

Une nouvelle méthode d'étude des coniques

Les intéressantes études sur les coniques parues dans un récent *Bulletin* me décident à exposer une nouvelle méthode due à M. GARNIER, professeur à la Sorbonne, méthode plus simple que celle de M. LEBESGUE. Elle peut être effectivement utilisée dans une classe de Mathématiques Élémentaires.

Elle consiste à transformer la conique, par une homologie harmonique, en un cercle centré au foyer F :

Soit F le foyer, (D) la directrice, M un point quelconque du plan, MK et FH les perpendiculaires à (D). Construisons le triangle HFM, homothétique du triangle KMF ; M, F, m sont alignés et le centre d'homothétie est le point de rencontre S

de (D) et de MF. On a donc $\frac{\overline{Sm}}{\overline{SF}} = \frac{\overline{SF}}{\overline{SM}}$ ou $\overline{SF}^2 = \overline{Sm} \cdot \overline{SM}$.

Comme S est variable sur (D), on constate que M et m sont conjugués harmoniques par rapport à F et F₁, F₁ étant le symétrique de F par rapport à S.

Par suite, le lieu de F_1 est la droite (D_1) parallèle à D à la distance $\overrightarrow{HH_1} = \overrightarrow{FH}$. La transformation est donc une homologie harmonique de centre F et d'axe (D_1) .

On objectera que l'homologie n'est pas au programme de la classe de Mathématiques Élémentaires. On peut en donner quelques notions aux élèves, mais il est facile de s'en passer en démontrant les propriétés de la transformation comme suit :

1) *construction pratique* : dans l'homothétie, FK et mH sont parallèles, ce qui permet de passer de M à m , et inversement, par une double série de parallèles ;

2) *généralisation* : au lieu de mener MK perpendiculaire à (D) , menons MK' de direction quelconque, puis FH' parallèle à MK' , et enfin $H'm'$ parallèle à FK' . H' et K' sont sur (D) et m' sur Fm , qui coupe (D) en S . On a :

$$\frac{\overrightarrow{Sm'}}{\overrightarrow{SF}} = \frac{\overrightarrow{SH'}}{\overrightarrow{SK'}} = \frac{\overrightarrow{SF}}{\overrightarrow{SM}} \quad \text{ou} \quad SF^2 = \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{Sm'},$$

ce qui montre que m' et m sont confondus.

« La double série de parallèles » peut donc commencer avec une direction quelconque ;

3) *transformées de figures simples* : F est invariant. Les points de (D) correspondent aux points à l'infini.

a) Prenons une droite quelconque (Δ) , lieu de M . Appliquons la construction généralisée, avec K' à l'intersection de (D) et de (Δ) : ainsi K' est fixe, de même que H' , et si M décrit (Δ) , m décrit la droite parallèle à FK' passant par H' . Donc toute droite lieu de M est transformée en une droite et ceci par une construction simple.

b) Soit enfin M sur la conique étudiée $\frac{MF}{MK} = e$ par homothétie $\frac{Fm}{FH} = e$, $Fm = e \cdot FH$ et m est sur le cercle de centre F et de rayon : $e \cdot FH$. Ce cercle correspond point par point à la conique.

Les problèmes usuels sur les coniques, tels que : intersection avec une droite, tangentes, se ramènent immédiatement aux mêmes problèmes sur les figures transformées (cercles et droites). Les discussions et situations peuvent être facilement précisées en remarquant que les points intérieurs à la conique, tels que $\frac{MF}{MK} < e$, sont transformés en points intérieurs au cercle, car : $\frac{Fm}{FH} = \frac{MF}{MK}$, d'où $Fm < e \cdot FH$, et réciproquement.

La seule démonstration délicate et importante concerne la projection du foyer sur la tangente ou sur une droite quelconque : soit toujours FH perpendiculaire à (D) , une droite (Δ) coupant (D) en K' , et FH' parallèle à (Δ) . La transformée (δ) de (Δ) passe par H' et est parallèle à FK' (voir plus haut). On mène Fm perpendiculaire à (δ) et FT perpendiculaire à (Δ) . Le centre de similitude qui fait correspondre $\overrightarrow{mF}$ et $\overrightarrow{FT}$ est sur les cercles $(HH'mF)$ et $(HK'FT)$. C'est donc H . Par suite les triangles HfM et HTF sont semblables et $\frac{TF}{TH} = \frac{Fm}{FH}$.

Si m est sur le cercle (F) de centre F et de rayon $e \cdot FH$, (δ) est tangente à ce cercle, donc (Δ) est tangente (ou asymptote) à la conique. Donc $\frac{TF}{TH} = e$, T est sur le cercle lieu des points dont le rapport des distances à F et H est constant. On introduit ainsi le *cercle principal*.

Si m est intérieur au cercle (F) , (δ) , lui, est sécante et (Δ) est sécante à la conique, par suite $\frac{TF}{TH} < e$; T et F sont du même côté du cercle principal.

De même, si m est extérieur au cercle (F) , (Δ) est extérieure à la conique ; T et F sont de part et d'autre du cercle principal.

Réciproque : Enveloppe du deuxième côté (Δ) d'un angle droit dont le premier côté passe par un point fixe F et dont le sommet T décrit une droite ou un cercle (C).

Passons sur le cas de la droite où l'on retrouve facilement la parabole. Dans le cas du cercle (C), on construit d'abord la directrice (D), comme polaire de F par rapport à (C). Puis le point m tel que les triangles HFm et HTF soient semblables, H étant la projection de F sur la directrice.

D'après le cercle (C), $\frac{TF}{TH} = e$, donc $\frac{Fm}{FH} = e$; m est sur le cercle (F), son transformé M est sur la conique de foyer F, de directrice (D), d'excentricité e , et dont le cercle (C) est principal.

D'après le théorème direct, la projection de F sur la tangente en M est un point T' tel que les triangles HT'F et HFm soient semblables. Donc T' est confondu avec T, et la tangente à la conique en M est bien confondue avec (Δ).

P. JEANGIRARD (C.M. Orléans).