

DEUXIÈME PARTIE

Sur une démonstration de la formule donnant $\cos(a - b)$

Il arrive peut-être à certains collègues d'avoir parfois, comme moi, des élèves de Première qui saisissent assez difficilement le sens et la rigueur des théorèmes sur la mesure de la projection d'une somme vectorielle. Il se peut que ces collègues soient intéressés par la démonstration suivante de la formule donnant $\cos(a - b)$ en fonction de $\cos a$, $\sin a$, $\cos b$, $\sin b$; démonstration ne faisant appel essentiellement qu'à l'expression du carré de la distance de deux points en fonction des coordonnées rectangulaires de ces points :

Soient I et J les points représentatifs, sur le cercle trigonométrique, des angles de mesures algébriques a et b , respectivement. Les coordonnées rectangulaires de I sont $x = \cos a$, $y = \sin a$ et celles de J sont $x = \cos b$, $y = \sin b$. $(b - a)$ est la mesure d'un angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OJ})$. Si l'on prend $\vec{OI}$ comme premier vecteur unitaire d'un nouveau système d'axes de coordonnées rectangulaires de même orientation que le précédent : $X'OX$, $Y'OY$; le point J peut être considéré comme point représentatif de l'angle de mesure $(b - a)$ sur le cercle trigonométrique associé à ces nouveaux axes. J a les nouvelles coordonnées rectangulaires $X = \cos(b - a)$ et $Y = \sin(b - a)$ et I a les nouvelles coordonnées $X = 1$, $Y = 0$.

L'expression de $\overline{IJ}^2$ dans chaque système de coordonnées donne l'égalité :

$$(\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 = [\cos(a - b) - 1]^2 + \sin^2(a - b).$$

Après des réductions que l'élève de Première moyen peut avoir la satisfaction de trouver lui-même, on a la formule cherchée.

Sources : On trouve dans des manuels de trigonométrie britanniques une démonstration voisine de la précédente, attribuée au professeur R. S. HEATH, basée sur la double expression de $\overline{IJ}^2$ en fonction : 1° des coordonnées $\cos a$, $\sin a$, $\cos b$, $\sin b$; — 2° des côtés OI , OJ du triangle OIJ et du cosinus de l'angle compris entre ces côtés.

F. VIVIEN (*Lycée de Londres*).

N.-B. — L'auteur de cette note exprime le vœu que les examinateurs au Baccalauréat veuillent bien accepter cette méthode que les élèves trouvent souvent plus simple que la méthode par projections que certains voudraient imposer.