

Sur l'inversion

Une inversion $I(O, K)$, de pôle O , de module K , transforme deux points A et B respectivement en A' et B' . Dans le cas général, la comparaison des longueurs AB , $A'B'$, résulte du fait que les triangles (OAB) et $(OA'B')$ sont inversement semblables. Si O, A, B sont alignés, le calcul est classique.

Ces propriétés peuvent être présentées comme conséquence simple du produit de deux inversions : « Deux figures F_1, F_2 , inverses d'une même figure F dans deux inversions de même pôle $I_1(O, K_1)$ et $I_2(O, K_2)$ sont homothétiques par rapport à O , dans le rapport $K = \frac{K_2}{K_1}$. »

Transformons alors A et B en A_1, B_1 , respectivement, l'inversion ayant pour module $K_1 = OA \cdot OB$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{B_1A_1}$ sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Pour toute autre inversion $I(O, K)$, les inverses A', B' de A et B vérifieront

$$\overrightarrow{A'B'} = \frac{K}{K_1} \overrightarrow{A_1B_1}.$$

On met ainsi en évidence : l'antiparallélisme de AB et $A'B'$; la similitude inverse des triangles OAB et $OA'B'$, et enfin la relation :

$$A'B' = \frac{|K|}{OA \cdot OB} AB. \quad (AB = A_1B_1).$$

Si les points O, A, B sont alignés, on peut préciser cette relation en effectuant d'abord l'inversion de module $K_1 = OA \cdot OB$, qui permute A et B . D'où :

$$\overrightarrow{A'B'} = \frac{K}{OA \cdot OB} \overrightarrow{BA}.$$

A. SEM (Libourne).