby, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).
Trésorier : M. LEGRAND, 3 bis, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).

Comité :

Membres élus

En 1948 : M. BERTRAND (Marseille, Thiers) ; M. EDDE (E.N. Auteuil) ; M. FAVRELLE (Lille, Faidherbe) ; M. POCHARD (Condorcet) ; Mlle PROTIN (Jules-Ferry).

En 1949 : Mlle AFFRE (Fénelon) ; M. BIGUENET (E.N.P. St-Ouen) ; M. CHAZAL (Saint-Louis) ; M. GIRARD (Arago) ; M. GUITTON (Saint-Louis).

En 1950 : Mlle BARBIER (Victor-Duruy) ; M. BENOIST (Diderot) ; M. GIRAULT (J.-B. Say) ; M. JACQUEMART (Pasteur) ; M. MINOIS (Lakanal) ; M. RUFF (Voltaire).

En 1951 : M. CAGNAC (Louis-le-Grand) ; M. DURRANDE (St-Louis) ; M. HUISMAN (Montaigne) ; M. LEGRAND (Compiègne) ; M. MARVILLET (Strasbourg, Kléber) ; M. MONJALLON (St-Louis) ; M. SINGIER (St-Louis) ; M. ROSTOLLAND (Marcel-Roby).

Membres de droit

Mme NICoud (Lyon, Marie-Vidalenc) ; M. CANONGE (Castres) ; M. DUVAL (Dorian) ; M. POUX (Saint-Cloud).

Rapporteurs

Classes Nouvelles : Mlle MASSON ; **Enseignement moderne court :** MM. EDDE et GIRAULT ; **Enseignement technique :** M. BIGUENET ; **Ecoles Normales :** M. EDDE ; **Premier Cycle :** M. CARALP ; **Seconde et Première :** M. ROSTOLLAND ; **Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :** M. FAVRELLE, M. MINOIS, Mlle PROTIN (S.Ex.) ; **Mathématiques Supérieures :** M. DURRANDE ; **Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :** M. DURRANDE ; **Définitions de mots et notations mathématiques :** Axiomatique et Redécouverte : M. CROZES ; **Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :** Brevet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — **Concours général :** M. SINGIER ; **Histoire des Mathématiques :** M. ITARD ; **Mathématiques et Psychologie scolaire :** M. MONAVON ; **Cinéma d'Enseignement :** M. EUVRARD ; **Matériel d'Enseignement :** MM. MONJALLON ; **Enseignement de l'Astronomie :** M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (Marseille, Thiers) ; **Besançon :** M. BOUCHAT (Besançon) ; **Dijon :** M. EUVRARD (Dijon) ; **Lille :** M. FAVRELLE (Lille, Faidherbe) ; **Lyon :** M. THOVERT (Lyon, Ampère) ; **Montpellier :** M. DUSSOL (Montpellier) ; **Nancy :** M. MOUGENOT (Nancy, Henri-Poincaré) ; **Rennes :** M. RENAUULT (Rennes) ; **Strasbourg :** M. EHRLHART (Strasbourg, Kléber) ; **Maroc :** M. QUEYSANNE (Casablanca, Lyautey) ; **Tunis :** M. SAUVAN (Tunis, Carnot).

N.-B. — Adresser, soit au Président, soit à M. HUISMAN, 11, rue Jacques-Cœur, Paris, 4^e, toute communication destinée à la Deuxième Partie du Bulletin.

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD
GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU
Professeurs au Lycée de Grenoble

Programmes du 18 avril 1947

Tarif juin 1951

Arithmétique 6°	190	»
Dessin Géométrique 6° et 5°	80	»
Géométrie 5° et 4°	280	»
Arithmétique 5°	200	»
Arithmétique et Algèbre 4°	220	»
Arithmétique et Algèbre 3°	260	»
Géométrie 3°	240	»
Compléments d'Algèbre et de Géométrie Géométrie 3° Moderne court	160	»
Algèbre 2° A.B.C.M.	390	»
Géométrie 2° A.B.C.M.	390	»
Algèbre 1° A.B.	180	»
Algèbre et Trigonométrie 1° C.M.	390	»
Géométrie 1° A.B.C.M.	390	»
Questions de Cours de Mathématiques du Baccalauréat, 1° partie, A.B.C.M.	225	»

MASSON & C^{ie}, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6^e

COURS COMPLET
DE
MATHÉMATIQUES

SOUS LA DIRECTION DE

G. CAGNAC
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Louis-le-Grand

L. THIBERGE
Inspecteur général
de l'Éducation Nationale

Nouveauté :

" Géométrie dans l'espace "

Classes de 1^{re} C et Moderne

Un volume de 344 p., par J. DOLLON et E. GILET, avec 373 figures,
exercices et problèmes ; cartonné..... **720 fr.**

Précédemment parus :

Arithmétique, cl. de 6^e, par L. THIBERGE et E. GILET, avec la collabora-
tion de J. SIROS. Un vol. de 244 p., avec fig., exercices et problèmes ;
cartonné..... **440 fr.**

Géométrie et Arithmétique, cl. de 5^e, par L. THIBERGE et E. GILET.
Un vol. de 368 p., avec fig., exercices et problèmes ; cart. **560 fr.**

Arithmétique, Algèbre et Géométrie, cl. de 4^e, par L. THIBERGE
et E. GILET. Un vol. de 372 p., avec figures, exercices et problèmes ;
cartonné **600 fr.**

Géométrie plane, cl. de 2^e C et Mod., par J. DOLLON et E. GILET.
Un volume de 388 pages, avec figures, exercices et problèmes ;
cartonné..... **560 fr.**

Algèbre, cl. de 2^e C et Mod., par J. DOLLON et J. SIROS. Un volume
de 248 p., avec fig., exercices et problèmes ; cartonné.... **460 fr.**

Bulletin de l'Association
des
Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement public

PREMIÈRE PARTIE

I. Documents officiels

Agrégation de Mathématiques (Hommes)

Rapport de M. l'Inspecteur général ROBERT, Président du Jury
(SESSION 1951)

Le Jury était composé de M. ROBERT, inspecteur général de l'Instruction publique, président ; M. ROGER professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, vice-président ; M. KUNTZMANN, professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble ; M. CAGNAC, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand ; M. DOLLON, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Louis-le-Grand.

ÉPREUVES ÉCRITES (1)

Elles ont eu lieu les 4, 5, 7 et 9 juin.

Sur deux cent quatre candidats inscrits, cent quatre-vingts ont composé le premier jour, cent soixante-dix-huit le deuxième, cent soixante-dix-sept le troisième et cent soixante-sept le quatrième jour.

Le jury, réuni le 5 juillet, a déclaré admissibles les candidats ayant obtenu un total au moins égal à 24 (sur 80) pour l'ensemble des épreuves. Quarante-deux se sont trouvés satisfaire à cette condition. Si l'on note que l'écrit du concours de 1950 avait fourni cinquante-trois admissibles, avec des totaux atteignant au moins 29, une baisse de notes s'accuse en 1951. Elle n'a été que partiellement imputable à la difficulté des compositions, où le volume des questions proposées, pour les deux premières épreuves, s'est légèrement accru ; la composition de Mécanique, par contre, avait en 1951 un texte plus court qu'en 1950.

Il faut en conclure sans doute que les admissions des concours précédents

(1) Les énoncés ont été publiés dans le n^o 142 (juillet 1951) aux pages 293 à 302.

ont écrémé le lot des candidats les plus méritants. L'abaissement des notes est corroboré par l'augmentation du nombre des faibles copies : en 1951, quarante-huit totaux (au lieu de vingt-huit en 1950) correspondent à la moyenne de 5 sur 20. Parmi les meilleures épreuves il ne s'en est trouvé que quatre dépassant la moyenne (10 sur 20), contre onze en 1950.

Ce brusque changement de la physionomie de l'écrit du concours, correspondant à un rajeunissement de l'ensemble des bons concurrents, est manifeste si l'on considère la provenance des candidats admissibles.

Ils comptent six professeurs des lycées, cinq professeurs des collèges, deux professeurs de l'enseignement technique, un professeur d'école normale, un professeur d'une école militaire préparatoire technique, un délégué, un maître auxiliaire, trois stagiaires d'enseignement ; au total, vingt concurrents ayant participé à l'enseignement en 1950-1951 (contre vingt-six en 1950).

Du côté des étudiants dégagés de la charge enseignante, par contre, on dénombre onze admissibles provenant de l'Ecole Normale de la rue d'Ulm, deux auditeurs, trois élèves de l'Ecole Normale de Saint-Cloud, un boursier du C.N.R.S. et six étudiants libres (un seul en 1950 !).

Parmi les quarante-deux admissibles figuraient seize admissibles des sessions antérieures.

Les épreuves écrites ont donné lieu aux rapports détaillés ci-après :

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES : RAPPORT DE M. DOLION

Le problème proposé aux candidats était soumis à leur étude sous forme d'un canevas détaillé ; celui-ci était destiné à gagner du temps dans la recherche de résultats qui auraient pu rester trop longtemps cachés et ne pas permettre de faire la preuve des qualités d'exposition qu'on est en droit d'attendre des candidats à un poste d'enseignement, si l'énoncé n'avait étroitement jalonné la voie à suivre.

Cette précaution a surtout mis en relief une fréquente incapacité de découverte. Certains ont fait une paraphrase de l'énoncé ; je pense qu'ils ne caressaient pas l'illusion d'abuser le correcteur lorsque cette paraphrase ne s'accompagnait d'aucun essai de démonstration. Le fait le plus frappant de toutes les solutions ou essais de solutions est l'absence de la construction syllogistique qui reste, qu'on le veuille ou non, à la base du raisonnement mathématique. On ne voit guère un maître étayant la conviction géométrique de ses élèves par des arguments d'autorité, fondés sur une pensée dont le moins qu'on puisse y trouver est l'inconsistance et la fluidité.

Je n'ai guère goûté non plus le ton d'une copie où les propriétés à démontrer sont qualifiées de « classiques » et d'évidentes : il faut ici jouer le jeu et montrer sa capacité à donner de ces prétendues évidences des démonstrations définitives.

Il faut bien dire un mot de la présentation matérielle. Peut-être est-il de bon ton de considérer comme mineures les qualités de soin, d'écriture et d'orthographe ; pour mineures qu'elles soient, je conçois difficilement qu'un professeur puisse s'en passer. Il ne déchoit pas en faisant leur part

aux exigences matérielles ; il facilite sa propre tâche et celle de ses élèves et les prépare à des relations sociales plus agréables. Dans un trop grand nombre de copies ces vérités premières sont méconnues.

Un autre point concerne les figures. Je n'ignore pas qu'on peut se passer de figures et que la construction logique des raisonnements se suffit à elle-même, mais c'est un défi au bon sens que de se priver du recours à des figures bien faites. Je vois mal un professeur de lycée — car il s'agit bien d'un concours de recrutement de tels professeurs — se passant de figures dans l'enseignement de la géométrie, tel ce candidat qui n'en fit aucune dans sa copie. On ne sait pas assez toute l'utilité de ces figures schématiques réduites à quelques traits essentiels et de maniement plus aisé que des tracés trop chargés.

On a quelque gêne à noter que certains candidats en soient encore à faire des figures recto et à les commenter verso ; serait-ce donc que tout bon sens les ait quittés ?

Première partie. — La transformation $\mathcal{C}(O, u)$ qui associe à un point a d'un plan le point A , tel que $Ou, OA = 2(Ou, Oa) \quad OA = \frac{Oa^2}{Ou}$ a été correctement étudiée ; pourtant un candidat prétend que cette transformation, n'étant pas biunivoque, n'est pas ponctuelle... Faute d'une construction précise de A , connaissant a , on n'a pu résoudre la seconde question. L'énoncé donnait cependant une indication précieuse en demandant de placer u_1 en A . $\mathcal{C}(O, u_1)$ faisait apparaître des triangles semblables qui rendaient évidentes les relations à démontrer.

Un nombre infini de copies a donné une solution de la relation angulaire.

La question concernant la tangente à une courbe et celle de sa transformée a été souvent traitée, mais on a oublié le cas de la courbe passant par O .

La transformation d'une ellipse de centre O et de foyers f et f' en une ellipse de foyers O et F était immédiate à partir de l'évaluation de MO et de MF . A cette occasion je signale qu'un candidat constatant que deux points A et B se changeant par une transformation ponctuelle en deux points A' et B' , croit que le segment AB ait pour transformé le segment $A'B'$; erreur pour le moins regrettable.

La correspondance entre les extrémités m et n de deux demi-diamètres conjugués et les points M et N apparaissait par application de la relation angulaire établie pour les tangentes en $(I, 3^\circ)$. On a recours, fort inutilement, aux théorèmes d'Apollonius pour aboutir à des propositions inexactes : « un quadrilatère à côtés opposés égaux est un parallélogramme », par exemple.

Deuxième partie. — 1° et 2° . La recherche des ellipses de centre O , d'excentricité minimum passant par a et b était rendue immédiate par l'application de la transformation $\mathcal{C}(O, u)$. Pourquoi recourir à une hyperbole d'intervention malencontreuse ? la propriété de AB d'être perpendiculaire à la directrice relative à O apparaissait immédiatement.

Il suffit de transformer

$$(Ou, AB) = (Ou, OF),$$

$$\frac{\widehat{ba} + \widehat{ba'}}{2} = (Ou, of)$$

pour reconnaître que $\vec{ba}, \vec{ba'}$ a ses bissectrices parallèles aux axes de symétrie de e .

Un seul candidat a constaté la nécessité d'un choix pour les extrémités du diamètre conjugué de Oa . A peu près aucun n'a mis en évidence, sur de petites figures, les relations de dépendance indiquées par l'énoncé sur les ellipses $e(a, b)$... Un candidat, à la demande d'analyse des liaisons de L, M... aux points O, A, B, C, se contente de dire avec une certaine candeur que « le fait de fixer les points impose des liaisons... ».

3° et 4°. — Il suffisait ici d'une figure d'ensemble pour que les propriétés données intégralement par l'énoncé apparaissent en pleine lumière. Je n'ai trouvé que rarement tentée une réalisation acceptable de cette figure et encore dans des conditions telles qu'elle ne pouvait être d'aucune utilité.

5°, 6° et 7°. — On ne trouve plus désormais que quelques notes éparses et décousues sur tout ce qui va suivre. La disposition des ellipses $E(\dots)$ de foyer commun O était une conséquence immédiate de la définition bifocale de ces ellipses et du régionnement du plan à partir de cette définition.

Troisième et quatrième parties. — Les très rares candidats qui ont abordé ces questions se sont bornés à une vérification rapide des formules indiquées en (III, 1°). Un seul a risqué quelques mots sur la partie IV. Pratiquement, on peut dire que cette fin de problème n'a pas joué pour le classement.

Résultats. — La meilleure note est un 18,5 ; je relève également deux 15,5 ; mais que de notes insuffisantes dans une épreuve qui fut largement cotée, compte tenu de sa longueur ! Un nombre important de notes sont inférieures ou égales à 3. Il faut dire que de telles notes témoignent d'une insuffisance inquiétante.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES : RAPPORT DE M. CAGNAC

La première partie du problème était à la portée d'un élève qui achève son séjour en Mathématiques Supérieures ; et pourtant quarante-cinq copies dont les notes sont au plus égales à 2 témoignent que leurs auteurs auraient bien besoin de suivre les cours d'une telle classe.

En particulier, dans le deuxième paragraphe, il fallait caractériser analytiquement, dans un plan rapporté à deux axes *quelconques* Ox, Oy , une direction fixe L . Ce simple détail a permis de dresser la statistique suivante :

Dix-huit copies ont introduit les « cosinus directeurs α et β de L , liés par la relation $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ » ; trois autres copies ont appelé $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ ces « cosinus directeurs ». Dans quatorze copies, le carré de la longueur du vecteur, dont X et Y sont les composantes scalaires, est $X^2 + Y^2$ (en par-

ticulier si m est le coefficient angulaire de L , on voit apparaître $\sqrt{1+m^2}$ dans les formules qui donnent les projections d'un segment de longueur connue ayant la direction L).

Parmi les candidats qui introduisent les composantes scalaires α, β , d'un vecteur unitaire de L , sept écrivent $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \theta = 1$

la relation qui lie ces deux nombres ($\widehat{rOy} = \theta$) ; huit parlent d'une relation, mais, prudemment, se gardent de l'écrire ; onze n'en parlent même pas, un autre écrit qu'on peut choisir $\beta=1$; deux autres posent $\frac{\beta}{\alpha} = \tan(Or, OL)$.

En résumé, plus du tiers des candidats ignorent la question de la détermination analytique d'une direction, dans le plan rapporté à deux axes obliques.

L'extrait suivant d'une copie illustre ce fait : « Remarque importante : ces calculs ont été faits en supposant Ox et Oy rectangulaires. Ox et Oy ne l'étant pas, il suffit de remplacer respectivement $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ par les paramètres de direction q et p , vérifiant $p^2 + q^2 = 1$. On peut d'ailleurs poser $q = \cos \alpha$, $p = \sin \alpha$, les équations écrites sont valables, mais α n'est plus l'angle (Ox, MP'). »

La seconde partie pouvait se résoudre rapidement de la façon suivante : si $M(x, y)$ est un point du lieu cherché Σ , posons $\overline{MP} = \varphi$ et $\overline{MP'} = \varphi'$. Les coordonnées de P sont $(x + \varphi, y)$, celles de P' sont $(x, y + \varphi')$. Pour que M appartienne à Σ , il faut et il suffit qu'il existe deux nombres φ et φ' , non nuls tous deux, tels que l'on ait simultanément les relations

$$(1) \quad F(x + \varphi, y) = 0 \quad (2) \quad F(x, y + \varphi') = 0 \quad (3) \quad \varphi' = \lambda \varphi$$

$$\text{Or,} \quad \begin{aligned} F(x + \varphi, y) &= F(x, y) + \varphi f'_x(x, y) + A\varphi^2, \\ F(x, y + \varphi') &= F(x, y) + \varphi' f'_y(x, y) + C\varphi'^2. \end{aligned}$$

En définitive, il faut et il suffit qu'il existe un nombre φ non nul tel que, simultanément,

$$\begin{cases} F + \varphi f'_x + A\varphi^2 = 0, \\ F + \lambda \varphi f'_y + C\lambda^2 \varphi^2 = 0. \end{cases}$$

L'annulation du résultant de ces deux équations du second degré en φ donne, après avoir écarté la solution $F=0$ qui correspond à $\varphi=0$,

$$(C\lambda^2 - A)^2 F + \lambda^2 (Cf'_x{}^2 + Af'_y{}^2) - \lambda (C\lambda^2 + A) f'_x f'_y = 0.$$

$$\text{Or,} \quad \begin{aligned} f'_x{}^2 &= 4A\tau - 4\delta y^2, \\ f'_y{}^2 &= 4C\tau - 4\delta x^2, \\ f'_x f'_y &= 4B\tau + 4\delta xy, \end{aligned}$$

d'où l'équation de Σ sous la forme

$$(4) \quad (C\lambda^2 - 2B\lambda + A)^2 \tau - 4\lambda\delta (C\lambda^2 - 2B\lambda + A)xy - (C\lambda^2 - A)^2 k^2 = 0.$$

Quels que soient les procédés utilisés, la plupart des candidats ont été amenés à exprimer que deux équations du second degré ont une racine commune.

Quarante candidats résolvent ce problème de la manière suivante : ils résolvent la première équation du second degré par application de la formule bien connue ; ils résolvent de même la seconde équation ; ils égalent les deux valeurs obtenues ; comme la relation ainsi écrite présente deux

radicaux, ils isolent l'un d'eux, ils élèvent au carré ; comme un radical subsiste encore, ils l'isolent et font une seconde élévation au carré.

Quelques candidats, après l'emploi d'une telle méthode, sont arrivés néanmoins à un résultat correct ; on doit regretter que leurs études antérieures ne les aient pas mieux préparés à profiter de leurs qualités de calculateur.

Trente-six candidats ont retrouvé, par une combinaison linéaire, la valeur nécessaire de la racine commune, mais l'ont portée, au hasard, dans l'une ou l'autre de leurs deux équations, sans se soucier de la dissymétrie des résultats obtenus.

Trente candidats seulement ont appliqué la formule classique du résultant.

Evidemment, une minorité de candidats restaient disponibles, après l'effort qu'avait exigé d'eux la recherche de l'équation de Σ , pour une étude avisée du reste du problème.

Trois seulement ont vu que l'équation cartésienne de Σ était du second degré par rapport au paramètre $C\lambda + \frac{A}{\lambda}$ (ou par rapport au paramètre $\sigma = C\lambda + \frac{A}{\lambda} - 2B$, analogue aux paramètres σ , σ' , σ'' indiqués dans la partie IV du problème), et qu'ainsi deux coniques Σ passaient par un point du plan.

D'ailleurs, entre les racines ρ_1 et ρ_2 de l'équation (1) existe la relation $\rho_1 \rho_2 = \frac{F}{A}$; entre les racines ρ'_1 et ρ'_2 de l'équation (2) existe la relation $\rho'_1 \rho'_2 = \frac{F}{C}$; et, par suite, M étant un point quelconque du plan

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho'_1 \rho'_2} = \frac{C}{A}.$$

Si $\rho'_1 = \lambda \rho_1$, sur Σ nécessairement, sur la même conique Σ , $\rho'_2 = \frac{A}{C\lambda} \rho_2$, et chaque conique Σ était associée à deux valeurs distinctes λ et $\frac{A}{C\lambda}$.

Le résultat précédent aurait dû être aperçu par les candidats qui ont montré correctement que les coniques Σ formaient un faisceau linéaire tangentiel, mais, hélas, l'équation cartésienne de Σ était du quatrième degré en λ .

Quelques copies ont présenté, à propos de la partie II, de bonnes remarques géométriques.

III^e et IV^e parties. — Les candidats n'ayant pas, dans leur grosse majorité, su développer aisément l'équation de la conique Σ , ont été arrêtés, *à fortiori*, par celle de la quadrique Σ_1 .

Ceux qui ont étudié géométriquement la partie II ont généralisé certains de leurs résultats pour la partie III.

Trois candidats seulement ont obtenu l'équation du plan $\mathcal{Q}$ de la conique $\mathcal{Q}$; personne n'a pu étudier cette conique.

Les meilleures copies sont notées 13,5 (deux fois), 13, 12,5 (deux fois) et 12 (deux fois). La moyenne générale de l'épreuve est 4,4.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL ; RAPPORT DE M. KUNTZMANN

La composition était destinée à vérifier les connaissances des candidats sur la question tout à fait classique des intégrales convergentes. En fait, elle a surtout mis en évidence une conception enfantine de la notion de fonction.

Première partie. — On rencontre des affirmations telles que les suivantes :

- une fonction bornée pour $1 \leq x \leq a$ est bornée pour $1 \leq x$,
- une fonction n'ayant qu'un nombre fini de discontinuités est à variation bornée donc intégrable au sens de Riemann.

Mais, surtout, deux candidats sur trois s'imaginent qu'à toute fonction $f(x)$, on peut associer un nombre α_0 tel que $x^\alpha f(x)$ tende vers une limite finie non nulle lorsque x tend vers $+\infty$.

Si l'énoncé, au lieu de laisser les candidats chercher eux-mêmes une méthode, leur avait suggéré d'utiliser la seconde formule de la moyenne, ou encore une intégration par parties, les résultats auraient été certainement meilleurs ; mais il semble que l'on peut demander à des candidats à l'agrégation autre chose que l'application d'une formule donnée.

La question (I, 2°) était délicate. Elle a tenté peu de candidats. Ceux qui l'ont abordée se sont contentés en général d'incorporer $x^{1(2)}$ à $f(x)$ sans remarquer qu'en changeant la fonction, ils changent sans doute α_0 . Deux ou trois ont donné une solution correcte, soit en repensant la formule de la moyenne, soit, plus simplement, en intégrant par parties.

La question (I, 3°) a été abordée par presque tous. Malheureusement, il n'est pas correct de prendre r comme nouvelle variable et d'utiliser (I, 1°) ; car en certains points les dérivées $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}$ peuvent être infinies.

Le contre-exemple de (I, 3°) était difficile. Il était d'ailleurs inutile de donner une expression explicite de $g(x)$. Il suffisait de montrer qu'avec des morceaux de droites convenablement choisis, on pouvait satisfaire à toutes les conditions. Quelques candidats l'ont vu clairement.

Deuxième et troisième parties. — La question (II, 1°) a encore été abordée par un grand nombre de candidats. Mais on a cherché trop souvent à se ramener à (I, 3°), alors que les conditions

$$r(s) \text{ croissant et } r \geq ks$$

sont visiblement tout à fait différentes.

La fin du problème a été peu abordée.

Pas de très bonne copie ; la meilleure note est 14 (trois fois donnée). Vingt-cinq copies ont une note entre 14 et 8. Elles émanent de candidats ayant traité correctement (I, 1°), (I, 3°) et (I, 4°). Vingt et un d'entre eux se retrouvent parmi les admissibles.

Vingt-quatre copies ont entre 8 et 4 inclus ; cinquante ont entre 4 et 2 inclus ; enfin soixante-treize ont moins parmi celles-ci, quarante-trois ont zéro.

La moyenne générale est 3,2.

MÉCANIQUE : RAPPORT DE M. ROGER

Le problème de mécanique avait été construit de manière que les équations de Lagrange fussent pratiquement inutilisables dans la première partie et d'un emploi délicat dans la seconde. Tandis que les théorèmes généraux, dont certains étaient suggérés en fin de l'énoncé, pouvaient être appliqués dans un cadre assez vaste pour englober les deux parties.

Il suffisait, par exemple, de prendre, pour le solide formé par le disque (D) et la tige (T), le théorème du mouvement du centre de gravité G et celui de la variation du moment cinétique dans le mouvement autour de G, en ne particularisant que dans l'étude de chaque partie les réactions sur M et K du plateau (II) et de l'axe (Δ). A ce sujet, une grosse faute, beaucoup trop couramment répandue, fut de prendre la réaction en K normale à (T) et (Δ) dans (I) alors que ce n'était vrai que dans (II). Avec des réactions correctes, et compte tenu de la constance de φ [fixité de K dans (I), glissement radial nul en M dans (II)], on obtenait en particulier l'intégrale première.

$[(\varphi - 2a \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta] \psi' - a (\varphi - 2a \cos \theta) (\psi' \cos \theta + \dot{\varphi}) = C$
valable dans les deux cas.

Dans la partie (I), qu'il était aussi possible de traiter séparément en appliquant le théorème du moment cinétique par rapport au point fixe K, on pouvait, avant même de savoir si le glissement s'arrêtait, montrer que, s'il s'arrête, il ne peut pas reprendre : car la condition $uX < 0$, où u désigne la vitesse de glissement comptée algébriquement sur le même axe que X, peut s'écrire $uu' < 0$, et montre que, au cours d'une phase de glissement, u^2 ne peut qu'aller en décroissant.

L'équation donnant la vitesse v s'intégrait directement, ou par un arcus ou un arctg suivant que h était nul, négatif ou positif ; d'où l'arrêt du glissement au bout d'un temps fini, sauf dans le cas (c) avec

$$\frac{h\omega^2}{g} \geq \frac{(2a^2 + 3l^2)^2 \sin^2 \theta}{(a^2 + l^2) \varphi^2}.$$

Dans les trois cas, la composante Z reste positive en même temps que v' .

Par application du théorème des forces vives au plateau (II), le travail qu'il faut lui fournir pour maintenir constante la rotation ω pendant la première (et unique comme il a été vu) phase de glissement est l'opposé du

travail de l'action de (D) sur (II) en M, soit $-\int_{t_0}^{t_1} m(-X)\omega \varphi dt$.

Ce travail à fournir sert à deux fins : accroître l'énergie cinétique de (D), vaincre le frottement ; les candidats qui ont donné comme expression celle

du travail de la réaction de (II) sur (D) : $\int_{t_0}^{t_1} mXv dt$ n'ont pris que la première de ces deux contributions, négligeant alors l'énergie

$-\int_{t_0}^{t_1} mXu dt$ (positive puisque $Xu < 0$) dissipée en chaleur.

Dans la partie II, l'intégrale des forces vives était utilisable à condition

de remarquer que le travail élémentaire, par rapport au système fixe, de la réaction de (II) sur (D) en X : $mX\omega\varphi dt$ où $X = a(\psi' \cos \theta + \varphi')$ était la différentielle totale exacte de $m\omega pa(\psi' \cos \theta + \varphi')$. On pouvait aussi appliquer l'intégrale des forces vives dans le mouvement relatif au plateau (II), par rapport auquel le travail de la réaction en M est nul, à condition toutefois de tenir compte de la fonction des forces centrifuges simples $\frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2$, où $I_{\Delta} = m(\varphi - 2a \cos \theta)^2 + ma^2(1 + \cos^2 \theta)$.

On pouvait enfin écrire l'intégrale de Painlevé dans le cadre d'une méthode particulièrement rapide pour traiter séparément (II), celle des équations de Lagrange. Car le système est holonome si l'on remarque que les conditions de roulement sans glissement sont ici intégrables :

$$\varphi = C^{\text{te}} \quad \varphi(\psi - \omega t) + 2a\varphi = C^{\text{te}}.$$

Un tel énoncé a permis de classer très aisément les copies d'après le degré d'achèvement de l'une et de l'autre parties. La meilleure note 17 a récompensé un travail où ne manquait que l'étude des mouvements stationnaires de (II) ; la condition à laquelle doivent satisfaire les données initiales pour qu'on ait un tel mouvement a même été établie dans la seconde copie, notée 15 parce que l'étude du (I) n'y était pas assez poussée. Un 14 a été attribué à un travail particulièrement honnête quant à l'obtention des résultats de calcul, mais où ne figurait aucune interprétation de ceux-ci dans le domaine des faits observables. On rencontre ensuite un 13,5 et un 13 ; puis deux 11,5, deux 11, un 10,5, quatre 10 ; ce qui ne fait quand même que 14 notes au-dessus de la moyenne. Viennent après onze notes jusqu'à 8, vingt jusqu'à 6, vingt-huit jusqu'à 4, trente-six jusqu'à 2 et cinquante-huit au-dessous.

ÉPREUVES ORALES

Elles ont eu lieu au lycée Saint-Louis pour les quarante-deux candidats admissibles. Un seul candidat était également admissible au Certificat d'Aptitude au Professorat des Collèges et a été heureusement inspiré en n'abandonnant pas les épreuves orales de ce dernier concours.

Leçons de mathématiques élémentaires. — 1. Longueurs d'un arc de cercle ; radian, approximations de $\sin x$, $\text{tg } x$, $\cos x$, x étant la mesure en radians d'un petit angle.

L'auteur a tenu un certain compte de remarques, faites à ce sujet en 1950 ; mais il est surprenant qu'il n'ait pas compris que la définition du nombre π était partie intégrante de la leçon ; la dernière partie de son exposé a été faible en ce qui concernait les erreurs commises (confusion des erreurs absolues et des erreurs relatives pour conclure une étude qui s'annonçait correcte).

2. Dans une leçon élémentaire sur les droites parallèles (programme de seconde), le jury a été confondu d'entendre parler d'« angles de droites définies à $k\pi$ près ». Telle est la difficulté, dont ce n'est pas le seul exemple, de nos étudiants à se plier à des exposés d'initiation.

3. Une leçon sur $\frac{1}{x}$ et $\frac{a}{x}$, au niveau de la seconde, a été improvisée, et le souci d'« évasion » de son auteur n'a été que trop apparent. Il a cru devoir donner des définitions générales des limites infinies et des limites finies quand la variable augmente indéfiniment, mais celles-ci n'ont pas été exposées avec soin. Les phrases doivent commencer par les données A (ou ε) et indiquer les conditions précises où l'on se place. Eviter des « pathos de ce genre » : « $y = \frac{a}{x}$ d'où $x = \frac{a}{y}$ soit $y(x) = x(y)$ » !

« L'analogie de ces écritures explique le nom de fonction homographique. » Cette leçon a été assez peu appréciée, à cause de sa désinvolture n'excluant pas de fréquentes maladresses et incorrections.

4. Etude du système
$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

On y a multiplié inutilement des hypothèses sur la non-nullité de a, b, a', b' , d'où une impression de « bricolage », l'auteur ne prenant guère au sérieux ces diverses hypothèses ; l'analogie des équations entre elles, des inconnues entre elles, doit être soulignée de manière à pouvoir déduire d'une première étude, supposant par exemple $a \neq 0$, des conclusions relatives à tous les cas.

5. Fonction $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$ (programme de première). Il est contre-indiqué de manier d'emblée des données littérales, à grand renfort de $\Delta = ab' - ba'$; cela ne fournit pas une méthode bien assimilable pour les élèves, qui n'ont que trop tendance à invoquer des formules littérales générales, bien inutiles ici pour les exemples.

6. Dans la leçon sur les problèmes du second degré en première, un exercice a donné lieu à une faute de calcul ; ce qui est grave, c'est de ne pas la retrouver par des contrôles. De même, si la recherche d'un triangle rectangle où l'hypoténuse a et la somme des côtés l sont données conduisait à la seule condition de possibilité $l \leq a\sqrt{2}$, un coup d'œil décelait l'erreur ; car il était à prévoir que l ne peut être voisin de zéro pour que le triangle existe. Ainsi, il ne suffit pas de connaître des problèmes-types (problème du puits, problème de Pappus, moyenne et extrême raison) ; il faut encore témoigner de bon sens. D'une façon générale, les leçons de géométrie de la classe de première ont été honorablement exposées. Cependant la :

7. Leçon sur les angles dièdres et les plans perpendiculaires a été faible dans ces deux parties : l'auteur affirme que deux angles dièdres égaux peuvent coïncider de quatre façons, ne définit pas ce qu'on entend par dièdre supérieur à un autre, et malgré cela, veut traiter le cas où le rapport de deux dièdres est irrationnel. Le sujet des plans perpendiculaires permettait de donner des démonstrations par transformation de l'hypothèse ; c'est annuler la portée du travail que d'y partir de ce qu'il faut démontrer. Les figures étaient tracées sans soin et par suite obscures.

8. La leçon sur les arcs généralisés en trigonométrie est-elle si difficile ?

On le croirait. Il est bien simple pourtant de ne pas confondre points, arcs et mesures. Que dire de ces affirmations :

« la mesure algébrique de tous les arcs $\widehat{AM}$ est $x = \alpha + 2k\pi$ » ;

« on divise α par 2π et on prend le reste ».

Nous nous élevons contre l'habitude d'appeler « arcs symétriques » deux arcs dont les extrémités sont symétriques par rapport au diamètre passant par l'origine des arcs : alors qu'un nombre algébrique n'a qu'un « symétrique », ce ne serait plus vrai quand il s'agit d'arcs : les arcs de mesures 0 et 2π seraient symétriques, etc... ; ce n'est plus là du bon français.

9. Leçon sur l'équivalence des définitions classiques des coniques.

Nous admettons tous les procédés, qui sont nombreux, pour traiter ce sujet. Cependant, il y a lieu d'en expliquer l'ossature, ce que n'a pas fait le candidat, maniant sans explications le théorème sur la différence des puissances d'un point M par rapport au cercle directeur ($F', 2a$) et au cercle point (F, O) et appliquant encore la même proposition à deux autres

cercles ensuite : Qu'on arrive à un résultat simple $\frac{MF'}{MH} = C^2$, par cette

voie, voilà qui semblerait à des élèves bien miraculeux. Le candidat a été lui-même fort embarrassé à propos d'une généralisation de cette méthode : le dogmatisme se paye quand on ne peut en dissiper l'arbitraire ; il aboutit vite à partir de ce qu'on voudrait démontrer, c'est ce qui est le contraire d'une exposition bien faite.

10. Représentation de prismes et de pyramides en classe de Mathématiques.

Le candidat, visiblement découragé, a accru la mauvaise impression produite en s'inspirant d'une composition antérieure de la leçon, trop ambitieuse pour les élèves et aussi pour ses moyens... qu'il a réduits en tenant la gageure de ne mettre aucune lettre dans ses épures. Que voilà du temps mal gagné ! Après avoir expliqué tant bien que mal que le contour apparent d'un polyèdre convexe est un polygone convexe, il n'a pas fait application de cette règle à la représentation d'un cube. Ce n'est pas son essai d'étude géométrique des projections d'un dodécaèdre (que le manque de temps vouait à un insuccès fatal) qui a pu remédier à l'impression fâcheuse produite par des oublis grossiers d'arêtes dans la représentation du cube. Il faut attribuer ces défauts à l'infériorité que l'on ressent à bâtir une leçon à laquelle on n'a pas réfléchi en cours d'année.

11. Une solide leçon sur deux exemples numériques de fonctions

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

a été bien notée, grâce au soin et à l'intelligence dont elle a fait preuve.

12. On a entendu avec plaisir une leçon sur la résolution d'un triangle dans un cas non classique et apprécié la mise en équations bien raisonnée de l'exemple intéressant choisi, sa discussion et les recoupements avec l'étude de la construction géométrique du triangle.

13. La leçon sur les transformations de formules en trigonométrie était

destinée en premier chef à des applications et non à une démonstration directe de $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$, qui, d'ailleurs, n'a pas été conduite avec toute la rigueur désirable : $\frac{p+q}{2}$ n'est pas forcément

l'angle polaire de la bissectrice *intérieure* des demi-droites d'angles polaires p et q . La considération de cette demi-bissectrice est tout à fait superflue et complique la démonstration.

14. On peut être embarrassé par un choix d'exemples simples dans une leçon sur les équations trigonométriques à une inconnue.

Il est naïf de qualifier d'exemple « amusant » la résolution de

$$\cos^6 x + \sin^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1.$$

La discussion de l'équation : $\cos 2x + 4m \sin x - 2m - 3 = 0$, où $f(u) = u^2 - 2mu + m + 1 = 0$ — $-1 \leq u \leq +1$ a donné lieu à la construction d'un tableau renfermant $m, \Delta, S?, P?, f(-1), f(+1)$.

Décidément, les vertus des tableaux conduisent aux pires excès.

15. Exemples de détermination de coniques par certains de leurs éléments (en Mathématiques).

L'auteur de la leçon l'a compliquée par des stipulations dans certains des énoncés, indiquant qu'on désire avoir une ellipse, ou une hyperbole, voire une parabole. Il faut tendre à ouvrir des horizons et non à les rétrécir.

La construction graphique, et la synthèse qui doit en résulter, d'une parabole dont on donne deux tangentes et leurs points de contact, semble, depuis plusieurs années, excéder les capacités des concurrents. Nous faisons appel à leur réflexion et à leur perspicacité sur ce point.

16. Du programme de la classe de Sciences Expérimentales est sortie une leçon sur les combinaisons et probabilités simples.

Elle eût pu mériter une bonne note sans l'exemple du cube formé lui-même de n^3 petits cubes peints en noir, sauf sur les faces apparaissant à l'extérieur du grand cube : un aveugle se propose de reconstituer l'état primitif après bouleversement. Cet exemple donne lieu à une probabilité très faible : celle qu'il aurait eue d'être compris par les élèves le serait encore davantage.

Notes : Le jury a donné pour ces leçons trois 17, quatre 16, six 15, trois 14, sept 13, quatre 12, quatre 11, un 10, soit trente-deux notes au moins égales à la moyenne ; puis trois 9, deux 8, quatre 7, un 4. La moyenne des notes est 12,25, sensiblement égale à celle de l'an dernier (12,17).

LEÇONS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

1. Une excellente leçon sur les formes linéaires a valu à son auteur une note voisine du maximum.

2. Leçon sur les séries à termes positifs : pour la dégager du dogmatisme, il convient de montrer, au moins sur des exemples, que la comparaison directe de la série (u_n) à une série de nature connue (v_n) [comparaison par inégalité] peut donner lieu à des difficultés ; que l'emploi de la

limite de $\frac{u_n}{v_n}$ est déjà plus commode ; enfin, que la série (v_n) doit être bien choisie, (u_n) étant donnée.

3. Leçon sur les séries à termes réels de signe quelconque : la manie d'associer des noms propres à des théorèmes continuant à sévir, on a attribué à Abel le théorème classique sur les séries alternées avec décroissance des valeurs absolues des termes ; il semble qu'Abel ait obtenu un résultat plus général comprenant ce théorème comme cas particulier.

Ira-t-on jusqu'à appeler formule de Cramer la formule $x = \frac{b}{a}$ pour résoudre l'équation $ax = b$?

4. Fonction exponentielle a^x . Ne pas reprendre d'une manière détaillée l'étude de cette fonction dans le cas où l'argument x est rationnel, c'est bien mal connaître le sujet. Les suites de nombres rationnels sont autrement plus maniables que les ensembles pour la définition de a^x quand x est irrationnel : il nous faut bien le dire ici, car jamais une exposition correcte à l'aide des ensembles n'a été entendue par les jurys, dans ces dernières années.

5. Leçon sur l'application de la variation des fonctions à la séparation des racines d'une équation ; à l'intention des futurs candidats, disons aussi que cette leçon ne vise que des exemples. En effet, l'étude des variations d'une fonction au moyen de sa dérivée, et les propositions sur les valeurs prises par une fonction monotone dans un intervalle sont toutes choses acquises préalablement à cette leçon. Ces acquisitions constituent la seule théorie à connaître, qu'il n'y a aucunement lieu de compléter.

La « suite de Rolle » est inutile à l'enseignement et même nuisible, comme échantillon de procédé sacrifiant l'intuition visuelle à un rite (gonflé de pseudo-rigueur), qui équivaut en fait à la considération d'une courbe représentative.

6. Différentielles totales : donner des formules telles que

$$d(uv) = u dv + v du, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2},$$

sans aucune explication, est une omission regrettable, car ces formules, quand u, v , sont fonctions de variables, en nombre quelconque, sont des conséquences de la propriété fondamentale des différentielles totales, autour de laquelle gravite la leçon.

Les explications à donner ont été aussi insuffisantes relativement à l'application à z , fonction implicite de x, y , qui satisfait à une équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

7. Intégration de $f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$. A propos des changements de variable ramenant cette différentielle à une expression rationnelle, il n'est pas nécessaire de trop insister sur le fait que $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ est supposé positif ; dans la majorité des cas où l'élève fera appel à cette théorie, et en particulier en dynamique, le radical y est algébrique et non arithmétique.

8. Leçon sur la longueur d'un arc d'une ligne plane ou gauche. Il faut y

prendre garde de ne pas citer comme application de la théorie une « démonstration rigoureuse » pour la longueur d'un arc de cercle

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \quad t_0 < t < t_1.$$

Il y a là pétition de principe, puisque les formules de dérivation de $\cos t$ et $\sin t$ résultent de $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, question liée à la définition du radian, donc à la théorie (élémentaire) de la longueur d'un arc de cercle.

9. Exemples simples de développements en série entière déduits d'équations différentielles.

Cette leçon a péché par des détails : intégration de $y' = y$ en supposant inutilement y positif ; recherche d'une série solution formelle de l'équation $(1+x)y' - my = 0$ et étude de sa convergence ; le cas où m est entier (positif ou nul) n'ayant pas été écarté de cette recherche, les résultats trouvés étaient faux dans cette éventualité, faute d'avoir serré de près les raisonnements employés.

10. Une très bonne leçon, fort intelligemment bâtie, a été présentée sur la recherche des points doubles d'une courbe définie paramétriquement. Une seule observation à y présenter : le calcul d'une fraction rationnelle $R(t)$ pour deux valeurs t_1 et t_2 , racines d'une équation du second degré en t , sachant *a priori* que $R(t_1) = R(t_2)$, peut éviter les irrationnelles, mais la solution optimum, en pratique, ne résulte pas de la considération de

$$\frac{1}{2} [R(t_1) + R(t_2)].$$

10. Courbure, développée, d'une courbe plane. Cette leçon a été médiocre. Elle ne sera jamais tout à fait satisfaisante si l'on introduit, d'une manière quelque peu arbitraire, la notion de centre de courbure. Il est naturel de le déduire, soit de la recherche d'un cercle osculateur à la courbe en un point donné, soit de la considération de l'enveloppe des normales.

Les rôles dans les définitions des conventions d'unité, d'orientation du plan, d'orientation de la courbe, ne sont pas à méconnaître si l'on définit, par un procédé où jouent ces conventions, le centre de courbure.

Pour les courbes gauches, faute d'avoir réfléchi à ces questions, un géomètre amateur (ceci ne vise pas nos agrégatifs) avait défini un « centre de torsion » ! Son erreur est instructive à relever, et des considérations analogues aux précédentes jouent alors un rôle essentiel.

11. Système de vecteurs glissants, moment résultant, axe central. Combien les solutions du problème de l'axe central sont, dans une telle leçon, artificiellement obtenues !

On connaît la position du problème : le système étant défini par sa somme géométriquement $\vec{S} \neq 0$ et son moment résultant $\vec{OG}$, trouver les points où $\vec{OG} - \vec{OM} \wedge \vec{S}$ a la direction de $\vec{S}$.

Il est commode de remarquer que le problème à résoudre reste, *a priori* le même si, sans changer $\vec{S}$ on substitue à $\vec{OG}$ le vecteur $\vec{OG}_1 = \vec{OG} + k\vec{S}$,

k scalaire quelconque. Disposons de k de manière à réduire la difficulté du problème : pour une valeur de k , $\vec{OG}_1$ devient orthogonal à $\vec{S}$: on est ramené dans cette condition à $\vec{OG}_1 - \vec{OM} \wedge \vec{S} = 0$, soit à la détermination d'un vecteur glissant équipollent à $\vec{S}$, sachant que son moment en O est $\vec{OG}_1$, question classique.

12. Glissement, avec ou sans frottement, d'un petit corps pesant sur un plan incliné, le long d'une ligne de pente.

La bonne leçon faite sur ce sujet aurait été parfaite avec un *résumé* de la discussion des différents cas.

13. Leçons de géométrie descriptive : le jury a exprimé, au cours des années précédentes le vœu qu'on ne se désintéressât pas totalement des épreuves comportant deux projections.

Mais il n'impose pas un pensum aux candidats, qui restent libres d'effectuer un choix simple et suggestif de la seconde projection utilisée ; si ce choix est arbitraire, le candidat risque des inexactitudes graphiques et complique sans intérêt les difficultés auxquelles il doit faire face.

Une seule des leçons effectuées sur une telle détermination d'intersection de surfaces a été mauvaise (omission de points sur les contours apparents horizontaux des surfaces, dénaturant complètement la ponctuation du résultat).

14. La projection orthogonale de la « fenêtre ovale de Viviani » sur un plan perpendiculaire au diamètre de sa sphère circonscrite mené par le point double, n'est nullement une lemniscate de Bernouilli, malgré une certaine similitude d'apparence.

15. Directions conjuguées rectangulaires dans les quadriques. Le candidat n'a pu établir correctement que si deux directions Δ' Δ'' sont perpendiculaires à une direction principale Δ , et de plus rectangulaires et conjuguées entre elles, ces directions sont principales.

16. Génératrices rectilignes des surfaces du second ordre. Le candidat qui a employé l'équation $XY = ZT$, où X, Y, Z, T sont quatre formes linéaires *indépendantes*, dont les variables sont les coordonnées homogènes d'un point de la quadrique, n'a pas montré comment cette hypothèse jouait dans les théories relatives à *deux* systèmes de génératrices.

La « loi d'inertie », relative aux décompositions d'une forme quadratique en carrés précédés de signes $+$ ou $-$, portant sur des formes linéaires du corps réel, n'est pas enseignée en Spéciales, et l'auteur qui s'en inspire devrait, pour y être compris, en donner la justification.

17. La méthode dite de Rouché pour déterminer l'intersection d'une droite et d'une surface de révolution a été expliquée, mais à moitié seulement, par un candidat qui a montré que l'intersection de deux quadriques de révolution de plan équatorial commun $z = 0$, d'équations :

$$(1) \quad x^2 = k_1 C_1$$

$$(2) \quad x^2 = k_2 C_2$$

$$C_i \equiv (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + \lambda_i \quad i = 1, 2$$

est « projetée sur $z = 0$ selon un cercle », parce qu'elle satisfait à l'équation

$$(3) \quad k_1 C_1 - k_2 C_2 = 0.$$

En réalité, on se sert du fait que le système des équations (1) et (2) est équivalent au système constitué par l'une d'entre elles et par (3).

Il vaudrait mieux dire que toutes les quadriques du faisceau défini par l'intersection ont $z=0$ comme plan équatorial et que, parmi elles, il existe un cylindre de révolution. Au point de vue réel, la courbe d'intersection peut ne pas faire *tout le tour* du cylindre.

Notes : On relève deux 19, deux 17, trois 16, quatre 15, quatre 14, dix 13, deux 12, quatre 11, trois 10, soit trente-quatre notes supérieures ou égales à 10. Au-dessous de 10 : deux 9, deux 8, deux 7, un 5, un 4. La moyenne générale des notes est 12,4 (contre 10,6 l'an dernier). Mais ces notes ont été uniformément relevées, car initialement le jury, influencé par l'impression de faiblesse des compositions écrites, s'était montré réticent. Somme toute, l'oral est de même qualité moyenne que ceux des concours précédents. Il n'a pas donné lieu même à des critiques bien graves.

Que l'on comprenne bien que les observations de ce rapport ne sont pas destinées à constituer autant de reproches aux candidats de cette année, car la critique est facile, et des imperfections sont inévitables. Mais il nous semble que ces observations peuvent être profitables aux futurs candidats et apporter quelque contribution à l'amélioration de leur préparation, qui se manifeste d'ailleurs d'année en année.

EPREUVES PRATIQUES

(Elles ont été effectuées, au lycée Saint-Louis, le 16 juillet)

COMPOSITION D'ÉPURE : SUJET

Les données, exprimées en millimètres, sont rapportées à trois axes rectangulaires, $\Omega x, \Omega y, \Omega z$. L'axe Ωy est le petit axe de la feuille, orienté positivement vers la droite ; le plan $x\Omega y$ est le plan horizontal de projection ; le plan $y\Omega z$ est le plan frontal de projection, le plan $x\Omega z$ est de profil, suivant le grand axe de la feuille ; Ωx est orienté positivement vers le bas, Ωz vers le haut.

On donne un point O (120 ; 0 ; 100) ; un plan P contient O et les deux directions de coefficients directeurs (2, 1, 0) et (0, 1, 1). Dans P se trouve une ellipse $\mathcal{E}$; la projection horizontale de $\mathcal{E}$ a pour centre c ($x=105$; $y=-20$) ; le grand axe de cette projection, porté par la droite co (o est la projection horizontale de O) a pour longueur 150 ; le petit axe a pour longueur 100.

En tournant autour de la verticale O , $\mathcal{E}$ engendre une surface Σ .

1) Construire la méridienne frontale $\mathcal{M}$ de Σ .

2) Construire l'intersection Λ de Σ avec le cylindre $\mathcal{C}$ qui projette frontalement $\mathcal{E}$.

3) Représenter le solide formé par les points de l'espace non extérieurs à Σ , et non intérieurs à $\mathcal{C}$.

N.B. — On justifiera sur une notice jointe à l'épure :

1) la construction d'un point courant et de la tangente en ce point pour la courbe $\mathcal{M}$;

- 2) la construction des points et tangentes remarquables de $\mathcal{M}$;
- 3) la détermination des tangentes aux points doubles de Λ .

Certains détails relatifs aux projections de Λ gagneront à être reproduits, avec un agrandissement convenable, à côté de l'épure.

RAPPORT DE M. CAGNAC

Les données étaient choisies de telle sorte que $\mathcal{M}$ possédait deux points de rebroussement : six candidats ont démontré correctement l'existence de ces rebroussements, un seul d'entre eux a su déterminer la tangente de rebroussement à partir du centre de courbure de la projection horizontale de $\mathcal{G}$. Un autre candidat a déterminé la tangente de rebroussement sans avoir su démontrer qu'il y avait rebroussement.

Naturellement le correcteur n'attache qu'une faible valeur à des phrases comme celle-ci : « On constate que le pied d'une normale menée de o à la projection horizontale de $\mathcal{G}$ est la projection d'un point à tangente horizontale de $\mathcal{G}$. » Une telle constatation ne prend tout son prix que si elle est le point de départ d'une recherche mathématique tendant à démontrer le fait souligné. Que les candidats sachent bien que le graphique seul ne permet pas d'affirmer que trois lignes sont concourantes en un point.

Le correcteur a constaté avec regret que trois candidats ont commis des erreurs de mise en place qui leur ont valu la note 0 ; 11 autres n'ont pas tracé la projection frontale de $\mathcal{G}$; quatre enfin ont commis dans ce tracé de graves imprécisions (erreur de près d'un centimètre sur la position des points à tangente horizontale). En résumé, dix-huit candidats (sur quarante-deux admissibles) n'ont pas su tracer correctement la projection frontale d'une ellipse dont on donnait le plan et la projection horizontale ; observons que ce tracé est enseigné à des élèves de Mathématiques Supérieures au cours du premier trimestre de leur scolarité.

L'intersection de Σ avec le cylindre $\mathcal{C}$ comprenait, outre $\mathcal{G}$ et sa symétrique par rapport au plan parallèle à $\gamma\Omega z$ mené par O , une courbe gauche Γ ; quelques épreuves présentent un tracé global de Γ , mais sans que les points communs à Γ et à $\mathcal{G}$, ou à Γ et à $\mathcal{M}$, aient fait l'objet d'une étude détaillée.

Une épreuve a mérité la note 17 : son auteur a certainement des dons de géomètre. Les autres notes atteignant la moyenne sont un 11 et quatre 10. La moyenne générale de l'épreuve est 5.

EPREUVE PRATIQUE D'ANALYSE ET DE CALCUL NUMÉRIQUE : SUJET

On pose : $z = u + 2i\pi w$,

$$Z = \frac{thz}{z} \quad Z = X + iY.$$

On se propose de calculer X et Y à 0,001 près pour tous les couples (u, w) formés avec les valeurs :

$u = 0$	0,1	0,2		0,9	1,
$w = 0$	0,02	0,04		0,48	0,50.

On dispose des tables ci-jointes :

Lignes trigonométriques

x (en grades)	$\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
0	1,00000	0,00000	0,00000	
4	0,99803	0,06279	0,06291	15,89454
8	0,99211	0,12533	0,12633	7,91582
12	0,98229	0,18138	0,19076	5,24218
16	0,98858	0,24869	0,25676	3,89474
20	0,95106	0,30902	0,32492	3,07768
24	0,92978	0,36812	0,39593	2,52571
28	0,90483	0,42578	0,47056	2,12511
32	0,87631	0,48175	0,54975	1,81899
36	0,84433	0,53583	0,63462	1,57575
40	0,80902	0,58779	0,72654	1,37638
44	0,77051	0,63742	0,82727	1,20879
48	0,72897	0,68455	0,93906	1,06489

On pourra, si on le désire, se servir des tables de logarithmes à cinq décimales.

1. Indiquer la formule à utiliser et expliquer en détail l'organisation des calculs, confection des feuilles de calcul, vérification, durée approximative,

2. Effectuer réellement les calculs pour les quatre couples formés par les valeurs : $u = 0,8 \ 0,9$; $w = 0,20 \ 0,22$.

3. En se servant des résultats obtenus et en utilisant au besoin un graphique, donner une valeur approchée d'une racine de l'équation

$$thz = (0,6 - i 0,6)z \quad (E).$$

Rechercher une autre valeur approchée de cette racine en appliquant la méthode habituelle de Newton à l'équation (E), en l'un des quatre points pour lesquels on a déterminé $\frac{thz}{z}$.

4. Expliquer pourquoi l'emploi de cette méthode est justifiée en variables complexes et donner un ordre de grandeur de l'erreur commise. On fera pour cela intervenir les termes du second ordre.

RAPPORT DE M. KUNTZMANN

Les candidats devaient d'abord chercher une formule commode pour calculer $\frac{thz}{z}$. Vingt-quatre l'ont trouvée. Les autres, ou bien se sont trompés, ou bien ont gardé des carrés de lignes trigonométriques sans les remplacer par des lignes d'argument double.

Les quatre valeurs demandées s'obtenaient ensuite facilement. Les quatre points correspondants du plan complexe devaient se trouver aux quatre sommets d'un rectangle curviligne contenant probablement le point $(0,6, -0,6)$. On avait ainsi une vérification grossière des résultats. Le même graphique donnait à vue une valeur approchée de la racine de l'équation proposée.

Les notes vont de 18 à 1 avec une moyenne de 5.

RESULTATS GENERAUX

Pour l'ensemble des épreuves écrites, les notes obtenues par les admissibles varient de 131 à 268 sur 400, soit de 6,6 à 13,9 sur 20.

Le jury a proposé pour l'admission définitive les vingt-huit premiers candidats et en plus un candidat ayant signé l'engagement de servir comme professeur en Tunisie ou au Maroc. La moyenne générale des notes de ces agrégés est 10,6 (11,08 en 1950 ; 9,85 en 1949). Le candidat classé 30^e n'a atteint que 8,8.

Les deux premiers de la liste d'admissibilité se sont classés premiers (*ex-æquo*) dans le classement final ; l'un des deux cinquièmes de la première liste a obtenu le troisième rang définitif ; ensuite les deux classements ne sont pas concordants.

L'ensemble des nouveaux agrégés comprend dix élèves de l'Ecole Normale Supérieure de la rue d'Ulm, dont un redoublant (et l'un des deux premiers) ; un auditeur à cette école ; un ingénieur, ancien élève de l'Ecole Polytechnique (classé aussi premier) ; quatre professeurs de lycée (dont deux anciens élèves de l'E.N.S.) ; deux professeurs de collège ; un professeur de l'enseignement technique ; un professeur d'école normale ; un boursier du C.N.R.S., ancien professeur ; deux élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud (troisième concours) ; un stagiaire d'enseignement ; cinq étudiants auprès des Facultés de province, dont un surveillant d'externat (classé 3^e).

On compte, parmi cette liste, neuf admissibles à l'un, au moins, des concours précédents.

Sur les treize admissibles qui n'ont pas été proposés pour l'admission figurent huit professeurs, dont deux dans les collèges techniques ; deux stagiaires d'enseignement, un élève (redoublant) de la rue d'Ulm ; un élève de Saint-Cloud, un étudiant libre.

La dispense du Certificat d'aptitude à l'enseignement dans les collèges a été accordée par le jury à trois de ces concurrents qui ne la possédaient pas encore. Les deux derniers candidats du classement définitif ont été proposés pour accomplir un stage d'agrégation, en tant que stagiaires d'enseignement, qualité que l'un de ceux-ci possédait depuis un an.

Mais les circonstances sont telles qu'on aurait souhaité recruter pour l'enseignement bien davantage de maîtres agrégés et l'on doit regretter que le niveau des épreuves, affaibli par l'écrit, ne l'ait pas permis. Les exigences légitimes de la France d'Outre-Mer ne sont pas satisfaites, faute de candidats qualifiés possédant l'agrégation. Nous n'avons pu nommer que vingt et un agrégés des lycées, parmi lesquels une demi-douzaine devront sous peu satisfaire à leurs obligations militaires ; le nombre des chaires de Mathématiques Élémentaires non pourvues de professeurs s'est très fâcheusement accru pour ces diverses raisons. Il était donc de toute urgence, en ce qui concerne notre discipline, d'envisager un recrutement latéral des maîtres dont l'Enseignement du Second Degré a besoin. Dans les Centres de formation pédagogique qui fonctionneront à partir d'octobre 1952, aux

chefs-lieux d'académie, les stagiaires candidats au nouveau concours de recrutement, et qui pourront aussi affronter l'Agrégation, bénéficieront des conseils et enseignements des professeurs de faculté et de lycée. Il est hautement important qu'agrégatifs et stagiaires fusionnent dans un groupe unique d'étudiants, les uns apportant leurs connaissances, les autres leur expérience pédagogique, dans leurs travaux communs, pour que la nouvelle institution soit féconde.

P. ROBERT.

L'Association des Professeurs de Mathématiques tient à la disposition de tous ceux qui en feront la demande, la liste complète des leçons de Mathématiques proposées aux diverses Agrégations et aux Certificats d'Aptitude à l'Enseignement (C.A.E.C., C.A.P.E.S.).

Rapport sur le concours général de mathématiques pour les classes de Première, en 1951

Le Jury était ainsi composé : M. DESFORGE, inspecteur général président ; Mlle BARBIER, professeur de Mathématiques au Lycée Victor-Duruy ; Mme DOMANGE, professeur de Mathématiques (classe de Fontenay) au Lycée Fénélon ; Mlle LECONTE, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Fénélon ; M. Charles DURAND, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Buffon ; M. LEBOSSÉ, professeur de Mathématiques au Lycée Claude-Bernard (1).

Le sujet du Concours de 1951 consistait en l'étude de quelques propriétés d'un polyèdre à dix faces (peut-être devrais-je dire : facettes ?) qui devient, pour certaines valeurs des paramètres servant à le définir, la remarquable « alvéole des abeilles ». Il a paru intéressant de rattacher la solution de différentes questions, mettant en évidence certaines particularités géométriques curieuses de la figure, à quelques résultats algébriques qui n'exigent point d'autres connaissances que celles du programme de Première. Ainsi, à l'occasion d'un problème concret, posé par l'observation attentive de phénomènes naturels, pouvait apparaître l'intime liaison, pour ne pas dire l'unité, sur un plan très élémentaire, des domaines de la géométrie et de l'algèbre.

La première partie, ne comportant que de l'algèbre, permettait d'obtenir simplement quelques résultats utiles pour la suite. Partant de la relation

$$(1) \quad y = -x + \sqrt{\alpha x^2 + \beta}$$

établie entre deux variables x et y , les notations α et β représentant deux constantes respectivement supérieures à 1 et à 0, on demandait d'abord quel était le nombre de valeurs de x , positives ou nulles, vérifiant cette relation lorsqu'on donne à y une valeur positive quelconque. La connaissance de la signification exacte du symbole de la racine carrée suffit pour ramener cette question à l'étude de l'équation en x (2) $\alpha x^2 + \beta - (x + y)^2 = 0$ jointe à l'inéquation $x \geq 0$, avec l'hypothèse $y > 0$. La discussion classique

(1) Le texte du problème proposé a été publié dans notre numéro 142 de juillet 1951, pages 277 à 279.

de l'existence et du signe des racines d'une équation du second degré fait apparaître que le nombre des valeurs de x cherchées est zéro, deux ou un suivant que le paramètre y est inférieur au nombre $y_0 = \sqrt{\frac{\beta(\alpha-1)}{\alpha}}$, ou bien compris entre y_0 et $\sqrt{\beta}$, ou bien supérieur à $\sqrt{\beta}$; pour la valeur y_0 , l'équation (2) admet une racine double positive x_0 égale à $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha(\alpha-1)}}$.

L'existence d'un minimum, justement égal à y_0 , pour la variable y considérée ensuite comme fonction, définie par la relation (1), de la variable indépendante x , supposée positive, se déduisait de ces résultats, sans qu'il soit nécessaire d'entreprendre l'étude des variations de cette fonction, étude qui, bien entendu, n'était pas demandée, et était même explicitement écartée par l'énoncé, puisqu'elle ne peut être faite normalement qu'en faisant appel à des notions hors du programme de Première. Le raisonnement permettant d'établir la liaison entre les résultats obtenus dans la discussion de l'équation en x et l'existence d'un minimum pour la fonction y peut être détaillé, par exemple, de la façon suivante : pour chaque valeur positive x_1 donnée à la variable x , la relation (1) définit une valeur y_1 , manifestement positive, de la fonction y ; x_1 peut donc être considéré comme l'une des racines positives de l'équation (2) lorsqu'on donne au paramètre y la valeur positive y_1 ; y_1 fait donc partie des valeurs positives de y pour lesquelles l'équation (2) admet au moins une racine positive, et vérifie par conséquent l'inégalité $y_1 \geq y_0$; le nombre y_0 est lui-même la valeur numérique de la fonction y correspondant à la valeur x_0 donnée à x , puisque l'égalité numérique, qui exprime que x_0 est racine (double) de l'équation (2) lorsque y est égal à y_0 , et qu'on peut mettre sous la forme

$$(x_0 + y_0)^2 = \alpha x_0^2 + \beta$$

entraîne, x_0 et y_0 étant positifs :

$$y_0 = -x_0 + \sqrt{\alpha x_0^2 + \beta}.$$

La fonction y admet donc bien y_0 comme minimum, effectivement atteint pour la valeur x_0 donnée à x .

On peut naturellement raisonner autrement, par exemple, en faisant appel à la forme canonique du trinôme du second degré en x constituant le premier membre de l'équation (2). La relation (1) peut être écrite alors sous la forme

$$(3) \quad (\alpha - 1) \left(x - \frac{y}{\alpha - 1} \right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} y^2 - \beta \right) = 0$$

avec les hypothèses $x > 0$ et $y > 0$, et l'on met ainsi en évidence que la variable y vérifie toujours, quelle que soit la valeur donnée à x , et puisque

$(\alpha - 1)$ est positif, l'inégalité $y^2 \geq \frac{\beta(\alpha-1)}{\alpha}$, c'est-à-dire $y \geq y_0$, cette valeur y_0 étant effectivement prise par la fonction y lorsqu'on donne à x la valeur positive $\frac{y_0}{\alpha - 1}$, qui n'est autre que x_0 .

C'est à dessein que la solution de cette première partie, et, en particulier, le passage logique de l'une à l'autre des deux questions qui la constituent viennent d'être analysés longuement. Il n'est pas inutile, en effet, de chercher à comprendre les difficultés qui ont arrêté d'assez nombreux élèves dans l'étude d'un problème d'algèbre dont l'énoncé, s'il n'était pas tout à fait traditionnel dans sa forme, ne faisait pourtant intervenir que des mots exprimant des idées qui devraient être, à ce niveau, sinon familières, du moins suffisamment connues et élucidées, pour avoir été maniées maintes fois sous des formes variées : les notions fondamentales de variable, de fonction, de variables liées par une relation, sont assez simples et ont dû être présentées assez clairement, en les illustrant par de nombreux exemples, pour que leur contenu essentiel soit compris des débutants. C'est en tout cas le premier pas à franchir, et qui peut être franchi dans les classes de Seconde et de Première, pour passer du chapitre des nombres et des opérations, qui forme la base, à celui des correspondances entre nombres qui ouvre le domaine indéfini de l'algèbre et, plus tard, de l'analyse.

Il peut paraître surprenant de constater qu'une assez forte proportion (près de la moitié) des compositions ne contiennent que des essais douteux et sans grande valeur sur la première question. Sans doute le libellé a-t-il pu surprendre quelques-uns, qui auraient peut-être trouvé le terrain plus familier si l'on avait proposé de résoudre une certaine équation et d'en rechercher les racines positives ; mais ne peut-on demander à des élèves de Première de savoir, ou plutôt d'avoir compris que la résolution d'une équation est en réalité un problème dont l'énoncé est écrit, conventionnellement, sous une forme symbolique, et, inversement, que la phrase : « Combien existe-t-il de valeurs de x ... vérifiant la relation (1),... ? » n'est autre que celle que l'on formulerait pour traduire en langage clair la question posée par la résolution de l'équation (1) $y = -x + \sqrt{\alpha x^2 + \beta}$ où x est l'inconnue et y un paramètre, astreints l'un et l'autre, ici, à certaines conditions d'inégalité.

Quant au passage de la forme (1) à la forme (2), il ne requiert point, comme on l'a déjà remarqué, l'intervention de théorèmes généraux sur la transformation des équations : il suffit, là encore, d'avoir bien compris la signification d'une « équation », et de savoir que, pour que deux nombres positifs soient égaux, il faut et il suffit que leurs carrés soient égaux.

D'assez nombreux candidats, dont quelques-uns ont donné du reste des réponses correctes à certaines des questions de cette partie, ont cherché à tout prix à se raccrocher aux « mécanismes » et aux « formules », se contentant parfois d'une apparence, d'une ressemblance extérieure, pour appliquer, malheureusement hors de propos, tel théorème ou tel résultat « bien connu ». C'est ainsi que l'on trouve dans plusieurs compositions une faute assez curieuse : la relation (2), ayant été transformée de manière à isoler y^2 dans l'un des membres, afin, sans doute, de faire apparaître l'indispensable trinôme du second degré en x , se présente sous la forme (4) $y^2 = (\alpha - 1)x^2 - 2xy + \beta$; on étudie alors le minimum de y^2 , considéré comme une fonction de x définie par le second membre de cette

relation, sans avoir vu que les coefficients de ce trinôme dépendent justement de la fonction y . Par bonheur pour certains de ces apprentis maladroits, mais par malheur pour la logique, le résultat obtenu par ce procédé, c'est-à-dire par un raisonnement incorrect, se révèle exact, et l'exactitude tient à un fait qui n'est naturellement pas évoqué dans les solutions incriminées : la mise en évidence, par voie élémentaire, d'un minimum pour le trinôme du second degré en x qui figure au second membre de (4) est liée à la possibilité de mettre ce trinôme sous la forme canonique, et d'écrire, par conséquent :

$$y^2 = (\alpha - 1) \left(x - \frac{y}{\alpha - 1} \right)^2 + \left(\beta - \frac{y^2}{\alpha - 1} \right);$$

dès lors, puisque $\alpha - 1$ est positif, quelle que soit la valeur donnée à x , on a toujours l'inégalité $y^2 \geq \beta - \frac{y^2}{\alpha - 1}$, et l'on rejoint, par le lien de cette inégalité parfaitement correcte, les remarques faites précédemment à propos de la forme (3) de la relation initialement donnée.

On peut tirer, semble-t-il, quelques enseignements fructueux de l'observation réfléchie des tâtonnements et des hésitations qui se manifestent ainsi, fréquemment, chez les débutants aux prises avec la complexité et la subtilité des êtres algébriques et de leur comportement.

Il convient d'ajouter que cette partie algébrique du problème a donné lieu à un nombre non négligeable de solutions correctes, et parfois tout à fait bonnes.

La deuxième partie proposait l'étude d'un décaèdre convexe Δ ayant pour faces : un hexagone régulier $ABCDEF$, — puis six trapèzes rectangles non croisés $ABB'A'$, $BCC'B'$, ..., dont les bases AA' , BB' , CC' , ..., perpendiculaires au plan P de l'hexagone sont des segments égaux de deux en deux ($AA' = CC' = EE'$, $BB' = DD' = FF'$), les grandes bases étant AA' , CC' , EE' , — enfin trois losanges égaux obtenus en complétant les parallélogrammes ayant respectivement pour côtés consécutifs les segments $A'B'$ et $B'C'$, $C'D'$ et $D'E'$, $E'F'$ et $F'A'$, les quatrièmes sommets de ces trois parallélogrammes étant confondus en un point I situé sur l'axe de répétition de l'hexagone. A vrai dire, la figure était décrite différemment : partant de l'hexagone dont on donnait le côté a , et d'une demi-droite OZ perpendiculaire au plan P et ayant pour origine le centre O de l'hexagone, on construisait trois segments AA' , CC' , EE' , ayant même longueur l , perpendiculaires à P et situés du même côté de P que la demi-droite OZ , et le point I de OZ situé à la distance $l + x$ du point O , x étant une longueur comprise entre 0 et l ; une première question, très simple, avait pour objet de faire prendre contact avec ces éléments, en établissant que les plans tels que $IA'C'$,... coupaient respectivement les perpendiculaires au plan P menées par les sommets B , D , E , en des points B' , D' , E' placés du même côté du plan P que OZ , puis en étudiant la forme des quadrilatères $IA'B'C'$, ..., et en calculant la longueur commune des trois segments tels que BB' .

Afin d'obliger les candidats à réfléchir sur la forme et sur les particularités simples du polyèdre ainsi défini, l'énoncé demandait, comme complé-

ment, la construction des projections orthogonales de ce solide successivement sur le plan P de l'hexagone, puis sur deux des plans de symétrie de la surface prismatique ayant l'hexagone comme section droite, c'est-à-dire sur le plan diagonal $BB'EE'$, et sur le plan médiateur du côté BC . Cette construction devait mettre en évidence la symétrie du décaèdre par rapport aux plans tels que $BB'EE'$.

Le début de cette question, c'est-à-dire la mise sur pied du polyèdre, la recherche de la forme des faces telles que $IA'B'C'$, et le calcul de la longueur BB' , a été en général correctement traité, mais très fréquemment avec des longueurs et des maladresses provenant souvent du fait que quelques propriétés géométriques simples, en particulier des propriétés de symétrie et de répétition, n'ont pas été vues clairement ou n'ont pas été exploitées complètement. Beaucoup de candidats ont su tracer, pour cette partie du problème, des figures « en perspective » assez nettes, montrant qu'ils se rendaient compte de la forme générale du décaèdre. Par contre, les projections orthogonales, dont on demandait la construction ont été bien moins réussies. Il fallait évidemment, ici, entrer dans le détail, pousser davantage l'analyse des éléments géométriques. La question de la « ponctuation » que l'on proposait de faire en distinguant arêtes vues et arêtes cachées, et en laissant au candidat le soin de définir lui-même la position de « l'observateur » par rapport au décaèdre et par rapport au plan de projection, n'a pas toujours été comprise ; sans doute la technique des conventions élémentaires utilisées en géométrie descriptive n'est-elle pas connue des élèves de Première, mais il s'agissait ici de simples remarques de bon sens, et aucune justification logique n'était attendue.

Le décaèdre, une fois mis en place, l'étude se poursuivait par la détermination de ses principaux éléments métriques et angulaires en fonction des trois données fondamentales a , l , α : les longueurs des diagonales des losanges, — les longueurs des différentes arêtes, — les cosinus de l'angle φ formé par la petite base et par le côté non perpendiculaire aux bases de l'une quelconque des faces-trapèzes, et de l'angle θ formés par les deux côtés issus du sommet I de l'une quelconque des faces-losanges, — enfin, le volume V du polyèdre, son aire totale S et la somme L des longueurs de ses vingt et une arêtes. Tous ces calculs étaient faciles, lorsque les propriétés géométriques simples avaient été bien vues ; ils exigeaient, bien entendu, comme toute opération de cette nature, une observation réfléchie de la figure, un contrôle attentif aux différentes étapes, quelques vérifications rapides permettant d'éviter des erreurs gênantes. Sans entrer dans le détail d'une énumération « statistique », on peut dire qu'un bon tiers des compositions ne contiennent, pour ce groupe de questions, que peu de résultats valables ; le reste se partage à peu près également entre les copies donnant correctement presque toutes les formules demandées et celles où la plupart des calculs ont été abordés convenablement, mais où des défaillances plus ou moins graves ont provoqué de fâcheuses erreurs.

La détermination du volume V du décaèdre a été assez rarement traitée à partir d'une très simple remarque de « compensation », qui apparaît

presque évidente lorsqu'on fait intervenir le plan parallèle au plan P de l'hexagone, et passant par les sommets A', C', E' : le tronc de prisme quadrangulaire ayant pour section droite le losange OABC et pour section non perpendiculaire aux arêtes le losange IA'B'C' a manifestement le même volume que le prisme quadrangulaire ayant la même section droite OABC et dont la hauteur est AA'. La recherche de ce volume pouvait naturellement être abordée par différents procédés de décomposition fort raisonnables, sans qu'il soit nécessaire, du reste, de faire intervenir une formule donnant le volume d'un tronc de prisme triangulaire, formule dont la connaissance n'est pas exigée en Première. Lorsque le calcul était correctement conduit, par quelque moyen que ce soit, le fait que l'on obtenait une expression très simple, et surtout indépendante de x , était assez remarquable pour que l'on cherche alors une explication géométrique de ce phénomène, dont la plus naturelle est sans doute celle qui vient d'être signalée.

Des fautes assez fréquentes ont été relevées dans le maniement des formules trigonométriques, pourtant bien simples, qui conduisaient aux expressions demandées de $\cos \theta$ et de $\cos \varphi$; en particulier, le fait que l'angle φ est obtus n'a pas manqué de provoquer quelques accidents.

Dans la dernière question de cette seconde partie, on considérait tous les décaèdres Δ pour lesquels les longueurs a et l sont fixes et vérifient l'inégalité $8l^2 > a^2$, et l'on demandait d'établir que leur aire totale S et la somme L des longueurs de leurs arêtes, fonctions l'une et l'autre de x , admettent un minimum pour une même valeur x_0 de x , valeur qui est également celle pour laquelle les angles φ et θ sont égaux. Il est intéressant de remarquer que tous ces décaèdres Δ , a et l étant fixés, ont le même volume V .

Le libellé de l'énoncé devait attirer l'attention sur la liaison qui existait probablement entre cette question et le problème d'algèbre traité au début, et, pour les candidats qui avaient obtenu des expressions correctes de S et de L en fonction de x , la forme de ces fonctions ne pouvait manquer de confirmer cette première idée. La difficulté technique à surmonter pour arriver à la solution en utilisant les résultats trouvés dans la première partie, sans être considérable, ne doit cependant pas être sous-estimée quand il s'agit de débutants. Les expressions de S et de L se présentaient en effet sous une apparence assez compliquée, et le premier travail devait consister en une discrimination entre termes ou facteurs constants et termes ou facteurs variables ; sans exiger une grande virtuosité, cette opération demandait pourtant quelque soin, afin d'arriver à mettre en évidence le fait que S et L admettaient un minimum en même temps, respectivement, que les

fonctions $-x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{4x^2 + a^2}$ et $-x + 3\sqrt{x^2 + a^2}$.

La deuxième étape à franchir, et qui comportait elle aussi un obstacle non négligeable pour des novices, était de mettre ces fonctions sous la

forme $-x + \sqrt{3x^2 + \frac{3a^2}{4}}$ et $-x + \sqrt{9x^2 + 9a^2}$,

afin d'établir leur analogie complète avec la fonction y de x étudiée dans la première partie. A partir de là, l'existence du minimum des fonctions

S et L pour la seule valeur $\frac{a}{2\sqrt{2}}$ de la variable x , comprise entre 0 et L ,

se déduisait immédiatement des propriétés connues de la fonction y .

La proportion de candidats ayant abordé d'une façon suffisante cette question ne dépasse guère un sur cinq, mais moins nombreux encore sont ceux qui conduisent les opérations jusqu'à leur terme correct, ou presque.

Le fait que la valeur particulière x_0 de x ainsi découverte est également celle pour laquelle les angles φ et θ sont égaux a été vérifié par quelques-uns ; en réalité, l'énoncé demandait une démonstration, qui permettait en même temps d'établir qu'il n'y a pas d'autre valeur de x réalisant cette propriété angulaire très simple : la question ainsi posée se réduisait à la résolution d'une équation irrationnelle, qui était certainement à la portée de bons élèves de Première.

Le décaèdre remarquable (Δ_0) ainsi découvert méritait évidemment un examen géométrique un peu attentif, qui était proposé, discrètement d'ailleurs, en conclusion de cette seconde partie. Le fait que les quatre angles trièdres formés par les arêtes issues des sommets I, B', D', E' ont toutes leurs faces égales, leur valeur commune étant celle des angles φ et θ , dont

le cosinus est égal à $-\frac{1}{3}$, et que les trois angles polyèdres à quatre faces

formés par les arêtes issues des sommets A', C', F' ont aussi, comme conséquence, toutes leurs faces égales, et égales au supplément de l'angle précédent, résultait évidemment de l'égalité établie des angles φ et θ et des propriétés angulaires classiques d'un trapèze et d'un parallélogramme. L'énoncé ne faisait pas allusion à l'égalité des quatre angles trièdres, afin de ne pas engager les candidats dans une voie qui ne devait pas leur être familière, mais on pouvait penser que quelques-uns découvriraient cette propriété et qu'ils en tireraient parti pour faciliter l'étude des dièdres des différents angles polyèdres. En fait, cette question a été presque complètement laissée de côté.

La troisième partie du problème avait pour objet de définir les conditions d'existence d'une sphère inscrite dans un décaèdre Δ , c'est-à-dire d'une sphère intérieure à Δ et tangente à ses dix faces. Pour éviter des tâtonnements à propos de faits évidents, l'énoncé indiquait qu'une telle sphère, si elle existe, avait nécessairement son centre sur la demi-droite OZ et que son rayon était celui du cercle inscrit dans l'hexagone régulier ; il attirait d'autre part l'attention sur l'intérêt que présente l'emploi d'une section de la figure par un plan tel que $BB'EE'$, déjà connu comme plan de symétrie du polyèdre. On supposait fixées les longueurs a et l .

Il est évident que la seule sphère acceptable comme sphère inscrite dans un décaèdre Δ est parfaitement déterminée par les conditions d'être tangente au plan P de l'hexagone et aux plans des six faces-trapèzes, et aussi d'être du même côté du plan P que la demi-droite OZ ; cette sphère σ a

pour centre le point ω de OZ situé à une distance égale à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ du point O, et elle est tangente en ce point O au plan P. Le problème se réduit donc à la recherche des conditions de contact de cette sphère σ avec les plans des trois faces-losanges du décaèdre.

La solution peut être orientée, soit vers une voie algébrique, soit vers une voie géométrique. On peut, par exemple, calculer les distances du centre ω de la sphère σ aux plans des trois faces-losanges, et la condition de contact s'obtiendra en exprimant que ces distances sont égales au rayon de σ ; l'équation obtenue, jointe aux inégalités imposées dès la définition du décaèdre, formera le système des relations caractérisant les décaèdres Δ admettant une sphère inscrite. On peut aussi se proposer de déterminer géométriquement les plans des faces-losanges tangentes à la sphère σ , compte tenu des conditions géométriques d'existence du décaèdre. De toutes façons, le fait que OZ est axe de répétition d'ordre trois pour Δ et axe de révolution pour σ permet de n'exprimer la condition de contact que pour un seul des trois plans des faces-losanges, pour le plan IA'B'C' par exemple, et la symétrie de la figure, formée par Δ et par σ , par rapport au plan BB'EE' ramène alors le problème à un problème plan.

Si l'on adopte d'abord la solution algébrique, on remarque que la distance du centre ω de la sphère σ au plan IA'B'C' n'est autre que la distance ωK du point ω à la droite IB', trace du plan IA'B'C' sur le plan de symétrie BB'EE'; le calcul de ωK est alors très facile, en utilisant par exemple la similitude des triangles I ω K et IB'B'', B'' étant la projection orthogonale de B' sur OZ. En exprimant que cette longueur ωK est égale au rayon $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ de la sphère σ , ce qui traduit une condition nécessaire et suffisante

pour le contact du plan et de la sphère, on est conduit à une équation irrationnelle très simple, dont la résolution, compte tenu des conditions d'inégalité relatives au décaèdre, équivaut à celle du système :

$$(5) \quad \begin{cases} 2x^2 - (2l - a\sqrt{3})x + l(a\sqrt{3} - l) = 0, \\ 0 < x < l. \end{cases}$$

La discussion est classique et donne les résultats suivants :

si $l < a \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$, le décaèdre Δ n'admet pas de sphère inscrite ;

si $a \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} < l < a\sqrt{3}$, le système précédent admet deux solutions

pour x , et il existe deux décaèdres Δ distincts admettant une sphère inscrite ;

si $a\sqrt{3} < l < 2a\sqrt{3}$, le système n'admet plus qu'une solution et un seul décaèdre Δ est circonscriptible à la sphère σ ;

si $2a\sqrt{3} < l$, aucun décaèdre Δ n'est circonscriptible à σ . Bien entendu, il serait facile, et non sans intérêt, d'entrer dans le détail, et, en particulier, de donner une interprétation géométrique des valeurs de x qui sont racines de l'équation du second degré (équation qui, isolée du système, exprime

le contact du plan $IA'B'C'$ et de la sphère σ) sans être solutions du système.
Les cas limites doivent naturellement être signalés :

lorsque $l = a \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$, le système admet une seule solution, qui est racine double de l'équation ; cette racine est justement égale au nombre $x_0 = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ déjà rencontré dans la deuxième partie et correspondant à un décaèdre (Δ_0) ; on reparlera plus loin de ce cas particulier ;

lorsque $l = a\sqrt{3}$, le système admet une solution $\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{2}$ qui définit un décaèdre circonscriptible, et l'équation admet une racine nulle, qui ne vérifie pas, par conséquent, l'inégalité stricte $x > 0$, et qui correspond à une forme « limite » de décaèdre, réduite au prisme hexagonal régulier ayant pour base l'hexagone donné dans le plan P et pour hauteur $a\sqrt{3}$, la seconde base plane $A'B'C'D'E'F'$ pouvant être considérée comme formée par trois losanges tels que $IA'B'C'$;

enfin, lorsque $l = 2a\sqrt{3}$, la seule racine positive de l'équation est justement égale à l et définit ici encore une forme limite du décaèdre Δ , dans laquelle les six faces-trapèzes sont remplacées par des faces triangulaires ($BB' = 0$).

Pour l'étude géométrique de la question, en utilisant, comme précédemment, la symétrie par rapport au plan $BB'EE'$, on remarque que la condition de contact du plan $IA'B'C'$ et de la sphère σ est équivalente à celle du contact de la droite IB' avec le grand cercle γ , section de σ par le plan de symétrie. Les données du problème, dans le plan $BB'EE'$, sont alors les suivantes : IB' est l'un des côtés du trapèze rectangle $OIB'B$ dont les éléments fixes sont le côté OB , ayant pour longueur a , les demi-droites OZ et Bu , parallèles et de même sens, supports des bases OI et BB' , et le segment HH' , ayant pour longueur l (supposée fixée, comme a), qui joint les milieux H et H' des côtés OB et IB' du trapèze, et qui représente la projection orthogonale sur le plan de symétrie des deux segments AA' et CC' ; d'autre part, le cercle γ , tangent en O à OB , a son centre ω sur la demi-

droite OZ , et son rayon est égal à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Le support du côté IB' est donc assujéti à passer par le point fixe H' , à être tangent au cercle γ , et à couper les demi-droites Bu et OZ en des points R' et I tels que OI soit supérieur à BB' .

Ainsi apparaît l'idée d'une construction simple : on mènera par le point H' les tangentes au cercle γ , et on ne retiendra que celles de ces droites pour lesquelles les points B' et I existent (c'est-à-dire celles qui coupent effectivement les deux demi-droites Bu et OZ) et vérifient la relation $OI > BB'$. La discussion fait donc intervenir, d'une part la condition d'existence des tangentes au cercle γ passant par le point H' , d'autre part, les conditions relatives aux points B' et I .

Pour la première, on remarque que le support du segment HH' coupe le cercle γ en deux points H_1 et H_2 dont les « cotes » mesurées parallèlement à OZ , à partir du plan P , c'est-à-dire du point H , se calculent aisément puisqu'on connaît leur somme égale au diamètre $a\sqrt{3}$ du cercle, et leur produit égal à $\overline{OH}^2$; on trouve ainsi :

$$\overline{HH_1} = a \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}, \quad \overline{HH_2} = a \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}.$$

Le point H' doit donc se trouver, soit sur le segment HH_1 , soit sur la demi-droite H_2V , parallèle à OZ , qui prolonge HH_2 au delà de H_2 .

Les autres conditions, concernant les points B' et I (existence et positions relatives), mettent en jeu comme éléments remarquables : la tangente au cercle γ au point O' diamétralement opposé au point O , tangente qui coupe le support de HH' au point L dont la « cote » est $a\sqrt{3}$, et la tangente au cercle γ , distincte de BO , passant par le point B , soit BT , qui rencontre le support de HH' et la demi-droite OZ respectivement aux points H_0 et I_0 ayant pour « cotes » $2a\sqrt{3}$ et $4a\sqrt{3}$. Le calcul de ces deux longueurs peut se déduire facilement du fait que la tangente BT est symétrique de BO par rapport au diamètre $B\omega$ et que l'angle $\widehat{OB\omega}$ a pour tangente $\frac{\sqrt{3}}{2}$, la tangente de l'angle aigu $\widehat{OBT}$ étant par suite égale à $4\sqrt{3}$.

L'examen de la figure, en supposant que le point H' , ayant pour « cote » l , varie sur la demi-droite H_2V , à partir du point H , montre alors que :

si H' est intérieur au segment HH_1 , c'est-à-dire que si $l < a \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$,

les tangentes passant par H' ne conviennent, ni l'une, ni l'autre, car elles ne rencontrent pas la demi-droite OZ ;

si H' est sur le segment H_2L , c'est-à-dire si $a \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} < l < a\sqrt{3}$,

les deux tangentes menées par H' , qui ont leurs points de contact sur l'arc limité par les points de contact des tangentes à γ issues du point L , donnent l'une et l'autre une solution du problème ;

si H' est placé sur le segment LH_0 , c'est-à-dire si $a\sqrt{3} < l < 2a\sqrt{3}$, l'une des tangentes passant par H' a son point de contact sur le demi-cercle de γ situé par rapport à OZ du côté qui ne contient pas le point B , et cette tangente ne peut être retenue, car elle définit sur Bu un point B' dont la « cote » est supérieure à celle du point I qu'elle détermine sur OZ ; la seconde tangente passant par H' donne une solution acceptable ;

enfin, si H' est au delà du point H_0 , sur la demi-droite H_0V , aucune des deux tangentes ne répond aux conditions imposées, l'une définissant, comme précédemment, des points B' et I tels que BB' soit supérieur à OI , et l'autre ne coupant pas la demi-droite Bu .

Les cas limites sont faciles à étudier, et correspondent à des construc-

tions très simples. En particulier, lorsque le point H' occupe la position H_2 , sur le cercle γ , c'est-à-dire lorsque $l = a \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$, les deux tangentes se confondent avec la tangente à γ au point H_2 et l'on obtient ainsi un décaèdre circonscriptible particulier dont on précise dans la suite quelques propriétés.

Les deux solutions algébrique et géométrique se complètent mutuellement. Il convient d'observer que la justification rigoureuse des propriétés mises en œuvre dans la discussion géométrique exigerait en réalité un raisonnement assez délicat, qui pourrait, par exemple, être conduit en étudiant systématiquement les mesures algébriques des segments $\overline{OI}$, $\overline{BB'}$, déterminés, sur les axes ayant pour demi-droites positives OZ et Bu , par la tangente fixe OB et par une tangente variable au cercle γ . Naturellement, une telle justification logique n'était pas attendue des candidats, et les remarques géométriques déduites de l'observation raisonnée d'une figure suffisamment correcte étaient considérées comme suffisantes et très favorablement appréciées.

Dans la dernière question, on demandait surtout de chercher si, parmi les décaèdres Δ_0 étudiés à la fin de la deuxième partie, il en existait un circonscriptible à une sphère. Cependant, on proposait d'abord d'établir que le rapport du volume à l'aire totale d'un décaèdre Δ admettant une sphère inscrite est égal au tiers du rayon de cette sphère. Cette propriété est presque évidente, et manifestement valable pour tout polyèdre convexe circonscrit à une sphère, le volume d'un tel polyèdre pouvant être évalué comme la somme des volumes des pyramides ayant pour sommet commun le centre de la sphère inscrite, et pour bases les différentes faces du polyèdre.

Dans le cas des décaèdres Δ , cette propriété peut d'ailleurs être présentée comme caractérisant ceux d'entre eux qui admettent une sphère inscrite, ou, plus exactement, on peut établir, pour les décaèdres Δ , une proposition réciproque de celle qui vient d'être énoncée, à condition de bien préciser les hypothèses : ayant d'abord remarqué qu'un décaèdre Δ ne peut admettre d'autre sphère inscrite que la sphère σ décrite précédemment, dont le rayon

R est égal à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, et dont le centre ω est le point de OZ tel que $O\omega = R$,

si l'on considère les décaèdres Δ dont le volume V et l'aire totale S vérifie la relation $V = \frac{R}{3} \cdot S$, R étant précisément le rayon de la sphère σ ,

ces décaèdres sont circonscriptibles à une sphère, qui est naturellement la sphère σ .

Pour démontrer cette propriété, on peut, par exemple, pour un décaèdre Δ quelconque, décomposer son aire totale S en une somme de trois termes : l'aire S_0 de l'hexagone, la somme S_1 des aires des trapèzes, la somme S_2 des aires des losanges ; on peut, d'autre part, décomposer son volume V en

une somme de volumes de pyramides ayant pour bases les différentes faces de Δ et pour sommet commun un point intérieur à Δ ; il est naturel de choisir ce point sur OZ, donc sur le segment OI, et il est possible de le choisir à égale distance du plan P de l'hexagone et des plans des trois faces-losanges ; il suffit en effet de prendre le point d'intersection de OZ avec le plan bissecteur intérieur du dièdre formé par le plan F et par le plan du losange IA'B'C' par exemple (dièdre contenant le décaèdre Δ) ; soit N ce point, et h sa distance au plan P et aux plans des losanges. Ce point N étant sur OI, sa distance aux plans des trapèzes est justement égale au rayon R de la sphère σ . Donc tout décaèdre Δ peut être décomposé en dix pyramides intérieures, ayant pour sommet commun N, six d'entre elles ayant pour hauteur commune R, les quatre autres ayant pour hauteur commune h , et le volume V de ce décaèdre quelconque Δ est égal à

$$V = \frac{R}{3} \cdot S_1 + \frac{h}{3} \cdot (S_0 + S_2),$$

son aire totale étant d'ailleurs $S = S_0 + S_1 + S_2$. Dès lors, la relation

$$V = \frac{R}{3} S \text{ équivaut à la condition } h = R, \text{ qui exprime que le point N,}$$

équidistant du plan P et des plans des losanges, coïncide avec le centre ω de σ , et par suite que le décaèdre Δ correspondant est circonscrit à σ .

Cette remarque, qui, bien entendu, n'était pas demandée aux candidats, fournissait un autre moyen de former l'équation en x correspondant aux décaèdres Δ circonscriptibles à une sphère, puisque les expressions de V et de S avaient été calculées dans la deuxième partie du problème.

Quant à la détermination des décaèdres Δ_0 admettant une sphère inscrite, elle se déduit immédiatement des résultats obtenus au début de la troisième partie, en cherchant ce que doivent être les longueurs a et l pour que le

système (5) admette comme solution, pour x , la valeur $x_0 = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ qui caractérise les décaèdres Δ_0 (avec l'hypothèse $l > \frac{a}{2\sqrt{2}}$). D'ailleurs la

discussion du système (5) avait déjà mis en évidence la valeur

$$l = a \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{a}$$

pour laquelle x_0 est justement solution (double) ; et il est facile de montrer que c'est le seul cas où il en est ainsi.

Du reste, cette étude peut être abordée autrement, en partant d'une remarque géométrique relative aux décaèdres Δ_0 : pour tous ces polyèdres, l'angle aigu du plan P de l'hexagone et du plan de l'une quelconque des

faces-losanges est un angle constant admettant pour tangente $\frac{1}{\sqrt{2}}$; donc,

en supposant fixé le côté a de l'hexagone, ces polyèdres Δ_0 ne diffèrent les uns des autres que par la longueur l des arêtes AA', CC', EE' ; autrement dit, tous les décaèdres Δ_0 construits sur un même hexagone, et d'un même

côté du plan P de cet hexagone, se déduisent les uns des autres par des translations parallèles à OZ (si l'on a fixé, bien entendu, le rôle des arêtes AA', BB', ; sinon interviendraient aussi certaines rotations autour de OZ). Il devient alors évident qu'il existe un seul de ces décaèdres Δ_0 circonscriptible à une sphère, qui ne peut être que la sphère σ déjà décrite : il correspond au plan tangent à la sphère σ , parallèle à la direction connue du plan de l'une des faces-losanges, et coupant les arêtes du prisme ayant l'hexagone donné comme section droite du côté du plan P où se trouve σ . Le point de contact M de ce plan et de σ se détermine aisément, en reprenant par exemple la figure déjà utilisée dans le plan de symétrie BB'EE' ;

l'angle aigu $\widehat{M\omega I}$ du triangle rectangle M ω I a pour tangente $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et pour

cosinus $\sqrt{\frac{2}{3}}$; la distance du point M au plan P est donc $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et sa distance à OZ est $\frac{a}{2}$; on retrouve ainsi le point H₂, qui est du reste le

centre du losange IA'B'C' dont le plan est tangent à σ .

Le volume V_0 et l'aire totale S_0 de ce décaèdre particulier Δ_0 vérifient naturellement la relation $V_0 = \frac{R}{3} S_0$, R étant le rayon de σ , et le volume V_1 et l'aire S_1 de σ vérifient également la relation $V_1 = \frac{R}{3} S_1$.

Les deux rapports $\frac{V_0}{V_1}$ et $\frac{S_0}{S_1}$ sont donc égaux et leur valeur commune se calcule facilement ; on trouve ainsi

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{S_0}{S_1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\pi}.$$

Le rapprochement, dans cette formule, des nombres π et $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ dont la différence est inférieure à 0,005, méritait sans doute d'être souligné ;

c'est pourquoi la comparaison de ce rapport et du nombre $\frac{3}{2}$ a été proposée à la fin du problème ; il s'agissait d'un calcul numérique bien simple, qui permettait d'obtenir, par deux opérations de division, l'encadrement de l'erreur commise en remplaçant ce rapport par $\frac{3}{2}$ entre les deux nombres

$$0,0021 \text{ et } 0,0023$$

Il n'était pas nécessaire, bien entendu, de connaître la « théorie des erreurs » pour traiter cette petite question.

La dernière partie du problème n'a été abordée que par une quarantaine de candidats, dont la plupart n'ont donné que quelques indications assez sommaires sur la sphère σ sans toucher valablement à la détermination des décaèdres Δ circonscriptibles à une sphère. Seules, une quinzaine de copies contiennent des éléments plus ou moins complets de la solution, les essais géométriques étant sensiblement plus nombreux que les essais algébriques. La question du rapport du volume à l'aire totale d'un décaèdre circonscrit a été traitée correctement dans six compositions, — ce qui n'est pas mal, — pour la fin d'une longue épreuve.

Dans l'ensemble, le problème comportait une importante partie algébrique, liée intimément aux questions de géométrie, et qui ne présentait pas de difficultés « techniques » particulières ; l'essentiel était d'avoir compris correctement les notions fondamentales, et de savoir conduire posément et raisonnablement un calcul, d'en assurer fréquemment le contrôle ainsi que l'interprétation géométrique. Le jugement de l'épreuve ne peut guère faire intervenir une distinction entre « algébristes » et « géomètres », distinction bien factice du reste, car algèbre et géométrie exigent les mêmes qualités d'esprit et d'initiative, les mêmes efforts de réflexion et d'imagination, pour qui tente de pénétrer assez avant, et convenablement, dans leur domaine.

Cent quarante-neuf candidats ont pris part au concours ; après double correction de chacune des compositions, un premier choix a été effectué et a permis de retenir trente-trois copies qui ont été revues en détail par tous les membres du jury.

Il serait assez vain de chercher à présenter une image valable de la physionomie du Concours en dressant une liste par ordre de mérite, établie en attribuant une note à chaque composition. Un tel tableau risquerait fort, du reste, de paraître décourageant pour celui qui en prendrait connaissance sans information préalable, et qui serait tenté de croire que les indications « chiffrées » décèlent une sorte de vérité absolue. Or, dans une épreuve de ce genre, tout à fait inhabituelle pour des jeunes gens dont la formation intellectuelle et scientifique n'est pas encore achevée, le comportement des candidats est fonction d'éléments très divers, et leurs connaissances mathématiques, qu'il s'agisse des faits, des idées, des méthodes, sont bien loin d'être seules en cause.

Cinq heures de travail continu, — la prise de contact avec un sujet assez complexe dont on ne saisira que progressivement la signification et la structure, quelles que soient les précautions prises dans le libellé de l'énoncé, — l'effort prolongé de réflexion qu'exigent la mise au point des résultats peu à peu acquis et leur coordination, indispensable pour aller de l'avant, — les qualités d'organisation que suppose la présentation en bonne forme d'une solution lentement ébauchée et dont la rédaction fait fréquemment apparaître quelque nouvelle perspective, d'abord inaperçue, suggérant d'autres voies possibles que l'on n'aura peut-être pas le temps d'explorer... : voilà, entre autres, quelques données, dans l'ordre matériel et dans l'ordre psychologique, qu'il ne faut pas oublier de prendre en considération pour apprécier la valeur des jugements portés sur les compositions du Concours général de Première. Que certains bons esprits, estimés comme tels, pour de sérieuses raisons, par ceux qui les connaissent, ne répondent point à l'attente de leurs maîtres, cela n'a rien de très surprenant et ne prouve rien quant à leur valeur intellectuelle. Il serait du reste intéressant de chercher à analyser avec soin les réactions de quelques candidats — de candidats choisis valablement, bien entendu — au cours de leur travail, et de tenter de déceler les difficultés de tous ordres qui ont pu gêner l'un ou arrêter l'autre à tel ou tel moment ; sans doute une

enquête de ce genre, menée par les professeurs auprès de ceux qu'ils ont désignés, pourrait fournir des renseignements fort utiles, soit qu'ils permettent à un élève de prendre conscience de certaines qualités, ou de certains défauts, soit qu'ils aient une valeur générale et qu'ils puissent ainsi constituer un thème de réflexion, nouveau ou renouvelé, dans le domaine sans limites de la pédagogie.

Pour donner de ce Concours une idée d'ensemble, il convient d'indiquer d'abord qu'une vingtaine de compositions ont paru à peu près complètement nulles, soit que l'on n'y trouve que de rares résultats insignifiants, soit qu'elles contiennent des erreurs graves portant sur les faits fondamentaux. Vient ensuite une masse importante, de quatre-vingt-dix copies environ, qui, si on voulait les coter dans l'absolu, en tenant compte de la totalité du problème, n'auraient guère obtenu que des notes comprises entre 2 et 6 sur 20, mais la plupart d'entre elles donnent sur tel ou tel point des parties de solutions correctes, parfois très convenables, permettant de penser que leurs auteurs se seraient fort honorablement comportés dans une épreuve de durée et de dimensions plus modestes. La quarantaine de compositions restantes forment le lot où se révèlent, avec des inégalités inévitables, à la fois des connaissances sérieuses, en général correctement assimilées, et certaines qualités d'esprit déjà affirmées. Les trente-trois copies retenues après une première sélection avaient toutes abordé valablement les deux premières parties du problème, et plus de la moitié d'entre elles la troisième partie ; le barème adopté pour l'appréciation finale correspondait à l'attribution des coefficients 1,2 et 2 respectivement pour les trois groupes de questions : algèbre, étude géométrique des décaèdres Δ et propriété de minimum, étude des décaèdres Δ circonscrits à une sphère. Le classement a placé en tête, nettement détachés, deux candidats que le jury n'a pas cru devoir séparer, bien que leurs compositions soient fort dissimilables, — l'une, très bien présentée, « agréable à lire », donnant une solution presque achevée pour des questions parmi les plus importantes et les plus délicates, mais avec des lacunes notamment à la fin des deuxième et troisième parties, — l'autre, plus complète, apportant des réponses convenables sur presque tous les points, mais moins fouillée dans le détail que la précédente, et manifestant parfois des fautes ou des insuffisances de fond et de forme ; ils ont été proposés tous deux pour un premier prix *ex-æquo*. Un troisième prix a été attribué à un candidat dont la copie, comparable aux deux premières pour plusieurs questions, était nettement moins complète. Cinq autres compositions, un peu moins bonnes que les précédentes, mais encore très satisfaisantes, ont été jugées dignes d'une récompense : un premier et un deuxième accessits, décernés à des travaux assez différents dans le détail, mais donnant, dans l'ensemble, l'impression de valeurs très voisines, et un triple troisième accessit accordé pour trois copies convenables, soit par un ensemble suffisant de résultats correctement établis, soit par le « fini » de quelques parties de la solution.

Pour donner, toujours avec les réserves déjà signalées, une appréciation chiffrée, sur 20, compte tenu de toutes les parties du problème, dont aucune

n'a été totalement laissée de côté, si l'on considère l'ensemble des compositions, les notes des huit lauréats peuvent se situer ainsi : 14,5 pour les deux premiers, 12 pour le troisième, 11,5 et 11 pour le premier et le second accessits, et 10,5 pour les trois accessits *ex-æquo*.

Quant aux vingt-cinq copies sélectionnées lors d'une première délibération et non retenues pour le palmarès, leurs notes s'échelonnaient entre 9,5 et 6 environ, avec un groupe assez compact de cinq, arrivant très près de la moyenne (9,5), puis quatre que l'on peut coter 9 ou 8,5, puis une dizaine entre 8 et 7 et le reste entre 7 et 6.

L'impression générale que l'on peut dégager des résultats de cette épreuve est donc satisfaisante ; elle est très comparable à celle que laissait le Concours de l'an dernier, malgré la différence assez marquée entre les types de problèmes proposés en 1950 et en 1951. S'agissant d'une épreuve qui ne doit pas et qui ne peut pas être vraiment « préparée », et qui demande, non d'avoir acquis, en classe ou hors de la classe, un certain vernis d'érudition, mais seulement des connaissances de base bien assimilées et effectivement « disponibles », cette appréciation favorable qui tient compte de l'ensemble des compositions, constitue une indication précieuse sur la qualité de l'enseignement d'initiation aux mathématiques donné dans nos établissements secondaires, y compris les Ecoles normales, — et sur la contribution de valeur qu'il apporte à l'œuvre de formation intellectuelle des jeunes gens qui le reçoivent.

A titre purement documentaire et anecdotique, j'ajouterai quelques remarques sur les lauréats et sur quelques-uns de leurs camarades ; elles ne comportent naturellement aucune conclusion et ne prétendent point fournir les éléments de je ne sais quelles comparaisons qu'il serait parfaitement ridicule d'instituer ; elles n'ont d'ailleurs aucune valeur dans l'ordre des « statistiques », car elles portent sur une « population » restreinte, sélectionnée et localisée ici ou là par l'effet de circonstances fortuites qui n'ont guère de rapports avec les événements de la vie scolaire. Un fait est digne d'être noté d'abord, pour l'histoire du Concours : une jeune fille figure au palmarès, pour la première fois depuis qu'a été rétablie, en 1946, l'épreuve de mathématiques pour les classes de Première ; Mlle Vannaële mérite d'autant plus cette mention spéciale qu'elle était, au lycée de jeunes filles de Montpellier, élève de Première A-B, et qu'elle a obtenu en même temps le premier prix d'italien au Concours général. Puis, un hasard assez curieux fait que les résidences scolaires des huit lauréats sont toutes situées à une latitude au plus égale à celle de Paris : Paris (deux fois), Lyon, Grenoble, Montpellier, Perpignan, Alger, Rabat ; on trouve d'ailleurs une très forte proportion de Parisiens dans le groupe d'une dizaine de candidats qui suivent de près les derniers cités. On peut aussi signaler que, sauf Mlle Vannaële, les lauréats étaient élèves de Première C (deux prix et trois accessits) et de Première Moderne (un prix et un accessit). Et il n'est pas sans intérêt d'établir une liaison avec la classe voisine : comme l'année dernière, au palmarès du Concours général pour les classes de Mathématiques en 1951 figurent en très bonne place (parmi les prix et les pre-

miers accessits), tant pour la composition de mathématiques que pour celle de sciences physiques, les noms de lauréats de l'épreuve de mathématiques de Première en 1950 : MM. Froissart, du Lycée Louis-le-Grand, Florent et Barra, tous deux du Lycée Thiers à Marseille, et Sajus, du Lycée de Pau.

J. DESFORGE,

Inspecteur général de l'Enseignement du Second Degré.

II. Réunion du Comité

Séance du 14 July 1951

Nouveaux Baccalauréats. — Il est rendu compte au Comité des efforts déployés par le Bureau et les membres du C.E.S.D. pour obtenir un horaire plus substantiel en Sciences Economiques deuxième partie. Il semble que l'horaire pourrait être de quatre heures et demie au lieu de quatre. Cet horaire plus normal et presque suffisant a été accepté par M. l'Inspecteur général DESFORGE à une réunion de Commission groupant les représentants des mathématiciens et des linguistes.

Baccalauréats actuels. — Les professeurs de philosophie réclamaient un horaire de quatre heures en Mathématiques Élémentaires pour avoir le temps d'exposer le programme nouveau qu'ils venaient de mettre au point. Devant l'hostilité des Inspecteurs généraux et de tous les professeurs de Sciences, ils finirent par renoncer à ces exorbitantes prétentions.

Publication des textes de Baccalauréat. — M. CAGNAC et Mlle PROTIN insistent sur la nécessité de publier les questions de cours. M. CAGNAC demande aussi la reproduction des figures parfois jointes aux textes. Le Président proteste que cela entraînerait des frais excessifs.

Vœu de l'Assemblée générale sur les textes de Baccalauréat. — Il sera signé par les membres du personnel appartenant au C.E.S.D. M. CANONGE le défendra au Conseil Supérieur de l'Education Nationale.

Classes préparatoires aux Ecoles Normales Supérieures. — M. CHAZAL signale que la modification du programme des classes préparant à Saint-Cloud permettra aux élèves de cette école de passer l'Agrégation plus rapidement que ne peuvent en général le faire les élèves de la rue d'Ulm.

Vœu concernant le Baccalauréat

(Séance du 7 Février 1952)

L'attention du Comité a été attirée sur le cas de certains candidats au Baccalauréat de Mathématiques (session d'octobre), déjà titulaires d'un Baccalauréat de Philosophie ou Sciences Expérimentales (session de juillet), qui se présentent à l'examen sans avoir fait l'effort supplémentaire

nécessaire, et escomptent, avec un peu de chance, obtenir « à moindres frais » un titre qui pourrait leur donner quelques avantages dans certains concours.

Le Comité, unanime, décide en conséquence, de *conseiller vivement à tous les examinateurs de se montrer très exigeants envers ces candidats, et de les interroger plus spécialement sur les parties du programme non communes aux diverses sections de la seconde partie du Baccalauréat.*

III. Conseil supérieur de l'Education nationale

(Extrait du procès-verbal de la séance du 4 juillet 1951)

M. SARRAILH, *Président*. — Vous savez que, cette année, on a pu constater que dans les divers sujets qui ont été proposés en mathématiques dans les diverses Facultés de France, d'Espagne ou du Portugal (puisque cela dépend de nous), il s'est glissé quelques erreurs dans l'énoncé. Alors le C.E.S.D. nous propose le vœu suivant :

« Le Conseil Supérieur de l'Education Nationale, constatant la fréquence des doléances émanant, soit des professeurs, soit des candidats au Baccalauréat ou de leurs familles sur la façon dont on formulait ou reproduisait les textes des sujets des épreuves écrites notamment en mathématiques, et récemment encore, malgré la circulaire parue le 7 juin au B.O. de l'Education Nationale,

« exprime le vœu que, sans porter atteinte à l'organisation actuelle du Baccalauréat, soient constituées, sous la direction du Recteur de chaque Académie, des Commissions où des professeurs du Second Degré, éventuellement des collègues techniques enseignant dans les classes préparatoires au Baccalauréat et des Ecoles normales (m'a demandé d'ajouter M. GUEHENNO), soient associés à leurs collègues de l'Enseignement Supérieur pour : 1° constater si les textes choisis sont conformes aux programmes et aux instructions ; 2° effectuer, le cas échéant, la correction matérielle des textes jusque et y compris les épreuves d'imprimerie. »

M. Jean BAYET. — Je m'excuse de prendre encore une fois la parole, mais en ce qui concerne la correction des épreuves du Baccalauréat, le projet, tel qu'il est présenté devant vous, ne donne pas satisfaction à l'Enseignement Supérieur à cause des risques de diffusion qui vont être multipliés avec des procédés de cet ordre-là... On constatera, je crois, qu'il est du plus grand danger que les épreuves, une fois imprimées, circulent entre plusieurs mains.

M. MONOD. — Je souhaiterais qu'un vœu de ce genre soit renvoyé à une Commission que vous pourriez nommer lors du prochain Conseil Supérieur

dans laquelle serait étudié l'ensemble de la réforme du Baccalauréat qui serait nécessaire si nous voulons maintenir l'Enseignement Secondaire dans ses traditions anciennes.

M. BAYET. — Je m'associe aux paroles de M. le Directeur Général.

M. CAMPAN. — Les représentants du Second Degré s'associent à ce que vient de dire M. le Directeur.

M. DONZELOT. — J'ai eu cette année l'écho de deux ou trois réclamations dans deux ou trois centres ; dans l'un des centres — et c'est celui qui est visé là — il s'agit d'une épreuve de mathématiques donnée, à Besançon exactement, cette épreuve a été donnée par quelqu'un, je ne dirai pas qui, je n'exciperais pas de sa qualité de membre de l'Institut pour dire que c'est quelqu'un de très bien, c'est peut-être une condition, elle n'est ni nécessaire, ni suffisante... une erreur sur 6 ou 700 sujets ne me paraît pas de taille à exiger une discussion...

Donc aucun système n'est parfait et nous n'arriverons pas à donner des sujets qui n'appellent pas de réclamations.

M. CANONGE. — Je m'excuse très vivement, mais ce n'est pas d'une erreur dont il s'agit, et pour l'année 1950, j'ai un dossier de 50 erreurs ou coquilles.

M. DONZELOT. — Je les ai regardées d'assez près et un certain nombre d'entre elles ne peuvent pas constituer des erreurs absolues.

M. CANONGE. — Ce sont des questions de corrections matérielles au dernier moment ou de révision des épreuves d'imprimerie. J'ai là une copie à la ronéo, il manque un gamma, tout simplement parce que la machine à écrire ne possédait pas le signe du gamma.

M. DONZELOT. — J'en suis responsable.

M. CANONGE. — Le texte n'a pas été revu sur le stencil. Ce sont des choses qui se produisent comme cela, chaque année j'ai des réclamations de professeurs de mathématiques, il est bien entendu qu'il n'y a là rigoureusement rien contre l'Enseignement Supérieur, ni contre ceux qui ont donné les sujets, mais nous voulons qu'il y ait une correction au dernier moment.

M. DONZELOT. — Je vous demande de faire la courbe des erreurs de l'année dernière et des erreurs sérieuses de cette année, si elle n'est pas tombée avec une forte pente j'en serais surpris et l'an prochain on tâchera de faire mieux encore.

M. CANONGE. — En tout cas, nous nous associons à ce vœu.

M. CAMPAN. — Je crois que la Commission dont parlait M. MONOD tout à l'heure pourrait peut-être étudier cette question, c'est une question de coordination. Je crois qu'on pourrait donner une solution qui serait satisfaisante pour tout le monde.

M. DONZELOT. — Il y a le Baccalauréat de Paris et il y a le Baccalauréat de province et ce sont des problèmes différents.

M. LACROIX. — Je m'associe à ce qu'a dit M. BAYET, il faut éviter que tout le monde soit au courant, mais ne pourrait-on pas décider que la correction des épreuves sera faite par deux personnes ?

M. BAYET. — Les risques sont énormes. Un doyen est responsable et un professeur de l'Enseignement Supérieur qui fait une erreur est justiciable de son doyen, un professeur de l'Enseignement Secondaire, non.

M. LACROIX. — Je ne demande pas que le correcteur appartienne à l'Enseignement Secondaire, je demande simplement, pour éviter tous risques d'erreurs, qu'il y ait double correction de l'épreuve, je ne demande pas que ce soit dans le règlement, mais cela pourrait être une garantie.

M. BAYET. — A Paris, personne d'entre vous ne corrige d'épreuves, cela va à l'Office du Baccalauréat.

M. DONZELOT. — Je me propose de faire une circulaire dès que j'aurai rassemblé les incidents de cette session pour mettre le doigt des doyens sur les difficultés et leur dire : Attention à tel point et à tel autre, mais cette double correction que M. LACROIX envisageait est faite dans les trois quarts des cas à la suite de la circulaire que j'ai envoyée en juin. Je suis décidé à y veiller de près et à tenir la main assez fermement pour éviter le retour de ces incidents ; le chiffre de 50 erreurs que citait notre collègue est exagéré, mettons 25, mais 25 c'est encore trop.

M. SARRAILH, *Président*. — Je ne crois pas que la solution soit dans la Commission. Le doyen doit prendre des mesures pour éviter les erreurs ; à Paris, c'est un cas exceptionnel ; dans les Universités de province, il n'y a pas beaucoup de réclamations, parce que précisément dans les Universités de province on travaille à une échelle moindre et les doyens ont le temps de réviser ou de faire réviser les épreuves qui ont été proposées par d'autres. Je crois qu'il faut envoyer ce vœu à une Commission faite de membres de l'Enseignement Supérieur et de l'Enseignement Secondaire.

M. PROBETTA. — ...Il est certain que quand un doyen choisit entre cinq ou six sujets, la meilleure façon d'éviter des erreurs, c'est de prier l'auteur du sujet de prendre la responsabilité de son sujet jusqu'au bout, et de corriger les épreuves ; il n'y a que cela...

Mlle COURTIN. — Quand on est l'auteur du sujet, on ne voit justement pas l'erreur s'il y en a une, parce qu'on a trop le sujet dans la tête.

M. SARRAILH, *Président*. — Alors, le vœu est renvoyé à la Section de l'Enseignement du Second Degré et à la Section de l'Enseignement Supérieur qui pourront en délibérer en section permanente.

M. LAURE. — Et à la Section de l'Enseignement Technique aussi.

M. SARRAILH, *Président*. — Bien sûr... Excusez-moi, votre Baccalauréat est encore trop jeune pour que je le connaisse à fond.

Erreurs 1951 et Notes fictives

En juillet, en plus du problème proposé à Besançon, il faut noter qu'à Clermont-Ferrand, en 1^{re} AB, il a été proposé aux candidats l'étude d'une fonction homographique complète, ce qui a nécessité, à dix heures du matin, la donnée d'un nouveau texte aux candidats.

En octobre, à Nancy, il a été proposé aux candidats au Baccalauréat de Mathématiques Élémentaires deux questions de cours hors du programme,

l'erreur vient de ce que ces questions sont au programme de Mathématiques et Technique. On peut regretter à cette occasion que M. le Recteur Capelle, qui s'intéresse tant à la date des vacances, n'ait pas commencé par raccourcir les siennes pour vérifier ce qui se passait dans son Académie.

A Bordeaux, l'erreur a été symétrique de celle de Nancy ; nous citons ci-dessous les instructions données aux correcteurs de cette Académie :

« Par suite d'une erreur, il a été proposé aux candidats des questions de cours ne figurant pas au programme. Dans l'établissement de leurs notes, MM. les examinateurs sont priés d'attribuer à la question de cours une *note fictive* déterminée de la façon suivante :

« a) si la note du problème est inférieure à 12 sur 20, la note fictive sera de 6 sur 10 ;

« b) si la note du problème est supérieure à 12 sur 20, la note fictive sera égale à la note sur 20 du problème. »

H. POCHARD.

IV. Activité des Régionales

Coordination des enseignements des Lettres

et des Mathématiques à la Régionale de Nancy

Le jeudi 29 novembre, M. GLAESER a donné brillamment, en présence de professeurs de lettres et de philosophie, des réflexions sur la coordination de l'enseignement des lettres et des mathématiques. Elles suscitèrent d'heureuses réactions chez les collègues présents.

En mathématiques, nous avons besoin d'un vocabulaire précis et c'est au professeur de cette spécialité qu'il appartient de donner les définitions techniques, mais le professeur de français doit-il, de son côté, laisser toujours confondre : beaucoup et infinité, sens et direction, constant et uniforme, ligne et droite, mouvement et déplacement, etc...

Quand il s'agit positivement de définir un mot, c'est pour l'enfant un effort souvent ingrat. Définir un lycée est une tâche laborieuse pour des élèves de Cinquième. Là encore, l'habileté à définir, si elle est exercée en français concurremment aux classes de Mathématiques, fera progresser l'une et l'autre. L'orthographe de ces mots, éclairée par l'étymologie, serait aussi une tâche intéressante du professeur de français : hypoténuse, hypothèse...

M. GLAESER demande aussi aux professeurs de lettres, non seulement de s'assurer de la correction des phrases, mais d'être exigeant sur l'exactitude : relation vraie et relation correcte ne vont pas toujours de pair. « L'orange est jaune » est correct, mais pas vrai. La relation « A égale B » pourrait être proposée en analyse grammaticale pour faire voir que A est le sujet et B l'attribut, quoi qu'il en paraisse. L'analyse grammaticale de trois cinquièmes, deux tiers, aiderait à montrer que tiers et cinquième sont

des noms qui ne peuvent être réunis pour former une même collection comme trois chats et deux chiens, mais qu'on peut trouver un autre nom qui permette de les désigner l'un et l'autre : des quinzièmes dans le premier cas, des animaux dans le second. La traduction en langue étrangère ou en latin permet parfois de rectifier des erreurs de conception égarées par le vocabulaire mathématique.

Le concept d'identité et d'équivalence doit recevoir en français et en mathématiques des soins qui se conjuguent et s'étayent. Les traductions d'un même texte peuvent être équivalentes sans être identiques. Deux phrases : X. fut empereur des Français, et X. prit le pouvoir en France après un coup d'Etat, le 2 décembre, sont deux phrases qui reçoivent les mêmes solutions, donc donnent une désignation équivalente à l'inconnue X, tout comme il en est de l'inconnue dans deux systèmes d'équation équivalents.

Il y aurait aussi beaucoup à dire sur la nécessité et la suffisance d'une certaine qualité, sur les réciproques et les contraires, sur le « ou » disjonctif ou non qui, en français comme en mathématiques, présente ces deux aspects qui sont plus que des nuances. « Le lièvre est-il mort ou vivant. » « Donnez-moi l'un ou l'autre » ; de même : les racines de $x^2 = 4$ sont ± 2 et $\sqrt{a^2}$ est $-a$ ou $+a$. Le mot « ou » n'a pas le même sens dans les deux cas.

En contre-partie, les professeurs de français et ceux de philosophie — c'est trop évident — rencontrent les mathématiques dans les textes qu'ils expliquent. Il est souhaitable de ne pas entendre dire : « Pascal s'intéressa au calcul des probabilités, il a en effet publié un traité sur la roulette », confondant le jeu d'argent et la cycloïde. Ne serait-il pas sage, pour le littéraire de s'assurer parfois le contrôle d'un spécialiste quand il s'aventure sur son domaine. Ce serait l'occasion d'une collaboration de bon aloi. Faire traduire le texte de Ciceron sur la propriété de la sphère inscrite dans un cylindre qui immortalisa Archimède serait plein d'intérêt pour les élèves de Première.

M. GLAESER termina en souhaitant qu'une collaboration de ce genre s'établisse qui pourrait commencer par l'établissement d'une liste des mots litigieux à ne pas employer à tort et à travers pour aller à la recherche de textes choisis, etc..., collaboration ouverte et connue des élèves pour faire tomber la cloison étanche qu'ils mettent entre les diverses disciplines... et qui ne sont pas, la plupart du temps, le seul fait des élèves...

R. MOUGENOT

DEUXIÈME PARTIE

Sur l'introduction et l'utilisation des droites focales en géométrie élémentaire

Résumé de la conférence de M. l'Inspecteur général DONTOT, faite au cours des Journées d'information franco-belges au Centre International d'Etudes Pédagogiques de Sèvres, le 24 novembre 1951.

M. l'Inspecteur général DONTOT expose brièvement — en une heure — le plan, avec quelques détails, d'un ouvrage destiné aux élèves des classes de Mathématiques Élémentaires et de Mathématiques Supérieures, qu'il se propose de publier. Son objet est d'abord de définir quelles sont les propriétés des droites focales qu'il est souhaitable d'introduire dans l'enseignement de la géométrie en classe de Mathématiques Élémentaires, ensuite d'examiner s'il est possible, comme le désirait M. LEBESGUE, de substituer à l'exposé traditionnel de la théorie des coniques un exposé plus rationnel en utilisant la perspective et les propriétés des droites focales. Un tel exposé ne semble, dans l'état actuel de l'Enseignement du Second Degré, à sa place qu'au début de la classe de Mathématiques Supérieures.

I. INTRODUCTION DES DROITES FOCALES EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE. — Il semble bien que la notion de droite focale puisse être dégagée très simplement de l'étude d'un faisceau linéaire de sphères. Nous laissons au lecteur le soin de faire une épure. Soit $a'b'$ la projection frontale d'un cercle (O) dont le plan est de bout ; soient (o, o') le centre de ce cercle, (os, o's') son axe, R son rayon. Une sphère (S) du faisceau linéaire de sphères contenant le cercle (O) est définie par son centre S (s, s'), point quelconque de l'axe du cercle (O). On notera que le cercle (O) étant donné, le plan horizontal de projection peut être arbitrairement choisi et que, par conséquent, la direction des verticales de l'épure est quelconque.

Les sphères (S) sont, sur l'épure, définies par leurs contours apparents frontaux, les cercles (S') d'un faisceau linéaire à points fixes a', b' . La similitude (Σ), par laquelle le vecteur $\overrightarrow{o's'}$ est transformé en $\overrightarrow{os}$ est une similitude fixe ; les transformés des cercles (S') par cette similitude sont des cercles passant par deux points fixes α, β . Soit (D) la verticale dont la projection horizontale est α ; la distance du centre S à la droite (D) est $s\alpha$. Soit ρ le rayon de la sphère (S) et θ l'angle des verticales et du plan du cercle ; nous avons $s\alpha = \rho \cos \theta$ et $o\alpha = R \cos \theta$. Il en résulte que :

1° le rayon d'une sphère (S) du faisceau est proportionnel à la distance de son centre à la droite (D) ;

2° la sphère (S) coupe la droite (D) sous un angle θ constant.

Cette dernière propriété, moins utile, mais plus spectaculaire que la première, introduit la notion de droites privilégiées — nous les appellerons focales du cercle (O) sans expliquer l'origine de cette dénomination —

qui coupent les sphères d'un faisceau linéaire dont le cercle de base est le cercle (O) sous un angle constant.

Il existe deux droites focales (au moins) du cercle (O) parallèles à une direction donnée (la direction des verticales) ; elles coupent le plan du cercle (O) en un point H intérieur à ce cercle, sont perpendiculaires au diamètre OH de ce cercle et font avec le plan du cercle un angle θ défini par l'égalité $OH = R \cos \theta$.

Le problème : existe-t-il une ou plusieurs sphères passant par un cercle (O) et coupant une droite donnée sous un angle φ donné ? peut être résolu très simplement en utilisant l'épure précédente. Il est très instructif ; il permet de démontrer que les droites focales définies plus haut sont les seules droites qui coupent les sphères (S) sous un même angle pour une droite focale donnée et que s'il existe une sphère (S) coupant une droite, non focale du cercle (O), sous un angle φ , il en existe une seconde (S_1) généralement distincte de la première et que les *sphères bissectrices* de (S) et de (S_1) sont des sphères fixes.

II. ÉTUDE (EN MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES) DES PROPRIÉTÉS ANGULAIRES ET MÉTRIQUES DE LA FIGURE FORMÉE PAR UN CERCLE (O) ET UNE DROITE FOCALE (D) DE CE CERCLE. — Les propriétés dont il s'agit ici sont celles qui ont été signalées par M. l'Inspecteur Général ROBERT, dans un remarquable article de *l'Enseignement Scientifique*, en 1928 ; elles se déduisent aisément d'une propriété des droites focales qui semble n'avoir pas, jusqu'ici, retenu l'attention des chercheurs.

La figure ci-contre (I) est une figure plane tracée dans le plan du cercle (O), de rayon R. Une droite focale AS perce le plan en A et se projette sur lui orthogonalement suivant As perpendiculaire à OA ; elle fait avec le plan du dessin un angle θ , tel que $OA = R \cos \theta$. S est un point quelconque sur la droite focale AS, mais fixe.

Soit ω le pied sur l'hypoténuse Os de la hauteur du triangle rectangle OAs ; il existe une similitude (ω_1) de centre ω et dans laquelle les transformés respectifs de O et A, sont A et s. L'angle de cette similitude est droit.

Soit M un point du cercle (O), S_1 son transformé par la similitude (ω_1). Constatons que sS_1 , transformée de AM, lui est perpendiculaire et que l'on a

$$a \quad \frac{AS_1}{As} = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \text{c'est-à-dire } AS_1 = AS.$$

Il en résulte que :

le transformé de M par la similitude (ω_1) est le transformé du point fixe S dans l'un ou l'autre des rabattements du plan SAM autour de AM sur le plan du cercle (O).

Les propriétés les plus classiques des plans passant par une droite focale se déduisent sans nouvelle démonstration de la précédente. Observons seulement que AS_1 , transformé de OM, est parallèle à la tangente MT au

cercle (O) ; les angles S_1Ax , TMx sont donc égaux ; donc, les angles (aigus) qu'une droite variable AM fait avec le cercle (O) et avec la droite focale AS sont égaux.

Observons encore que l'angle de AS_1 avec le plan SAM est égal à l'angle de AS avec le plan du cercle (O) (tout rabatement est une symétrie droite) ; il est donc constant. Or, AS_1 est parallèle à MT, donc, l'angle sous lequel un plan variable SAM passant par la droite focale AS coupe le cercle (O) est constant et a pour mesure θ .

Enfin, soit (Δ) la polaire de A par rapport au cercle (O) ; soient AK la distance de A à MT, polaire de M et MH la distance de M à (Δ) . Nous avons : $\frac{AK}{MH} = \frac{OA}{OM} = \cos \theta$.

La distance du point M à la droite focale AS est égale à la distance de M à son rabatement AS_1 , donc est égale à AK.

Le rapport des distances d'un point M du cercle (O) à une droite focale AS et à la droite associée, polaire du pied A de la droite focale, est une constante égale à $\cos \theta$.

Par S, il passe deux droites focales du cercle (O) dont les pieds A et B sont symétriques par rapport à (ω) ; il existe donc une seconde similitude (ω_2) , de centre ω , dans laquelle B et s sont les transformés de O et B. L'homologue S_2 de M dans cette similitude est le second transformé de S par un des deux rabattements du plan SAM déjà signalés, S_1 étant le premier.

L'examen de la figure ci-contre conduit à constater que l'on a :

$$\begin{aligned} \widehat{AS_1M} + \widehat{BS_2M} &= \widehat{TMS_1} + \widehat{TMS_2}, \\ &= \pi - \widehat{S_1MS_2}, \\ &= \widehat{AsB}. \end{aligned}$$

C'est un théorème de Chasles.

La somme des angles que fait la génératrice SM d'un demi-cône à base circulaire avec les demi-droites SA, SB est constante.

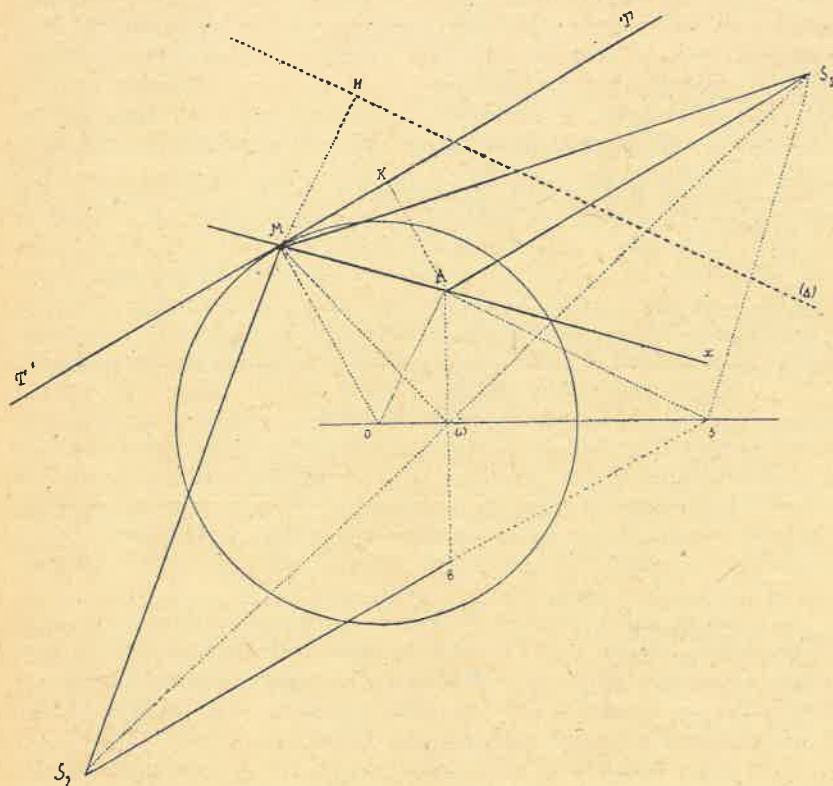
La génératrice SM du demi-cône joint le sommet S à un point M du cercle de base ; SA, SB, sont les droites focales passant par S du cercle de base, A et B leurs pieds sur le plan du cercle.

III. CONSÉQUENCES DE CETTE ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE. — Nous nous sommes naturellement bornés, dans les paragraphes précédents, à donner un schéma des démonstrations ; ceci suffit pour se rendre compte de leur simplicité et de la façon dont elles s'offrent naturellement au chercheur. Il est regrettable que les propriétés qu'elles permettent de découvrir soient séduisantes, mais inutiles pour l'étude des coniques, parce que non projectives.

Les deux dernières de ces propriétés sont, en réalité, des propriétés des cônes obliques à bases circulaires. Il est possible, en démontrant préalablement quelques réciproques délicates, de définir un cône à base circulaire, soit comme le lieu des points dont le rapport des distances à une

droite focale SA et à son plan polaire par rapport au cône (défini par S et la polaire Δ de A) est constant, soit comme le lieu des demi-droites SM dont la somme des angles avec deux demi-droites SA , SB est constante.

Les droites focales sont déjà familières à un public étendu d'élèves et de professeurs ; elles sont utilisées, sans être officiellement nommées, dans de nombreux problèmes ; il paraît certain qu'une étude élémentaire des droites focales figurera un jour prochain au programme de la classe de



Mathématiques Élémentaires. Mais cette étude ne conduisant pas à celle des coniques, mais à celle des cônes à bases circulaires, la conséquence logique de cette introduction sera de *remplacer l'étude traditionnelle des coniques par celle des cônes à bases circulaires*, ce qui ne bouleverserait qu'en apparence les habitudes prises. Car, l'étude des cônes à bases circulaires se fait dans l'espace, par des procédés identiques à ceux qui sont utilisés dans l'étude traditionnelle des coniques dans le plan. Elle peut paraître à des débutants moins aisée que l'étude des coniques, parce qu'il est plus difficile d'illustrer les raisonnements par des figures dans la géométrie de l'espace que dans la géométrie plane. Mais il ne s'agit que d'une apparence ; l'étude

des cônes à bases circulaires est en réalité bien plus simple que celle des coniques. D'abord, parce que les deux propriétés caractéristiques d'un cône, l'une métrique, l'autre angulaire, énoncées plus haut, sont offertes avec la définition du cône à base circulaire et même la précèdent ; la question de leur équivalence ne se pose pas. Ensuite, parce qu'il n'y a qu'un seul genre de cône à base circulaire, alors qu'il y a trois genres de coniques. Enfin, parce que certains problèmes, qu'il est d'usage de résoudre avec des coniques, ont un caractère artificiel qui nous échappe, parce que nous sommes habitués à eux et que ce caractère nous apparaît dès qu'on cherche leur équivalent pour le cône ; d'autres, au contraire, paraissent plus naturels, telle, par exemple, la propriété énoncée pour les coniques sous le nom de théorème de Poncelet. Ce changement de programme serait une occasion d'effectuer un tri dans des théories trop anciennes et un peu poussiéreuses.

IV. DÉFINITION ET ÉTUDE DES CONIQUES. — M. LEBESGUE, dans son ouvrage sur les coniques (Gauthier-Villars, 1942), après avoir signalé le caractère arbitraire et disparate des définitions des trois coniques, rappelle que toute étude des coniques a toujours été celle d'une transformée homographique de cercle. Nous nous proposons donc, comme nous y a invités expressément l'illustre mathématicien, de reprendre l'étude des coniques à partir d'une définition projective en utilisant la notion de droite focale.

Les coniques seront donc définies comme sections planes de cônes à bases circulaires. Nous admettons que les élèves connaissent la théorie de la perspective d'un plan sur un plan et les définitions de points et droites à l'infini introduites à cette occasion ; nous admettons aussi que l'exposé si contestable, quoique classique, de la théorie des pôles et polaires de mathématiques élémentaires, a été raisonnablement reconstruit de manière qu'apparaisse le caractère projectif de cette théorie ; nous admettons, par conséquent, que l'étude projective des coniques a été faite.

Le problème qui se pose est de donner une définition élémentaire de la droite focale, valable à la fois pour le cercle et les coniques. Il ne peut s'agir, naturellement, que de la définition analytique : une droite focale est une droite par laquelle passent une infinité de plans rectangulaires dont les traces sont conjuguées par rapport à la conique.

Il est assez curieux que cette définition, qui est la vraie définition des droites focales, la seule qui s'étende aux coniques, n'apparaisse à aucun moment dans la première étude élémentaire de ces droites, toute encombrée de propriétés d'angles, curieuses mais non essentielles. Nous avons longuement cherché le chemin logique conduisant des propriétés angulaires précédentes à la définition analytique, sans doute parce qu'il n'y avait aucune difficulté à le découvrir.

Rappelons d'abord un résultat injustement méprisé de géométrie dans l'espace : soient (D) et (Δ) deux droites non coplanaires, d'angle θ , la condition nécessaire et suffisante pour que deux plans définis par (D) et deux points M et M' de (Δ) soient rectangulaires est que la sphère de diamètre MM' coupe (D) sous un angle $(\frac{\pi}{2} - \theta)$, constant par conséquent.

Soient, maintenant, une conique (O), une droite (D) qui perce en A, point intérieur à la conique, le plan de celle-ci; et soit (Δ) la polaire de A. La condition nécessaire et suffisante pour que les plans (P) et (P') passant par (D) et coupant (Δ) en M et M' soient conjugués (aient leurs traces conjuguées) par rapport à la conique (O) est que M, M' soient conjugués par rapport à (O); il faut et il suffit pour cela que la sphère de diamètre MM' passe par un cercle réel (Σ), dont il est aisé de déterminer le plan, le centre et le rayon.

La condition nécessaire et suffisante pour que (D) soit une droite focale de la conique (O) est que tous les couples de plans conjugués (P) et (P') soient rectangulaires (cette définition n'est valable que pour les droites focales non singulières); il faut et il suffit pour cela qu'elle coupe toutes les sphères passant par (Σ) sous le même angle; il faut et il suffit pour cela que (D) soit une des droites focales de (Σ).

Nous sommes donc en possession d'une *définition des droites focales, bonne pour le cercle et qui puisse être étendue aux coniques.*

Nous appellerons droite focale d'une conique toute droite (D) telle que si deux plans passant par la droite (D) sont rectangulaires, ils sont aussi conjugués par rapport à la conique.

Si la réciproque de cette propriété est vraie, la droite (D) est une droite focale non singulière; les droites focales singulières sont les tangentes à la conique.

Nous connaissons un moyen de *construire les droites focales passant par un point A du plan de la conique*; il suffit de construire le cercle (Σ) par lequel passent les sphères de diamètre MM', M et M' étant deux points conjugués sur la polaire de A. Les droites focales de la conique passant par A sont les droites focales de (Σ).

L'auteur de la conférence n'a pu, faute de temps, multiplier les exemples de construction de droites focales; il s'est borné à construire les droites focales d'une ellipse passant par son centre O et à signaler que ces droites focales sont aussi focales de tous les cercles ayant pour centre un point M de l'ellipse, pour plan le plan normal en M et pour rayon la longueur du demi-diamètre conjugué de OM, cercle appartenant à une famille étudiée par M. l'Inspecteur Général ROBERT, le matin même. Il a donné ensuite une démonstration simple d'un théorème essentiel.

Le cône ayant pour base une conique (O) et pour sommet un point S arbitrairement choisi sur une droite focale non singulière de cette conique est un cône à base circulaire.

Ce théorème est essentiel pour la raison suivante: une conique (O_1) est définie comme section plane d'un cône (S) de sommet S à base circulaire (O), les deux droites focales SA, SB de ce cône (S) sont les deux droites focales du cercle (O) passant par S; elles sont aussi deux droites focales de la conique (O_1), mais deux droites focales particulières, celles qui passent par S, point qui n'a pas été choisi arbitrairement.

Ces droites focales particulières de la conique (O_1) jouissent de propriétés fort intéressantes; si M est un point de la conique (O_1), la somme

$\widehat{MSA} + \widehat{MSB}$ a une valeur indépendante de M et le rapport entre la distance de M à une de ces droites focales, SA par exemple, et la distance de M à la polaire par rapport à (O_1) du pied A_1 de SA sur le plan de la conique (O_1) est indépendant de M.

Il est important de savoir si deux droites focales de la conique (O_1) , sécantes, dont une au moins peut être arbitrairement choisie, ainsi que le point S' de concours de ces deux droites S'A', S'B', peuvent remplacer le couple SA, SB dans l'énoncé des propriétés précédentes.

Le théorème précédent montre qu'il en est bien ainsi et, dès lors, le conférencier a pu dire à ce public évidemment averti que le problème de la définition des coniques par les droites focales était pratiquement résolu. Il en a très rapidement donné quelques exemples ; soient (D) une droite focale perpendiculaire en F au plan d'une conique (O), (Δ) la polaire de F par rapport à (O), M un point de la conique, on a $MF = e MH$. Soit (D) une droite focale passant par le centre O d'une ellipse (E) ; la distance de M à (D) est constante ; l'équation de l'ellipse, l'existence de cylindres de révolution passant par une ellipse donnée se déduisent de cette proposition.

Il n'est donc pas absurde de penser que l'étude traditionnelle des coniques dans le plan pourrait être supprimée du programme de la classe de Mathématiques Élémentaires, où elle serait remplacée par celle des cônes à base circulaire. En Mathématiques Supérieures ou en première année de perspective quant à la position radicale prise par notre sympathique collègue. transformation ponctuelle, les propriétés perspectives des coniques, les droites focales, puis les propriétés métriques et angulaires. Le plan des études ainsi modifié est celui que M. LEBESGUE a pressenti et recommandé comme étant le plus satisfaisant du point de vue logique.

La question de Cours au Baccalauréat

Dans le numéro de novembre 1951 du *Bulletin* de l'Association des Professeurs de Mathématiques, l'un de nos collègues, M. ZETTWOG, s'occupe de la question de cours au Baccalauréat, et je ne suis pas sans inquiétude quant à la position radicale prise par notre sympathique collègue.

Il n'est certes que trop facile de donner des exemples de questions de cours mal posées et qui, souvent, de ce fait, sont autant de cas de conscience pour les jurys, mais je me fais fort de critiquer tout autant certains énoncés de problèmes où l'établissement d'un barème soulève des difficultés du même ordre.

Il y a lieu de distinguer d'abord entre les deux parties du Baccalauréat.

Pour la première partie, il est incontestable que le maintien de la question de cours constitue vis-à-vis des candidats un espoir « de ne pas être tous coulés ». Qui se plaindrait de cette disposition psychologique ignorerait ce que représente pour nos jeunes élèves la perspective d'un examen nullement aussi facile que le prétend chaque spécialiste chargé de le faire passer. Ajoutez-y (je le dis sans l'intention de décocher un trait contre

quiconque) que les candidats savent tout aussi bien que nous la difficulté des sujets purement littéraires et surtout l'étroitesse de la cotation, du moins en ce qui concerne les notes supérieures à la moyenne, déplaçant sensiblement le centre de gravité de celle-ci. Sous cette optique, le débat s'élargit singulièrement et laisse entrevoir sa complexité : je ne m'y laisserai pas entraîner.

La question de cours, même donnée sans l'intention d'y camoufler quelque piège réservé pour le problème, exige, pour être exposée d'une manière intelligente, qu'on en pénètre l'esprit, et le moindre cahot du cheminement logique n'échappe pas à la perspicacité d'un examinateur attentif. Elle paye le travail, ce n'est pas un mince mérite ; elle fournit des éléments non négligeables d'appréciation sur l'aptitude à exposer en phrases correctement construites, même s'il ne s'agit que de répéter une chose apprise. Si elle n'autorise pas à elle toute seule à porter un jugement d'ensemble, celui-ci aura autrement de valeur que s'il est uniquement étayé sur la recherche d'un problème le plus souvent limitée à un amas d'essais plus ou moins heureux sous forme inorganique. Ceux d'entre nous qui ont l'habitude des examens à tous les degrés ne me contrediront guère.

On craint le « bachotage » ; je redoute bien plus qu'un exercice bien-faisant de la mémoire ne soit de nouveau sacrifié. Souhaitons qu'une fois au moins dans leur vie les candidats au Baccalauréat aient appris par cœur des définitions, des théorèmes, voire des démonstrations et n'arrivent plus dans les enseignements ultérieurs avec ce mince bagage de connaissances fumeuses et approximatives à base d'empirisme et d'intuitions anarchiques.

En outre, dans ce premier lot de candidats au Baccalauréat — 1^{re} partie — combien poursuivront leurs études mathématiques ? Que leur demander d'autre que la preuve d'un travail suffisant : elle sera fournie par la qualité de la question de cours et par le minimum d'initiative personnelle qu'ils manifesteront dans la recherche du problème. Je me souviens d'un certain problème au niveau de la 1^{re} C, sur une courbe commune à une sphère et à un cône de révolution, connue sous le nom de « fenêtre de Viviani », fenêtre qui n'avait guère éclairé les candidats ; l'énoncé faisait honneur à l'ingéniosité de l'auteur, mais où serait-on allé puiser les éléments d'un jugement en l'absence de la question de cours, je me le suis demandé à l'époque ?

Pour la deuxième partie, la matière même du programme fait en général moins craindre le bachotage et il est facile de juger le candidat à travers ses souvenirs et ses qualités de mémoire sur des nuances de raisonnement qu'une mémoire, même fidèle, mais non doublée de jugement, ne peut guère retenir ou expliquer correctement. Au surplus, l'importance de la note attribuée à la question de cours est limitée.

Si l'on pouvait être sûr que le problème se borne à une enquête intelligente sur les aptitudes et les efforts du candidat on pourrait peut-être à ce niveau envisager la suppression de la question de cours. Mais devant le stock impressionnant des énoncés de problèmes — la chose est regrettable mais inévitable —

ble dans l'état actuel de l'organisation de cet examen, chacun de ceux à qui revient le pensum de la fabrication d'un énoncé, se voit ou se croit obligé d'apporter une note originale (je l'entends pour les gens de métier !). Cette originalité (?) — et j'ai vu des réussites du genre et l'heureux effet compensateur de la question de cours, ne peut que déconcerter des apprentis, qui seront rarement des candidats à l'E.N.S. ou à l'X. Il serait même opportun de voir dans la majorité de ces jeunes une autre clientèle que celle des candidats aux grandes Ecoles scientifiques. Pour ces derniers, on comprend que la mention plus ou moins distinguée dont se pare leur succès puisse avoir une signification : malheureusement, celle-ci ne reflète qu'assez rarement la qualité des épreuves purement scientifiques et n'a nullement le rôle sélectif que certains règlements lui ont donné.

Ramené à un sens plus exact des possibilités des candidats honnêtes, plus riches de leur travail que d'une personnalité encore à naître, le Baccalauréat prendrait peut-être le caractère d'un test intelligemment adapté. Il n'était pas autre chose voici quelques décades, pour qui veut se donner le plaisir d'une comparaison entre les épreuves d'hier et celles d'aujourd'hui : la question de cours y trouvait tout naturellement sa place.

Jean DOLION,

*Professeur de Mathématiques Supérieures
au Lycée Louis-le-Grand.*

Sur les Réciproques

Réponse à l'enquête de M. Pochard

Le vœu que j'exprime à la fin d'un autre article (1) rejoint bien, à mon avis, les préoccupations de notre Président POCHARD en ce qui concerne les réciproques dans la classe de Mathématiques. La phrase citée par notre collègue, due à M. LEBESGUE (*Traité sur les coniques*), et dont la richesse de sens ne saurait être trop soulignée, ne pouvait être mieux choisie en l'occurrence. Cette phrase devrait nous inciter surtout, non pas à demander toujours des suppressions dans le programme de la classe de Mathématiques — on ne fait que ça depuis une vingtaine d'années — mais, au contraire, à stopper ces suppressions en adoptant des modes d'exposition plus fructueux pour traiter plus aisément les questions figurant au programme : ce sera une façon d'alléger ce dernier sans en rien retrancher. Et cet allègement sera d'autant plus sensible que l'on choisira des outils appropriés, quitte même à les introduire dans le programme si l'on constate vraiment que c'est grâce à eux que l'allègement sera obtenu.

On prend souvent beaucoup de mal à établir le théorème de Simson, surtout si l'on tient à avoir une proposition et sa réciproque. Le mal ne serait certainement pas plus grand, mais avec un bénéfice incomparable quant aux résultats, si l'on se proposait, α , β , γ étant les projections orthogonales d'un point P sur trois droites BC, CA, AB formant un triangle

(1) Voir page 189, ligne 15 et suivantes.

ABC, de calculer $(\alpha\beta, \alpha\gamma)$ en fonction de la position de P dans le plan ; un calcul facile conduit à la relation

$$(1) \quad (\alpha\beta, \alpha\gamma) = (PB, PC) + (AC, AB) \text{ mod. } \pi.$$

On est ainsi invité, automatiquement, à chercher, non pas seulement le lieu des points P donnant des points α, β, γ alignés, mais le lieu des points P donnant à $(\alpha\beta, \alpha\gamma)$ une valeur donnée (à $k\pi$ près) ; en considérant cette valeur comme un paramètre, on obtient ainsi tous les cercles d'un faisceau du premier genre à points de base B et C, dont fait naturellement partie le cercle circonscrit à ABC (d'où le théorème de Simson) et dont l'axe radical correspond à la valeur (AC, AB) de $(\alpha\beta, \alpha\gamma)$. Les cercles de ce faisceau sont en quelque sorte les courbes de niveau d'un champ de vecteurs dont la fonction de forces serait (PB, PC) à $k\pi$ près : on peut l'unifier en convenant de prendre le (PB, PC) dont la grandeur est un angle aigu.

Il est bien évident que, la relation (1) étant trouvée, les deux relations analogues ne pourront échapper à l'attention de l'élève : d'où de nouvelles questions, telles que le lieu des points P donnant chacun un triangle $\alpha\beta\gamma$ rectangle (on trouve les trois cercles orthogonaux au cercle ABC passant respectivement par les couples de points BC, CA, AB), le lieu des points P donnant chacun un triangle $\alpha\beta\gamma$ isocèle (on trouve, en général, les trois cercles d'Apollonius du triangle ABC), les points P donnant chacun un triangle $\alpha\beta\gamma$ équilatéral (on trouve les deux points communs aux trois cercles d'Apollonius, ce qui oblige à une étude poussée de ces cercles et de leurs dégénérescences), etc., etc...

Autre exemple. On ne prendrait pas plus de mal, au lieu de chercher le lieu des points P tels que $\alpha PA^2 + \beta PB^2 = k$ (α, β, k : nombres algébriques donnés), à étudier la quantité $\alpha PA^2 + \beta PB^2$ suivant la position du point P dans le plan : ceci donnera, non seulement ledit lieu, mais aussi des questions de maximum ou de minimum, un champ de vecteurs, etc... ; l'étude envisagée est donc payante et c'est là l'essentiel. Si l'on veut éviter la relation de Stewart, qui permet difficilement une extension à plus de deux points fixes, le recours au produit scalaire s'impose (tant pis si ledit produit ne figure pas au programme). On fait assez facilement comprendre à l'élève que l'introduction d'un point jouant le même rôle vis-à-vis des couples (A, α) , (B, β) apportera certainement une simplification à l'étude

proposée, tout comme le nombre $-\frac{b}{2a}$ dans l'étude du trinôme $ax^2 + bx + c$:

il devinera assez vite que ce point privilégié est le barycentre des points massifs ci-dessus. S'il ne le voit pas, on peut l'inviter à faire le raisonnement suivant, qui a certainement sa valeur éducative : introduisons un point arbitraire I que nous choisirons ensuite au mieux de la question posée, à savoir l'étude de $\alpha PA^2 + \beta PB^2$; il pense tout de suite à transformer en utilisant $\vec{PA} = \vec{PI} + \vec{IA}$, $\vec{PB} = \vec{PI} + \vec{IB}$, ce qui le conduit presque immédiatement à la relation

$$\alpha PA^2 + \beta PB^2 = (\alpha + \beta) PI^2 + 2\vec{PI} \cdot (\alpha\vec{IA} + \beta\vec{IB}) + \alpha IA^2 + \beta IB^2.$$

Il voit alors que le point I, qui fera le mieux son affaire, sera celui qui

annulera $\alpha \vec{IA} + \beta \vec{IB}$, c'est-à-dire le barycentre des points massifs (A, α), (B, β). Avec ce point I, la relation devient, en employant des notations évidentes, $f(P) = (\alpha + \beta) PI^2 + f(I)$.

Il en résulte une étude simple de $f(P)$ et la résolution d'une foule de questions aussi intéressantes les unes que les autres, en particulier le lieu des points P donnant à $f(P)$ une valeur donnée. On peut rattacher à ce lieu celui des points P tels que $PA = kPB$, puisqu'il se confond avec le lieu des points P tels que $PA^2 - k^2 PB^2 = 0$ ($\alpha = 1$, $\beta = -k^2$) : on voit ici que le point privilégié est le point I partageant $\vec{AB}$ dans le rapport k^2 , milieu des conjugués harmoniques de $\vec{AB}$ dans les rapports k et $-k$.

Il est à peine besoin de dire que l'on peut rattacher à la question précédente l'étude de l'expression $\alpha P_0 + \alpha' P_0'$, où P_0 et P_0' désignent les puissances d'un point P pour deux cercles (O) et (O') d'un même plan, cette expression différant de $\alpha PO^2 + \alpha' PO'^2$ par une constante. D'où de nouveaux lieux, en particulier celui des points P, dont le rapport des puissances pour les cercles (O) et (O') a une valeur donnée.

Notons bien que la méthode suivie peut s'appliquer à plus de deux points fixes ou à plus de deux cercles et qu'elle donne immédiatement des résultats analogues dans l'espace, par lequel on peut commencer si l'on veut. (Naturellement, en empiète peut-être sur un domaine... de chasse réservée).

En troisième lieu, je citerai les théorèmes de Menelaüs et de Jean de Céva : l'étude du produit $\frac{\vec{PB}}{\vec{PC}} \times \frac{\vec{QC}}{\vec{QA}} \times \frac{\vec{RA}}{\vec{RB}}$, attaché à un triangle ABC

et à trois points P, Q, R, pris respectivement sur les droites BC, CA, AB [que l'on pourrait noter simplement (PQR)] conduit à des résultats plus étendus que lesdits théorèmes, ceux-ci n'étant que deux aspects particuliers de la question : je laisse à mes collègues le soin d'approfondir.

Il serait facile de multiplier les exemples pour montrer combien la méthode préconisée par M. LEBESGUE est digne d'être prise en considération.

Mais, dira-t-on, que deviennent les réciproques dans cette affaire ? Eh bien ! tout simplement, elles disparaissent. Leur disparition ne tient qu'à la méthode utilisée. J'espère que nous n'allons pas les regretter ! Naturellement, si dans une question on n'a pas pu (ou pas su) trouver une méthode supprimant les réciproques, on traitera les réciproques avec tout le soin désirable.

En nous inspirant des conseils de M. LEBESGUE, qui conduisent à des méthodes permettant de traiter en un temps donné un sujet plus vaste que par le passé, nous couperons court à la maladie vraiment chronique des suppressions éventuelles et, qui sait, peut-être pourrons-nous (ce que beaucoup d'entre nous souhaitent plus qu'ils ne veulent le dire) rétablir dans le programme de la classe de Mathématiques tout ce qui a été supprimé depuis vingt ans, au préjudice de la Physique, surtout. Nous oublions un peu trop que nos collègues physiciens utilisent toujours, dans une classe déterminée des notions de Mathématiques que les élèves n'étudieront dans

leur cours de Mathématiques qu'un an plus tard au moins ; dans l'intérêt de l'élève, ceci est inadmissible et, il faut bien l'avouer, la faute en est plus au mathématicien qu'au physicien. Si des additions dans le programme s'imposent, qu'on n'aille pas surtout les repousser en mettant encore une fois sur le tapis le travail de l'élève. Le remède au surmenage n'est pas là. Si l'on veut alléger la besogne de l'élève, il faut d'abord supprimer la question de cours au Baccalauréat (j'approuve entièrement le point de vue de notre collègue ZERTWOG, de Buffon, exposé dans le n° 144) — mais, hélas ! il s'est encore trouvé une majorité pour son maintien —, il faut supprimer ensuite les compositions trimestrielles, tout au moins dans leur esprit actuel, car elles ne servent qu'à faire escamoter par l'élève le travail normal de chaque semaine (on peut faire des compositions à l'improviste, n'exigeant pas d'autre préparation qu'un travail régulier).

Il y a certainement quelque chose à faire. Si nous arrivons à nous mettre d'accord, il ne sera pas nécessaire de proposer notre point de vue, il suffira de l'imposer.

R. ESTÈVE.

A propos de la « mise en équations »

Deux articles publiés dans les derniers numéros du *Bulletin* m'amènent à livrer à l'appréciation de mes collègues quelques remarques sans prétention.

Nous apprenons à nos élèves à résoudre par le calcul algébrique ou trigonométrique certains problèmes de géométrie, d'arithmétique, etc..., et dans cette intention, à les « mettre en équations ». Je m'élève contre cette expression, car elle consacre la maladresse qui, à mon sens, consiste précisément à négliger dans un premier examen de l'énoncé toute condition qui ne se traduirait pas par une équation, quitte à y revenir en fin de problème.

Pour traiter les problèmes dits « du premier ou du second degré », certains manuels préconisent le processus suivant :

1. Choix de l'inconnue (ou des inconnues).
2. Mise en équation(s).
3. Résolution algébrique de l'équation (ou des équations).
4. Discussion de la résolution algébrique précédente.
5. Retour au problème. Convenance des racines.

Le seul fait qu'on indique « retour au problème » montre bien qu'on s'en est écarté. On a résolu en fait un problème d'algèbre qui n'équivaut pas exactement au problème posé, et c'est pourquoi on est obligé ensuite de déterminer dans quelle mesure les solutions de celui-là coïncident avec celles de celui-ci.

Il me paraît plus satisfaisant du point de vue théorique, et il est souvent plus simple dans la pratique, de déterminer dans une première étape un système de conditions (équations, inéquations, condition pour une inconnue de ne prendre que des valeurs entières, d'être différente de tel ou tel nombre, etc...) dont l'ensemble soit équivalent au problème proposé, de manière à consacrer la seconde étape uniquement à la résolution de ce système.

Soit, par exemple, le problème (Brachet et Dumarqué, 2^e AB) : « Un canot à moteur a mis 3 h. 12 mn. pour remonter un fleuve sur une longueur de 30 km. et pour revenir à son point de départ, sans changer sa vitesse propre. La vitesse du courant est 5 km. à l'heure. On demande quelle a été la vitesse propre du canot. »

Le système de conditions à résoudre est :
$$\frac{30}{x-5} + \frac{30}{x+5} = 3,2$$
 avec $x > 5$.

La deuxième condition, qui exprime que le canot peut remonter le fleuve, évite toute difficulté pour résoudre l'équation. Compte tenu de $x > 5$, $x-5$ et $x+5$ sont différents de 0.

De même, si on a obtenu $2(x-1) = \sqrt{25-x^2}$ avec $x \geq 2$, ce système équivaut au suivant : $4(x-1)^2 = 25-x^2$ $x \geq 2$, tandis que les deux équations considérées isolément ne sont pas équivalentes (le domaine d'équivalence étant l'ensemble des nombres réels, bien entendu).

Ces considérations me paraissent s'imposer encore davantage dans les classes de Mathématiques Élémentaires. A ce niveau, les esprits sont assez mûrs du point de vue de la logique pour préférer transposer d'emblée, dans son intégralité, le problème posé sur le plan du calcul, plutôt que de négliger certaines conditions et d'y revenir par la suite.

Les discussions que comportent toutes les résolutions de triangles sont très rarement bien conduites par nos élèves. Quelquefois ils obtiennent les conditions exactes auxquelles doivent satisfaire les données, mais c'est par des procédés disparates et qui ne forment pas une discussion cohérente et bien ordonnée. A lire leurs copies sans idée préconçue, on n'est jamais sûr que toutes les conditions ont bien été obtenues et qu'inversement on n'a pas écrit des conditions trop restrictives. Ils mêlent — et parfois les manuels donnent le ton — à la discussion trigonométrique des considérations géométriques hors de question. Nombre d'entre eux avouent ne pas comprendre pourquoi, après certaines résolutions de triangles, le professeur écrit que le plus grand côté calculé est inférieur à la somme des deux autres (quand il calcule d'abord les côtés), alors que, dans d'autres cas, cette condition ne le préoccupe nullement (quand il calcule d'abord les angles).

La principale qualité à obtenir est donc la clarté. La méthode que je préconise me paraît apporter cette clarté.

Pour préciser, soit à résoudre un triangle connaissant les valeurs e_1, e_2, e_3 de trois grandeurs E_1, E_2, E_3 liées à ce triangle (par exemple, choisies au hasard, une bissectrice, une médiane, une hauteur).

Le problème posé peut se décomposer en deux parties :

1^o Déterminer le (ou les) triangles dans lesquels E_1, E_2, E_3 ont respectivement pour valeurs e_1, e_2, e_3 , deux triangles égaux étant considérés comme une solution unique.

2^o Calculer les six éléments — et éventuellement l'aire — de chacun des triangles répondant au 1^o.

En ce qui concerne la première partie, on peut opérer comme suit :

(a) Choisir comme inconnues principales un côté a et les trois angles A, B, C .

(β) Etablir des formules (F) valables pour tous les triangles, qui expriment E_1, E_2, E_3 , en fonction de a, A, B, C ,

$$E_1 = f_1(a, A, B, C) \quad E_2 = f_2(a, A, B, C) \quad E_3 = f_3(a, A, B, C).$$

Toutes espèces de considérations géométriques et trigonométriques peuvent être utilisées pour l'établissement de ces formules.

(γ) Déterminer un système de conditions nécessaires et suffisantes.

— On signalera que si a, A, B, C sont les mesures de quatre éléments d'un triangle dans lequel $E_1 = e_1, E_2 = e_2, E_3 = e_3$, ces quatre nombres vérifient le système (S) suivant :

$$e_1 = f_1(a, A, B, C) \quad e_2 = f_2(a, A, B, C) \quad e_3 = f_3(a, A, B, C), \\ A + B + C = \pi \quad A > 0 \quad B > 0 \quad C > 0 \quad a > 0.$$

— Inversement on prouvera sans difficultés qu'à tout ensemble de quatre nombres A, B, C, a vérifiant le système (S) correspond un triangle, et un seul, défini à un déplacement (dans l'espace) près, dont les trois angles et le premier côté ont ces nombres pour mesures [d'après les cinq dernières conditions de (S)], et que dans le triangle ainsi obtenu les éléments E_1, E_2, E_3 ont respectivement pour mesures e_1, e_2, e_3 (d'après les trois premières conditions de S).

— Ainsi a-t-on montré de manière indiscutable l'équivalence entre la première partie du problème posé et la résolution du système (S).

(δ) Il ne reste plus qu'à résoudre et à discuter (S), problème de pur calcul.

En ce qui concerne la deuxième partie du problème : calcul des six éléments, quatre d'entre eux ayant déjà été calculés, il ne reste qu'à obtenir b et c . A chaque ensemble A, B, C, a de valeur vérifiant (S) correspond, on vient de le voir, un triangle et un seul répondant à la question 1°. Dans ce triangle b et c sont donnés, par exemple, par les formules

$$b = a \frac{\sin B}{\sin A}, \quad c = a \frac{\sin C}{\sin A}.$$

Mais on peut aussi bien, après s'être servi de la première, calculer c par $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$. On peut même utiliser des considérations géométriques.

Ce qui est important, c'est qu'il n'y a plus aucune espèce de discussion à faire en ce qui concerne b et c .

Au risque de paraître me répéter, j'insiste sur le fait que cette manière de procéder donne toute liberté quant à l'établissement des relations (F) et quant à la détermination finale de b et c . En particulier, le calculateur n'est pas astreint à utiliser uniquement les formules de l'un des deux groupes classiques de relations entre les éléments d'un triangle quelconque, comme on le fait habituellement pour pouvoir appliquer ensuite une certaine réciproque relative au groupe utilisé (réciproque qui, d'ailleurs, ne me paraît pas entièrement satisfaisante en l'occurrence).

Toute la discussion est concentrée dans la détermination des solutions du système (S).

Ce genre de considérations pourrait être étendu à la recherche des lieux géométriques par utilisation de la géométrie analytique. Ce serait une occasion de critiquer les dénominations « lieux étrangers » et « lieux impro-

pres », d'abord du point de vue du vocabulaire, parce que ces épithètes me paraissent inacceptables pour le mot « lieux », mais aussi du point de vue de la méthode, parce que ces expressions prouvent qu'on a modifié le problème posé en passant à l'analytique. Mais je ne voudrais pas abuser de l'attention du lecteur qui a eu la bonne volonté de me suivre jusqu'ici.

A. MAUGUIN,

Professeur au Lycée de Montauban.

Note. — On se sera certainement aperçu que le processus indiqué dans l'article précédent pour la résolution d'un triangle constitue théoriquement une méthode générale applicable à tous les problèmes de ce genre. Il ne faudrait pas l'imposer aux élèves, car elle n'est pas toujours la plus simple. D'autres inconnues principales peuvent être choisies. On peut même n'en choisir que trois. En outre, aucune indication n'a été donnée — et pour cause — sur la résolution du système S.

Il serait souhaitable, surtout pour la pratique, que quelqu'un réussît à classer tous les problèmes imaginables de résolutions de triangles en un certain nombre de catégories bien définies, à chacune desquelles correspondrait une méthode générale de résolution, de telle sorte qu'il fût possible, dès qu'on aurait déterminé à quelle catégorie appartiendrait le problème posé, de connaître immédiatement la meilleure façon d'obtenir un système tel que (S), et, l'ayant obtenu, la meilleure façon d'en orienter la résolution.

MAUGUIN.

Etude d'une démonstration d'équivalence entre propriétés géométriques

Les élèves connaissent déjà la définition d'une conique à centre comme lieu des centres des cercles passant par un point fixe F' et tangents à un cercle fixe (δ) de centre F . Les cas particuliers où F' est, soit sur (δ) , soit en F , ont été étudiés et sont désormais exclus. Le problème consiste à transformer cette définition.

On suppose établie la formule de la différence des puissances d'un point A par rapport à deux cercles non concentriques (C) et (C') ayant pour centres respectifs O et O' : (1) $P_C(A) - P_{C'}(A) = 2\overline{OO'} \cdot \overline{Aa}$ où a est la projection orthogonale de A sur l'axe radical de (C) et (C') .

DONNÉES. — α . Deux cercles égaux fixes de rayon égal à $2a$ l'un (δ) ayant pour centre un point F' , l'autre (δ') ayant pour centre un point F . On pose $FF' = 2c$ avec $c \neq 0$ et $c \neq a$ (cette dernière restriction n'étant pas indispensable).

β . Un point *quelconque* M du plan, et le cercle (μ) de rayon ϱ , qui a pour centre M et qui passe par F' .

(Le lecteur est invité à faire la figure).

MÉTHODE. — On cherchera une relation qui permette d'exprimer simplement *par la suite* que le cercle (μ) est tangent au cercle (δ') .

RECHERCHE DE LA RELATION. — α . *Position relative de (μ) et de (δ')* : Il n'est évidemment pas indiqué de comparer la distance des centres à la

somme et à la différence des rayons. Trop de cas de figure devraient être examinés : on ne sait rien sur M.

Les élèves se rappellent facilement que le nombre de points d'intersection de deux cercles est le même que celui de l'un d'eux avec leur axe radical. On tracera donc Δ , axe radical de (μ) et (δ') , et on cherchera à évaluer la distance FK de F à Δ . La formule (1) est toute indiquée :

$$P_{\delta'}(F) - P_{\mu}(F) = 2 \overline{MF} \cdot \overline{FK}.$$

D'où $|-4a^2 + \varphi^2 - MF^2| = 2 MF \cdot FK$. Ainsi, FK est exprimée en fonction de MF et de φ .

β . Le cercle (μ) passe par F' : c'est-à-dire que $\varphi = MF'$. Par suite, $2MF \cdot FK = |-4a^2 + MF'^2 - MF^2|$. On reconnaît dans $-4a^2 + MF'^2$ la $P_{\delta}(M)$ donc au second membre $|P_{\delta}(M) - P_F(M)|$, F désignant ici le cercle-point.

On est conduit à tracer l'axe radical D de (F) et (δ) . Et en désignant par H la projection orthogonale de M sur D, par application de la formule (1), on obtient : $2 MF \cdot FK = 2 F'H \cdot MH$. En définitive, quel que soit M dans le plan, on a :

$$(R) \quad \boxed{\frac{MF}{MH} = \frac{2c}{FK}}$$

EQUIVALENCE DES DEUX DÉFINITIONS. RÉFLEXIONS SUR LA MÉTHODE. — « μ tangent à (δ) » équivaut — on l'a vu — à $KF = 2a$, c'est-à-dire d'après la relation (R) à $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$. Et, par suite, en ce qui concerne M, le fait qu'il soit sur la conique Γ ayant pour cercles directeurs (δ) et (δ') , et le fait qu'il satisfasse à la relation $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$, sont deux propriétés équivalentes. Posons $\frac{c}{a} = e$. La conique Γ apparaît comme identique au lieu des points M tel que $\frac{MF}{MH} = e$.

Mais il y a plus : il est facile d'amener les élèves — si toutefois ils n'y viennent pas d'eux-mêmes — à se demander « ce qui se passerait » si FK, au lieu d'être égal à $2a$, lui était, soit inférieur, soit supérieur. Les nombres positifs seront donc partagés en trois classes auxquelles correspondront, d'après la remarque faite sur les points communs à deux cercles et à leur axe radical, et d'après la relation (R), les trois lignes du tableau de propriétés équivalentes qui suit :

(μ) coupe (δ)	$\rightleftarrows$	$KF < 2a$	$\rightleftarrows$	$\frac{MF}{MH} > e$
(μ) est tangent à (δ)	$\rightleftarrows$	$KF = 2a$	$\rightleftarrows$	$\frac{MF}{MH} = e$
(μ) ne coupe pas (δ)	$\rightleftarrows$	$KF > 2a$	$\rightleftarrows$	$\frac{MF}{MH} < e$

On est conduit à définir si on ne l'a pas fait plus tôt, l'extérieur et l'intérieur d'une conique, et à remarquer : de même que le nombre $2a$ est la

coupure entre les nombres inférieurs à $2a$ et les nombres supérieurs à $2a$, de même la courbe Γ apparaît comme une coupure entre deux régions du plan, et à chaque propriété caractéristique de Γ correspond une propriété caractéristique de chacune de ces régions.

L'exposé précédent illustre de remarquable manière, sous ses différents aspects (suppression des réciproques, extension au plan des propriétés d'une courbe), la réflexion de Henri LEBESGUE, rapportée par notre collègue POCHARD, dans le numéro 141 du *Bulletin*, auquel le lecteur est prié de se reporter.

Signalons accessoirement à l'actif de la démonstration précédente l'introduction toute naturelle des directrices et de l'excentricité d'une conique.

LIEU DES POINTS DONT LE RAPPORT DES DISTANCES A UN POINT FIXE F ET A UNE DROITE FIXE D EST UN NOMBRE CONSTANT e . — Ce lieu vient d'être trouvé dans le cas où D est l'axe radical du cercle-point F et d'un cercle (δ) non centré en F, ne passant pas par F, e étant le rapport FF' au rayon de (δ) .

Tout ensemble (F, D, e) peut-il être obtenu de cette manière ? D'abord il est évidemment nécessaire que la distance FL de F à D soit différente de 0 et que e soit positif et différent de 1. Il est alors possible de construire (δ) connaissant F, D, e : il suffit pour cela de tracer un cercle (δ_1)

ayant pour centre un point F'_1 de FL, distinct de F et pour rayon $\frac{FF'_1}{e}$,

de tracer l'axe radical D_1 de (F) et (δ_1) [qui ne passe pas par F, puisque $e \neq 1$], et de faire subir à ce cercle (δ_1) l'homothétie de centre F qui transforme D_1 en D. Le cercle obtenu sera (δ) .

REMARQUE. — La formule (R) est encore valable pour le cas exclu où $c = a$, moins intéressant dans la pratique, mais non pas du point de vue théorique. On obtient alors l'équivalence entre le lieu des centres des cercles tangents en un point donné à un cercle donné, et le lieu des points tels

que $\frac{MF}{MH} = 1$ quand F est sur D...

Le lieu $\frac{MF}{MH} = 1$, quand F n'est pas sur D, doit être traité à part.

Dans le même ordre d'idées, si on prend deux axes de coordonnées bien choisis et qu'on laisse provisoirement indéterminé le point $M(x, y)$ du plan, on peut établir la relation

$$MF^2 - e^2 MH^2 = \frac{1}{a^2 - c^2} \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 \right]$$

et par suite l'équivalence entre :

$$\frac{MF}{MH} > e \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} > 1$$

$$\frac{MF}{MH} = e \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$$\frac{MF}{MH} < e \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} < 1$$

dans le cas où $a > c$ (ellipse). Modifications évidentes si $a < c$.

Un dernier mot pour signaler que les élèves apprécient particulièrement ces procédés, d'abord parce qu'ils voient disparaître l'obligation souvent fastidieuse d'une réciproque, mais aussi parce qu'ils ont conscience qu'on obtient ainsi, sans effort supplémentaire, des résultats plus étendus.

A. MAUGUIN,

Professeur au Lycée de Montauban.

Angles orientés

Sur un article de M. DELPLA

J'ai lu avec le plus grand intérêt l'article de notre collègue, DELPLA sur les angles orientés, paru dans le n° 144. Si cet article fait le plus grand honneur aux scrupules de notre collègue, il est loin, cependant, d'avoir mon assentiment, car, à mon avis, il dramatise beaucoup trop la notion d'angles orientés. Je ne reprendrai dans ce qui suit, pour justifier mon point de vue, que la question des bissectrices de deux droites et, naturellement, le problème cité par notre collègue.

Dans les classes inférieures, après avoir constaté que les bissectrices (demi-droites) des quatre angles formés par deux droites concourantes forment deux droites perpendiculaires, on appelle celles-ci les bissectrices (droites) des deux droites concourantes en cause. Si l'on veut soumettre ces bissectrices aux raisonnements par angles orientés, il faut, naturellement, en donner une définition — ou une propriété caractéristique — qui les rattache à ces angles.

Dans ma classe de Mathématiques, j'expose la question comme elle est exposée dans le cours de Mathématiques ESTÈVE et MITAULT, édité par Istra, mais, comme un cours écrit ne remplacera jamais un cours parlé, je donne au tableau des explications supplémentaires. Voici donc dans quel esprit j'expose la question devant les élèves :

Soient deux droites OA, OB, concourantes en O, et Ox, Oy leurs bissectrices (droites). En marquant sur la figure le (OA, Ox) et le (Ox, OB) dont les grandeurs sont des angles aigus (il y en a évidemment deux pour chacun, en position), je fais observer que ces deux angles sont égaux (même grandeur et même sens) ; en conséquence, si l'on prend un (OA, Ox) *quelconque* et un (Ox, OB) *également quelconque*, on en déduit que leur différence est un multiple entier de π . Même remarque avec Oy. On peut donc dire que l'on a :

$$(OA, Ox) = (Ox, OB) \bmod \pi \text{ et } (OA, Oy) = (Oy, OB) \bmod \pi.$$

La relation ainsi trouvée — c'est, en effet, la même pour Ox et Oy — est-elle caractéristique de ces deux droites ? Si une troisième droite Oz possède la même propriété, on a $(OA, Oz) = (Oz, OB) \bmod \pi$, et, par soustraction avec $(OA, Ox) = (Ox, OB) \bmod \pi$, on en déduit $(Ox, Oz) = (Oz, Ox) \bmod \pi$, c'est-à-dire $2(Ox, Oz) = 0 \bmod \pi$, ou $(Ox, Oz) = 0 \bmod \frac{\pi}{2}$: Oz n'est donc autre que Ox ou Oy.

Je tiens à signaler, en passant, que $2(Ox, Oz)$ indique bien une multipli-

cation par 2, car il est loisible de donner aux deux écritures (Ox , Oz) en deux endroits différents la même valeur : c'est en cela, à mon avis, que consiste l'extrême souplesse des raisonnements par angles orientés et qui sent bien mieux en utilisant la mention $\text{mod. } \pi$, par exemple, qu'en traînant, par addition ou soustraction, des $k\pi$, $k'\pi$, $k''\pi$...

La propriété caractéristique rattachant les bissectrices aux angles orientés étant ainsi trouvée, on peut alors soumettre les bissectrices à tous raisonnements au moyen de ces angles. Naturellement, on peut remplacer ladite propriété par toute autre équivalente, par exemple :

$$(\text{OA}, \text{Ox}) = \frac{1}{2} (\text{OA}, \text{OB}) \text{ mod. } \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ou} \quad (\text{Ou}, \text{Ox}) = \frac{1}{2} [(\text{Ou}, \text{OA}) + (\text{Ou}, \text{OB})] \text{ mod. } \frac{\pi}{2}$$

On peut, si l'on veut, faire remarquer aux élèves que tous les angles (OA, OB) sont partagés chacun en deux parties égales, soit par Ox , soit par Oy , mais cela est au fond bien superflu et n'intervient nullement dans les raisonnements.

Cela étant, revenons au problème qui a fait l'objet de l'article de M. DEL-
LIA : il s'agit du sujet donné à la deuxième partie à Toulouse en juin 1950.

Le 4° seul est en cause à propos de la relation $(\text{CO}, \text{CP}) = \frac{2}{3} (\text{CO}, \Delta)$. A mon avis, cette relation n'est pas tout à fait exacte (elle l'est cependant, $\text{mod. } \frac{\pi}{3}$ car (CO, Δ) y étant défini à $k\pi$ près, $\frac{2}{3}(\text{CO}, \Delta)$ y est défini à $\frac{2k\pi}{3}$ près, alors que (CO, CP) y est défini à $h\pi$ près, et comme il doit y avoir accord parfait entre les deux membres, $h\pi$ doit être un multiple de $\frac{2\pi}{3}$, ce qui exige que $h\pi$ soit, en réalité, un multiple de 2π : autrement dit, pour être correcte, et pour mieux répondre à la fin du 4°, la relation aurait dû s'écrire $(\overrightarrow{\text{CO}}, \overrightarrow{\text{CP}}) = \frac{2}{3} (\text{CO}, \Delta) \text{ mod. } \frac{2\pi}{3}$. C'est ce que prouve le raisonnement suivant : PO et PP'' étant deux cordes égales du cercle (C, CO) , on a : $(\overrightarrow{\text{CO}}, \overrightarrow{\text{CP}}) = (\overrightarrow{\text{CP}}, \overrightarrow{\text{CP''}}) \text{ mod. } 2\pi$.

Δ étant la bissectrice (droite) des demi-droites CP , CP'' , cette relation s'écrit successivement :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\text{CO}}, \overrightarrow{\text{CP}}) &= 2 (\text{CP}, \Delta) \text{ mod. } 2\pi, \\ (\overrightarrow{\text{CO}}, \overrightarrow{\text{CP}}) &= 2 (\text{CP}, \text{CO}) + 2 (\text{CO}, \Delta) \text{ mod. } 2\pi. \end{aligned}$$

En constatant que $(\text{CO}, \text{CP}) = (\overrightarrow{\text{CO}}, \overrightarrow{\text{CP}}) \text{ mod. } \pi$, donc que $2 (\text{CO}, \text{CP}) = 2 (\overrightarrow{\text{CO}}, \overrightarrow{\text{CP}}) \text{ mod. } 2\pi$, on obtient facilement $3(\overrightarrow{\text{CO}}, \overrightarrow{\text{CP}}) = 2 (\text{CO}, \Delta) \text{ mod. } 2\pi$, et enfin $(\overrightarrow{\text{CO}}, \overrightarrow{\text{CP}}) = \frac{2}{3} (\text{CO}, \Delta) \text{ mod. } \frac{2\pi}{3}$.

Remarquons que ceci donne, au fond, une condition nécessaire et suffi-

sante pour qu'un point P du cercle (C, CO) soit tel que la corde passant par P et égale à PO (autre que PO) soit perpendiculaire à Δ . Il y a donc trois points P répondant à la question et ils sont les sommets d'un triangle équilatéral. D'où la propriété de l'hyperbole faisant l'objet du 4^e du problème cité, à savoir : *Si une hyperbole a pour excentricité 2, tout cercle qui passe par un foyer, et le symétrique de ce foyer par rapport à la directrice correspondante (ce symétrique n'est autre qu'un sommet) recoupe l'hyperbole en trois points formant un triangle équilatéral.*

Indépendamment de l'hyperbole, on a un problème assez intéressant sur les angles orientés : *Soit un cercle de centre O , A un point de ce cercle et D une droite passant par O . Trouver sur ce cercle un point P tel que la corde passant par P et égale à PA (autre que PA naturellement) soit perpendiculaire à D . Le problème ayant plusieurs solutions, indiquer leur disposition sur le cercle.*

En terminant, je me permets de former le vœu que les collègues échangent un peu plus souvent leurs vues sur la pédagogie des notions modernes — disons plutôt, pour être dans le vrai, dernières nées dans le programme de la classe de Mathématiques — comme celles de vecteurs et d'angles orientés : la mise au point de cette pédagogie ne pourra qu'y gagner.

R. ESTÈVE.

Pour un véritable enseignement de la Cosmographie

Depuis fort longtemps, l'enseignement de la Cosmographie est un peu un parent pauvre dans les classes terminales du Second Degré ; cette situation s'explique aisément. Non seulement les exigences des horaires conduisent nombre de maîtres à traiter très légèrement cette partie du programme, qu'ils considèrent de bonne foi comme secondaire et inutile, mais encore la majorité de ceux qui sont appelés à enseigner la Cosmographie n'ont d'autres connaissances que ce qu'ils ont appris eux-mêmes dans ces classes. Il n'y a, dans ces conditions, aucun étonnement à constater que l'enseignement de la Cosmographie soit devenu une tradition, que les ouvrages mis entre les mains des élèves se ressemblent comme des frères, même s'ils ont été écrits à un siècle de distance, étant mis à part quelques modernes essais de rénovation. Trois années d'expérience avec l'un de ces essais m'a montré, mieux que n'importe quel raisonnement abstrait, la difficulté de concilier deux exigences extrêmes : d'une part, la nécessité d'un enseignement logique et ordonné, indispensable dans la classe de Mathématiques ; d'autre part, le fait qu'il ne s'agit que d'une initiation, d'un premier (et dernier) contact avec l'Astronomie, science à laquelle malheureusement les élèves ne s'intéressent en général pas, faute de l'avoir connue au moment où, jeunes, leur curiosité naturelle et l'attrait des nouveautés les y auraient portés. Et, aidés en cela par la mentalité de certains, ils s'y intéressent d'autant moins qu'ils savent n'avoir que peu de chances d'être interrogés à l'écrit comme à l'oral. La mise de la Cosmographie comme matière d'oral seulement ne

ferait pratiquement que d'officialiser un état de fait, mais aurait pour conséquence d'accentuer cette tendance : le remède est ici pire que le mal, et il vaudrait alors mieux supprimer complètement la Cosmographie des programmes d'examen, pour lui conserver en classe un caractère désintéressé : l'Astronomie n'y perdrait guère d'ailleurs. Mais il est essentiel de remarquer que l'esprit utilitaire et technique vers lequel semble évoluer notre Enseignement du Second Degré risque d'entraîner cette conséquence pour des raisons totalement différentes, et, il faut bien le dire, quelque peu démagogiques. Il faudrait donc bien se garder de toute mesure qui risquerait de n'être qu'un précédent fâcheux sur lequel on s'appuierait pour déterminer une technicisation complète de notre Second Degré. Il est inutile d'insister sur les dangers d'une telle conception, totalement opposée au principe d'humanité qui fait l'honneur de notre Enseignement. Ce principe veut qu'aucune science humaine ne soit exclue. N'oublions pas que l'Astronomie est et reste la première des sciences ; l'éliminer des examens serait la pire des choses, car l'esprit français est ainsi fait qu'il ne s'intéresse qu'aux choses sanctionnées par la « Peau d'âne ». Supprimez d'abord le Baccalauréat, Messieurs, vous verrez ensuite à enlever l'Astronomie des programmes... ou bien alors, par un prodige surhumain, changez l'esprit du candidat.

Il est donc essentiel de repenser complètement, et les programmes d'Astronomie, et les méthodes pédagogiques.

Parlons d'abord des programmes : le programme actuel en Mathématiques Élémentaires est à la fois trop vaste et trop étroit : trop vaste pour un programme d'initiation à l'Astronomie, trop étroit pour un programme terminal, qui doit couronner toutes les connaissances essentielles apprises par les élèves. Encore qu'il doive être possible d'introduire en classe de Mathématiques Supérieures un programme de Cosmographie plus approfondi, utilisant les plus grandes ressources du calcul et des théories physiques de cette classe, et soulageant d'autant le programme de Mathématiques Élémentaires, il semblerait plus rationnel de commencer l'Astronomie plus tôt, en étalant l'actuel programme vers le bas ; l'initiation devrait être terminée à l'entrée en classe de Mathématiques Élémentaires, et le programme dans cette classe serait un programme de coordination des connaissances acquises antérieurement, ce qui est bien dans l'esprit de la classe. On donnerait ainsi une base logique et solide aux éléments d'Astronomie, et il ne serait pas interdit d'approfondir certaines notions astronomiques telles que le Temps sidéral et le Temps moyen. Une telle initiation, commencée dès la 6^e par exemple, par l'étude du ciel, les noms des étoiles, des constellations, des planètes, des explications simples, telles que les phases de la lune, etc..., ne doit pas prendre beaucoup de temps : 1 heure à 1 h. 1/2 par mois suffiraient, car l'initiation serait faite, non sous la forme de cours « ex cathedra », mais de causeries ou de conférences illustrées ; chaque établissement doit posséder un appareil permettant la projection fixe, soit sous forme de film 35 mm., soit sous forme de plaques diapositives, ce qui est plus pédagogique, car seul ce moyen permet la sélection des images et

leur projection dans un ordre donné. La plus grande part est évidemment laissée à l'initiative de chacun. Remarquons que le problème n'est pas posé « en l'air », mais qu'il se posera nécessairement lorsque, dans quelques décades, on commencera à s'inquiéter sérieusement de la fameuse et toujours attendue réforme de l'Enseignement. A ce sujet, je renvoie au *Bulletin* n° 141, page 230. Je ne suis pourtant pas d'accord avec l'auteur de l'article, car il est important d'étaler l'initiation de l'Astronomie sur plusieurs années. Ce qui précède n'a aucune modification à subir.

Passant maintenant aux méthodes pédagogiques, je me bornerai à un seul exemple, éloquent, certes, que d'autres ont déjà analysé avant moi, mais qui garde toute son actualité : il s'agit du mouvement des planètes. Là, nous verrons qu'il serait urgent de débarrasser les livres et les cours de professeurs (que personne ne se sente ici visé, ce que j'ai déjà dit excuse la plupart des erreurs) des procédés fictifs, des raisonnements artificiels, qui font frémir d'horreur les astronomes qui les lisent... Qui soutiendra sérieusement que la méthode préconisée dans 95 % des livres de Cosmographie permet, en mesurant les diamètres apparents du soleil, de montrer que l'orbite de la terre est une ellipse ? Cette ellipse ayant une excentricité de 0,017 environ, l'écart maximum MM' entre le rayon vecteur FM (F , foyer), et le rayon vecteur FM' (M' point du cercle principal aligné avec F et M) est de l'ordre de $0,00015a$, a étant le demi-grand axe de l'ellipse ; ceci correspondrait à une différence de $0''28$ entre le diamètre apparent observé et le diamètre apparent du soleil calculé dans l'hypothèse d'un mouvement circulaire excentré, d'où la nécessité de pouvoir mesurer le diamètre apparent du soleil avec une précision au moins... dix fois plus grande ($0''02$ en valeur absolue) pour pouvoir mettre en évidence l'ellipticité de l'orbite. Or cette précision est encore loin d'être atteinte de nos jours, et le diamètre apparent du soleil n'est pas défini avec cette précision ! Ajoutons, au contraire que les astronomes, lorsqu'ils se contentent de calculs en première approximation (ce qui est la précision donnée par les tables de logarithmes à 5 décimales), utilisent pour le mouvement apparent du soleil les formules simplifiées qui seraient justement les formules du mouvement de la terre sur une orbite circulaire (excentrique à point d'égalité de Ptolémée). Ajoutons, pour clore, que les ouvrages restent muets sur l'origine de la loi de Newton, à moins qu'ils ne citent l'épisode de la Pomme...

Voilà donc un chapitre où l'on peut faire carrément table rase du passé et repartir sur des bases nouvelles. On peut, sans inconvénient, suivre l'ordre historique, car il montre bien aux élèves la progression de la pensée, et il montre aussi comment le progrès de la technique a influé sur le développement de la science, et comment aussi, en revanche, chaque progrès de l'Astronomie a entraîné un progrès dans ses techniques. Cet ordre est aussi le seul qui puisse faire de l'Astronomie quelque chose de cohérent, sans arrêt, sans retour en arrière, sans redite inutile. Mais d'où viennent donc les lois de Képler ?

Précisons nos souvenirs :

Tycho-Brahé, astronome danois (1546-1601), n'a que des moyens assez

rudimentaires, tels un « *tubus opticus* », simple tube ouvert aux deux bouts, sans lentilles, mais où deux réticules matérialisent l'axe optique de l'appareil (la première lunette date de 1608) ; mais il perfectionne ses instruments pour avoir plus de précision dans ses pointés et ses mesures. Il arrive à accumuler pendant 40 ans de sa vie des observations remarquables de précision pour son époque, concernant en particulier la planète Mars. Mais, bien que vivant cinquante ans après Copernic, il est encore un fervent adepte du système de Ptolémée, et ne cherche pas à interpréter ses résultats. Le mérite d'exploiter son travail reviendra à Képler, astronome allemand (1571-1630), d'abord élève de Tycho-Brahé, puis astrologue à la cour de l'Empereur, mais qui eut toujours une vie misérable. Képler, converti au système de Copernic, voulut profiter des mesures de son maître pour établir de façon précise l'orbite de Mars autour du soleil, ou plus exactement pour calculer les éléments de cette orbite, qui est toujours un cercle dont le soleil n'occupe pas le centre, exactement comme pour l'orbite de la terre, qui était connue à cette époque avec une bonne précision (nous avons vu qu'avec une bonne approximation on pouvait confondre l'ellipse et son cercle principal). Ne possédant que des mesures imprécises du diamètre apparent, il eut l'idée d'éliminer ces déterminations en groupant les observations de Mars par deux, faites à des intervalles de temps égaux à la révolution sidérale de Mars : Mars occupe sensiblement la même position sur son orbite, tandis que la Terre occupe deux positions différentes déterminables T et T'. On peut donc résoudre le triangle MTT' connaissant le côté TT', calculable dans l'hypothèse d'une orbite circulaire pour la Terre, et les angles à la base. Ayant reporté sur un graphique les positions de Mars déduites du très grand nombre d'observations dont il disposait, et ayant éliminé celles qui lui semblaient douteuses, il eut la surprise de constater qu'elles dessinaient, non un cercle, mais une ovale, qu'il eut tôt fait d'identifier avec une ellipse dont le soleil occupait un des foyers. En généralisant à toutes les planètes, la *première loi de Képler* (1609) était trouvée, suivie la même année de la deuxième (loi des aires), puis, en 1618, de la troisième loi de Képler, d'intérêt fondamental, car elle relie les unes aux autres les diverses planètes qui gravitent autour du soleil.

On peut dire évidemment que Képler a eu de la *chance* : il a été favorisé par le fait d'abord que l'excentricité de l'orbite terrestre est très faible, ce qui fait que cette orbite est presque circulaire, ce qui ne cause pratiquement pas d'erreur pour la détermination exacte du triangle MTT' (l'erreur pouvant provenir du calcul de la distance TT', et de la position des points T et T'), et, d'autre part, par le fait que l'excentricité de l'orbite de Mars est notable (0,09), ce qui rendait sensible l'aplatissement. Le grand mérite de Képler fut, en outre, assurément, d'avoir généralisé cette propriété à toutes les planètes : on rencontrait pour la première fois en Astronomie un mouvement qui n'était pas circulaire.

A partir des lois de Képler, par un raisonnement simple de cinématique accessible à un élève de Mathématiques Élémentaires, Newton a calculé l'accélération d'une planète dans son mouvement curviligne autour du soleil,

et en a déduit sa fameuse loi, dite de l' « attraction universelle », en généralisant à tous les couples de points pris deux à deux le résultat obtenu pour chaque planète et le soleil. Cette loi a été la base de la mécanique céleste, et son utilisation comme point de départ permettra dans les classes supérieures de traiter complètement cette question, et on sait son succès dans la prévision des mouvements célestes, qui a eu pour couronnement la découverte de Neptune.

On chercherait aussi dans les manuels des exposés corrects des systèmes de Ptolémée et de Copernic, et surtout l'explication du fait que le second est supérieur au premier. On dit souvent que seul le second permet une description plus simple du mouvement des planètes, mais cet argument n'en est pas un, car les deux systèmes sont cinématiquement équivalents. Les astronomes utilisent d'ailleurs le système de Ptolémée quand ils étudient le mouvement apparent du soleil et celui des planètes inférieures, car la représentation est plus commode. La supériorité du système de Copernic provient de considérations de dynamique qui se sont trouvées vérifiées dans leurs conséquences avec une grande précision. Dès lors, la loi de Newton ne doit plus être considérée que comme une vaste synthèse des lois de Képler.

Je m'excuse de cet exposé un peu long sur un point particulier, mais je ne prétends point avoir épuisé le débat. Cet exemple montre bien en tout cas que la pédagogie peut fort bien s'accommoder des réalités historiques, et ne gagne rien à des exposés artificiels sans lien logique et sans base expérimentale. Ce sont ces méthodes irréelles qui ont fait de la Cosmographie une sorte d' « Herbarium », selon un mot de M. DANJON, je dirai plutôt une collection de fossiles. Ce n'est pas cette collection de natures mortes qu'il s'agit de ressusciter, mais il s'agit bien plutôt de redonner à cette science la vie dont elle n'a jamais manqué. A ceux qui doutent de l'utilité réelle de cette science, je renverrai aux innombrables applications théoriques ou pratiques qu'elle a suscitées, depuis la technique de la navigation jusqu'à la théorie de la relativité ; et même si elle n'avait aucune utilité pratique, elle en aurait encore une, qui serait de prouver qu'il existe encore une science désintéressée, et pour cela il vaudrait encore la peine de l'étudier.

Jacques DAUTREVAUX,

*Ancien Elève de l'Ecole Normale Supérieure,
Agrégré des Sciences Mathématiques.*

Bibliographie

E. BOREL : **Les nombres inaccessibles.**

Ce livre est l'aboutissement d'un demi-siècle de réflexions sur les principes de l'analyse mathématique, et en particulier sur la définition des nombres. Le mathématicien a le droit d'élaborer des théories abstraites déduites d'axiomes arbitraires non contradictoires, mais garde intérêt à distinguer, parmi les êtres de raison qui sont la substance de sa science, ceux qui sont vraiment accessibles, c'est-à-dire ont une individualité qui les distingue sans équivoque. D'où une science de l'accessible et du réel, et au delà une science de l'imaginaire et de l'imaginé.

Les systèmes de numération (décimal par exemple) permettent d'écrire et concevoir des nombres en réalité « relativement inaccessibles », si l'on tient compte des hypothèses sur la durée de l'univers et de l'activité humaine.

On peut concevoir aussi des fonctions de plus en plus rapidement croissantes (itération, méthode diagonale, théorème de Paul du Bois-Reymond) ; quelles qu'elles soient, elles sont négligeables par rapport aux nombres inaccessibles.

Un exemple de ces derniers est fourni par les nombres incommensurables compris entre 0 et 1, plus nombreux que les « accessibles », et même que les « relativement inaccessibles ».

« Ces nombres absolument inaccessibles jouent cependant un rôle important en mathématiques. Nous essaierons, dans les chapitres qui suivent, de préciser ce rôle, tout en ne négligeant pas de signaler les difficultés qui sont une conséquence de l'inaccessibilité, c'est-à-dire du fait qu'aucun de ces nombres ne peut être défini avec précision de telle manière que des mathématiciens qui en parlent soient assurés qu'ils parlent d'un même et unique nombre. C'est toujours à ce critère positif qu'il faut revenir lorsqu'on envisage un être mathématique. Bien entendu, il n'est pas interdit d'étudier des classes d'êtres mathématiques, par exemple les fonctions continues d'une variable réelle, et d'étudier les propriétés communes à cette classe de fonctions. Mais cette étude perdrait certainement la plus grande part de son intérêt si l'on ne connaissait pas de fonctions particulières bien définies auxquelles on peut appliquer les résultats obtenus pour les fonctions de cette classe. Le calcul des probabilités peut être utilisé pour l'étude des propriétés d'un ensemble dont les éléments individuels restent inaccessibles. Les applications du calcul des probabilités sont dominées par la question du choix, directement liée à la notion de probabilité. C'est ainsi que nous serons conduits à examiner certains aspects de l'axiome du choix de Zermelo. »

Au sommaire : Nombres relativement inaccessibles ; nombres absolument inaccessibles ; l'homogénéité du continu ; l'hétérogénéité du dénombrable ; les divers systèmes de numération ; les définitions arithmétiques ; la notion

de puissance ; les ensembles inaccessibles ; les ensembles Z ; probabilité et mesure.

(Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars).

V. THÉBAULT : **Les récréations mathématiques** (Gauthier-Villars).

Ce sont des récréations mathématiques très austères, qui se rapportent toutes à la théorie des nombres, doctrine si attachante à laquelle on sait que l'auteur se consacre depuis des années. L'ouvrage, très dense, contient une foule de problèmes intéressants : avec les chiffres 0, 1 ..., 9, pris une fois, nombres terminaux des carrés, nombres de Pythagore, etc... Il se termine avec deux notes de A. Buquet sur l'équation de Pell-Fermat, et sur l'arithmo-triangulation.

W.-L. FERRAR : **Finite matrices.**

Ouvrage conçu à la fois pour les étudiants avancés et pour ceux qui ne disposent que des propriétés de l'algèbre classique. La théorie est donc poussée assez loin, tout en ne cherchant pas systématiquement l'abstraction rigoureuse qui est la règle de l'algèbre moderne. Le but cherché, et atteint, est de faciliter une étude plus approfondie, et la lecture de mémoires ou traités plus complets (par exemple, en langue française, *L'Introduction mathématique aux théories quantiques*, de G. JULIA).

(Oxford, Clarendon Press, 1951), 182 pages.

Colloque de Topologie (Espaces fibrés), Bruxelles, juin 1950. Ed. G. Thone (Liège) et Masson (Paris), 1951. 1.225 francs.

L'ouvrage est publié par le Centre Belge de Recherches Mathématiques. Comme l'écrit M. Lucien Godeaux dans son Avant-Propos : « C'est un lieu commun de dire que la topologie se trouve à la base de toutes les disciplines mathématiques. On sait l'intérêt que présentent pour les géomètres les surfaces de Riemann. En dehors de cette question fondamentale, les recherches de topologie ont longtemps porté sur des problèmes dont l'énoncé, d'apparence élémentaire, cache des difficultés qui, jusqu'à présent, n'ont pas toujours été surmontées ; tel est, par exemple, le problème des quatre couleurs. Les cinq mémoires célèbres qu'Henri Poincaré a consacrés à l'Analysis Situs, nom sous lequel on désignait autrefois la topologie, ont considérablement élargi le champ des investigations. Depuis lors, les recherches topologiques ont pris de plus en plus d'extension, à tel point que lorsque le Centre Belge de Recherches mathématiques a résolu de consacrer un Colloque à la topologie, il a été nécessaire d'en limiter le cadre. Le choix s'est porté sur la topologie des variétés fibrées. »

Deux conférences générales, faites par MM. Hopf (Introduction à la théorie des espaces fibrés) et M. Cartan (Notions d'algèbre différentielle ; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie) ont ouvert le Colloque. Elles ont été suivies d'exposés sur des points spéciaux, par MM. Ehresmann, H. Cartan, J.-L. Koszul, B. Eckmann, J. Leroy, H. Hopf et G. Hirsch.

G. VERRIEST : **Les nombres et les espaces** (Collection A. Colin).

Ce livre est écrit pour les jeunes, précise l'éminent professeur de Louvain, pour ceux qui commencent à s'initier aux méthodes des mathématiques supérieures. En réalité, tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques le liront avec un plaisir extrême. Il ne correspond à aucun chapitre aux frontières nettement tracées, à aucun programme d'examen. C'est le fruit des réflexions d'un maître qui fait une pause pour embrasser, d'un coup d'œil l'ensemble de la science et en dégager quelques idées essentielles. L'ouvrage commence par un chapitre sur les nombres et les ensembles (nombres algébriques, transcendants, le dénombrable et le continu, les paradoxes de la théorie des ensembles). Viennent ensuite les espaces et les géométries, les groupes, l'algèbre moderne (anneaux, corps, idéaux), avec de fréquentes précisions historiques. Le but de l'auteur est de faire entrevoir au lecteur le caractère esthétique de la science, qui échappe trop souvent à ceux qui s'en servent comme d'un outil. Avec « Les Géométries », de M. Godeaux, de la même collection, l'ouvrage de M. Verriest est de ceux qui doivent entrer dans la bibliothèque de tout professeur, et qui feraient approuver cette phrase de Novalis qui figure en épigraphe : « Seul, le mathématicien est un homme heureux ».

Annales de l'Institut Fourier (Université de Grenoble), année 1950.

N. BOURBAKI : Sur certains espaces vectoriels topologiques.

L. SCHWARTZ : Un lemme sur la dérivation des fonctions vectorielles d'une variable réelle.

L. SCHWARTZ : Les équations d'évolution liées au produit de composition.

G. DE RHAM : Complexes à automorphismes et homéomorphie différentiable.

A. PFLUGER : Représentations quasi-conformes et capacité logarithmique.

J. DENY : Sur la définition de l'énergie en théorie du potentiel.

M. BRELOT : Remarques sur la variation des fonctions sousharmoniques et les masses associées.

R. CAMPBELL : Comportement asymptotique des fonctions de Mathieu associées pour les grandes valeurs des paramètres.

O. GALVANI : La réalisation des connexions euclidiennes d'éléments linéaires et des espaces de Finsler.

P. SAMUEL : Sur les variétés algébroides.

O. ZARISKI : Sur la normalité analytique des variétés normales.

B. D'ORGEVAL : La représentation des plans multiples et le nombre maximum de points doubles d'une surface algébrique.

H. BECHIN : Sur la notion de travail dans la mécanique du continu.

R. DE POSSEL : La notion physique d'énergie vis-à-vis des définitions du travail et de la force.

J. KUNTZMANN : Notions de grille et de tube.

Les Humanités Scientifiques (Hatier).

BELAVAL : La leçon de Descartes. — BOULIGAND : Sur l'idée de correspondance. — BRACHET : Volume de la pyramide. Théorème préliminaire. —

CHAUVIN : Sur certaines irrégularités trigonométriques. — COMBES : Sur la construction des racines d'une équation du 2^e degré. — DELACHET : Sur quelques points d'histoire du calcul vectoriel. — DONTOT : A propos d'un problème classique. — GAMBIER : Sur les théorèmes de Poncelet ; Un théorème sur le triangle ; Construire l'hyperbole A, A', M. — MAILLARD : Puissance ; Zéro. — MINOIS : Sur l'organisation matérielle du Baccalauréat ; Réflexions sur un cours complet. — SANSELME : Un peu de logique. — THÉRAULT : Sur le triangle isocèle. — THIBERGE : A propos d'un problème classique. — THOVERT : Sur la droite de Simson.

Maisons d'Enfants de France (Ed. G. Gorde, rue Marceau, Grenoble), 600 francs. Numéro spécial sur le surmenage scolaire. Au sommaire :

P. GAUTIER : Vacances et scolarité. — D^r LAUNAY : Hygiène mentale scolaire. — M. JEUNE : Le surmenage scolaire. — D^r DIFFRE : Le malmenage scolaire. — D^r BARRAUD : Le malmenage scolaire féminin actuel et son remède. — Ch. BRUNOLD : Aspects pédagogiques du problème du surmenage scolaire. — D^r WORINGER : Le surmené scolaire est souvent un dyshépatiche. — D^r DELTHIL : L'amélioration des vacances scolaires. — L. FRANÇOIS : Les lycées climatiques. — P.-H. BAURIE : Les collèges balnéaires.

Livres reçus

Paul LANGEVIN : *La Pensée et l'Action* ; textes recueillis et présentés par Paul LABÉRENNE (professeur au Lycée Chaptal), avec préfaces de F. Joliot-Curie et de Georges Cogniot, 1 volume 19 × 11,5, 360 pages, 450 francs, les Editeurs Français Réunis, 33, rue Saint-André-des-Arts, Paris, 6^e.

Cet ouvrage donne des extraits de toute l'œuvre de Langevin et contient d'importantes pages sur la relativité ou les théories atomiques, et contient dans sa partie pédagogique des textes fondamentaux sur l'enseignement des Sciences.

F. BRACHET et J. DUMARQUÉ : *Petites tables trigonométriques naturelles* (et tables numériques usuelles). Dépliant à trois volets sur papier fort, 45 francs, Librairie Delagrave, 15, rue Soufflot, Paris, 5^e.

E. EHRHART : *Le triangle orienté*. En vente chez l'auteur. Prix : 150 fr. (Voir à la rubrique bibliographique, page 59, n^o 144, l'article de Mlle BARBIER).

F. BRACHET et J. DUMARQUÉ : *Aide-Mémoire de Mathématiques pour la classe de Première*. Tout le cours condensé en un cahier de 20 pages, illustré de nombreuses figures. Librairie Delagrave, 15, rue Soufflot, Paris, 5^e.

Avis

Société Astronomique de France, 28, rue Serpente, Paris (VI^e)

Conférences sur l'Astronomie, publiques et gratuites, le lundi à 21 heures.

10 mars. — *L'évolution des instruments méridiens*, par M. R. FORGA, assistant à l'Observatoire de Paris.

17 mars. — *Le télescope de Schmidt. Réglages et essais du Schmidt de 30 centimètres d'ouverture de l'Observatoire de Haute-Provence*, par M. J. TEXEREAU, collaborateur technique du Laboratoire d'Optique de l'Observatoire de Paris.

24 mars. — *La forme de la Lune*, par M. Th. WEIMER, aide-astronome à l'Observatoire de Paris.

31 mars. — *La rotation du Soleil*, par M. G. OLIVIERI, aide-technique du C.N.R.S. à l'Observatoire de Meudon.

7 avril. — *La pluralité des mondes habités à la lumière de la science moderne*, par M. J. DRAGESCO, lauréat de la Société.

Cours d'Astronomie populaire, public et gratuit, le vendredi à 20 h. 45, par M. André HAMON.

14 mars : Comètes, Bolides, Etoiles filantes.

21 mars : Les Etoiles : classes spectrales, étoiles doubles et variables.

28 mars : Nébuleuses, amas stellaires. La Galaxie et l'Univers.

4 avril : Les instruments d'observation et les observatoires.

Ecole Normale Internationale

Bureau International, 225, High Street, Hampton Hill, Middlesex (Angl.)

Quatrième rencontre internationale du 6 au 12 avril 1952, au C.I.U. (Y.M.C.A.), Le Rocheton, à LA ROCHELLE, par Melin (S.-et-M.).

Thème : « Structures mathématiques et Structures mentales ».

Directeur : C. GATTEGNO, professeur à l'Université de Londres.

Programme : 6 avril : Arrivée, installation. Discussion du thème et du programme. — Le 7 : Les structures mathématiques. — Le 8 : Les structures de la pensée. — Le 9 : La pensée mathématique de l'élève. — Le 10 : L'élaboration des structures mathématiques chez le savant et chez l'étudiant. — Le 11 : L'enseignement mathématique à travers l'étude des structures. — Le 12 : Conclusions. Les tâches à venir.

Prix : 7.500 francs, comprenant les frais de séjour et de stage, dont 2.000 francs versés à l'inscription à titre de dépôt.

Inscription : Les demandes devront être envoyées aussitôt que possible au Bureau International, à l'adresse ci-dessus, en indiquant les noms, adresse, fonction, sexe, connaissance de langues et expérience générale.

Un droit d'inscription équivalent à 500 francs sera exigé des participants pour frais d'organisation.

Arrivée le 6 avril dans la matinée. Départ dans l'après-midi du 12 avril.

Le Gérant : L. PARAZINES.

Cahors. Imp. A. Coueslant (*personnel intéressé*). 82.755 — 1952
C.O.A.L. 31.2330. — Dépôt légal : 1-1952

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

du dimanche 6 Avril 1952 à 8 h. 30

au Musée Pédagogique, 29, rue d'Ulm, Paris, 5^e

Le présent avis tient lieu de convocation. Les membres de l'Association sont priés de remettre en séance, ou faire parvenir pour le 15 avril 1952, sont priés de remettre en séance, ou faire parvenir pour le 5 avril 1952, un résumé de leurs interventions, s'ils veulent être sûrs qu'il en soit fait état.

Ordre du jour

- 1° Compte rendu financier.
 - 2° Rapport du Président.
 - 3° Rapport de M. CANONGE : Le nouveau C.A.P.E.S.
 - 4° Les épreuves de mathématiques aux examens et concours (B.E.P.C., B.E., E.N., Baccalauréats, Grandes Ecoles).
 - 5° L'examen d'entrée en 6^e.
 - 6° Le programme de la classe de 6^e.
 - 7° Travaux de la Commission CHATELET.
 - 8° Dépouillement du scrutin.
-

Candidats aux élections du Comité

a) Les membres du Comité sortis en 1951 et rééligibles cette année :

MM. BAY (Condorcet), CARALP (Montaigne), CROZES (Henri-IV), DELTHEIL (Toulouse Faculté), Mlle MASSON (Marie-Curie), M. PÉTRUS (Janson).

b) Mlle FÉLIX (La Fontaine), Mme FLAMANT-PARIZE (Fénelon), M. DUVAL (Dorian), qui ont obtenu aux dernières élections 91, 69 et 79 voix respectivement, et M. WALUSINSKI (Voltaire).

NOTA. — I. Membres de l'A.P.M. ayant également eu des voix l'an dernier : MM. THOVERT (18 voix) ; ITARD (14 voix) ; MÉDIONI (11 voix) ; MALLARD (4 voix) ; ELUECQUE (2 voix) ; MAILLARD (2 voix) ; MALTERA (2 voix) ; MONAVON (2 voix).

II. Ne pas voter pour MM. BERTRAND, EDDE, FAVRELLE, POCHARD et Mlle PROTIN, membres sortants non rééligibles.

Votes par correspondance

Les membres de l'Association qui ne pourront assister à l'Assemblée générale sont instamment priés de voter par correspondance.

Pour la régularité du scrutin, se conformer aux indications suivantes :

1^o Détacher la partie inférieure de la page suivante (Bulletin de vote) et l'introduire, après inscription du vote, dans une petite enveloppe cachetée ;

2^o Détacher le feuillet suivant, répondre aux questions, et l'insérer, avec la petite enveloppe contenant le Bulletin de vote, dans une seconde enveloppe portant extérieurement, avec le nom et l'adresse de l'expéditeur, la mention : « Association des Professeurs de Mathématiques, Bulletin de vote ». Adresser ce pli à M. POCHARD, 7, rue Pasteur, Saint-Cloud.

Bulletin de vote

Prière d'inscrire les six noms par ordre alphabétique.

- | | |
|----|----|
| 1. | 4. |
| 2. | 5. |
| 3. | 6. |

Feuille de réponses aux questions posées

Détacher cette page et la déposer en séance après avoir répondu lisiblement aux différentes questions.

Les membres de l'Association qui ne pourraient assister à l'Assemblée sont invités à envoyer ce feuillet **avant le 2 avril 1951**, au Président, M. PICHARD, 7, rue Pasteur, Saint-Cloud (S.-et-O.), ou à le remettre à un délégué de leur choix, membre de l'Association. [Si le nom du délégué est laissé en blanc, il sera choisi par le Président]. Rayer l'alinéa a) pour donner au délégué le mandat impératif constitué par l'alinéa b).

Nom et prénom :

Etablissement et fonction en 1951-52 :

prie M.

de le ou de la représenter à l'Assemblée générale d'avril 1952 et

a) l'invite à voter à sa place, en s'inspirant des indications ci-après ;

b) lui donne le mandat impératif de voter comme suit :

Dater et
signer
ci-contre : {

Questions posées aux membres de l'Association

1° La durée de l'épreuve d'Arithmétique à l'examen d'entrée en Sixième devrait-elle être d'une heure et non de quarante minutes comme elle l'est actuellement ?

2° Trouvez-vous quelque intérêt au programme actuel de Sixième ?

3° Voyez-vous des raisons pour que ce programme reste identique à celui de la classe de Septième ?

4° Pensez-vous qu'il puisse être intéressant d'étudier comment la suppression du programme actuel de Sixième pourrait permettre de répartir sur six ans les matières enseignées aujourd'hui de la Cinquième à la Troisième inclus ?

NOTA. — I. Vous êtes priés de prendre l'avis des professeurs préparant à l'entrée en Sixième pour la première question.

II. Si vous répondez oui à la quatrième question, envoyez vos suggestions sur une nouvelle répartition des matières du premier Cycle.

Roland MAILLARD et

Professeur de Mathématiques spéciales
au lycée Charlemagne,
Chargé d'un cours
à l'École Normale Supérieure

Albert MILLET

Professeur agrégé
au lycée Janson-de-Sailly
et à l'École Normale Supérieure
de l'Enseignement Technique

COURS DE MATHÉMATIQUES

Classe de Sixième Classique et Moderne

Mathématiques. Un vol. in-16, br. ou cart.,
de 192 p., avec 900 exercices et problèmes.

*Une méthode
efficace*

Classe de Cinquième Classique et Moderne

Mathématiques. Un vol. in-16, br. ou cart.,
de 272 p., avec 900 exercices et problèmes.

Une culture

Classe de Quatrième Classique et Moderne

Mathématiques. Un vol. in-16, br. ou cart.,
de 288 p., avec 687 exercices et problèmes.

mathématique



Classe de Troisième et Brevet d'études

Mathématiques. Un vol. in-16, broché, de
304 p., avec 1185 exercices et problèmes.

Une

Classe de Seconde Classique A et B

Mathématiques. Un vol. in-8, broché, de
320 p., avec 714 exercices et problèmes.

nouvelle

présentation

Classe de Seconde Classique C et Moderne

Algèbre. Un vol. in-8, br. ou cart. de 256 p.,
avec 633 exercices et problèmes.

typographique

Géométrie. Un vol. in-8, br. ou cart., de
444 p., avec 724 exercices et problèmes.

Classe de Première Classique A et B

Mathématiques. Un vol. in-8, br. ou cart.
de 288 p., avec 600 exercices et problèmes.

LIVRES DU MAÎTRE :

Classe de Première Classique C et Moderne

Algèbre et Trigonométrie. Un vol in-8, br.
de 288 p., avec 634 exercices et problèmes.

Livre du Maître de Sixième
(Corrigés)

Géométrie. Un vol. in-8, broché, de 336 p.,
avec 528 exercices et problèmes.

Livre du Maître de Troisième
(Corrigés)

Classe de Mathématiques

Algèbre. Un vol in-8, br. ou cart. de 368 p.,
avec 890 exercices et problèmes.

Géométrie. Un vol. in-8, broché ou cart.,
de 480 p., avec 693 exercices ou problèmes.

A PARAÎTRE :

Classe de Mathématiques (Technique)

Géométrie. Un vol. in-8, broché ou cart.,
496 p., avec 711 exercices et problèmes.

Classe de Mathématiques

Trigonométrie.. (Avril 1952)

Cosmographie - (Rentrée 1952)

HACHETTE

Librairie DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, PARIS-V^e

COURS COMPLET BRACHET DUMARQUÉ

avec la collaboration de **P. COUDERC** pour la Cosmographie

Signalé spécialement, parmi les ouvrages nouveaux :

COSMOGRAPHIE, classe de Mathématiques.

Large synthèse des plus récentes découvertes.

PETITES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES NATURELLES.

(Dépliant à trois volets, sur papier fort.)

Modèle commode pour Cours et Examens (Bacc, B.E.P.C.), Mathématiques et Physique.

TABLES DE LOGARITHMES A 5 DÉCIMALES.

Nombres — Degrés — Grades — Sans astérisques ni chevauchements.

Initiation facile — Utilisation rapide — Risques d'erreur réduits au minimum.

AIDE-MÉMOIRE DE MATHÉMATIQUES, classes de Première.

Tout le cours condensé dans un cahier illustré de 20 pages.

Catalogue et Spécimens sur simple demande

LIBRAIRIE VUIBERT

63, Boulevard Saint-Germain - PARIS-V^e

Vient de paraître :

ANNALES DU BACCALAURÉAT 1951

Fascicule 1 : Mathématiques 200 fr.

**ANNALES CORRIGÉES
DU BACCALAURÉAT 1950-51**

Fascicule 1 : Corrigé de Mathématiques 350 fr.

ANNALES DU B.E.P.C. 1951

Fascicule 7 : Mathématiques 130 fr.

ANNALES CORRIGÉES DU B.E.P.C. 1951

Fascicule 7 : Corrigé de Mathématiques 130 fr.