

DEUXIÈME PARTIE

Symbolisme, terminologie et définitions

Dans leur ouvrage de Géométrie pour la classe de Mathématiques, paru récemment chez Hachette, nos collègues MAILLARD et MILLET déconseillent (note du bas de la page 45), pour représenter un angle orienté, toute autre notation que celle qui consiste à mettre entre parenthèses les noms des deux droites ou des deux vecteurs en cause, séparés par un virgule. Comme nous avons employé, mon collègue MITAULT et moi, des notations différentes dans tous nos ouvrages de Mathématiques, il est juste que j'indique ici ce qui nous a guidé dans le choix de ces notations.

Tout le monde étant d'accord sur les trois notations \overrightarrow{AB} , \overline{AB} , AB pour désigner respectivement le vecteur d'origine A et d'extrémité B, sa mesure algébrique sur un axe de même direction et sa grandeur (ou la mesure de sa grandeur, aucune confusion n'étant à craindre), nous avons cru qu'il serait bon d'avoir des notations analogues pour un angle orienté, qu'il soit de demi-droites, de droites ou de vecteurs. La généralisation de la notion d'angle orienté permettant presque toujours de se passer de la grandeur de tels angles, il suffisait donc d'avoir deux notations pour

chacune des trois catégories d'angles orientés. Pour ne pas trop s'écarter des deux notations déjà admises, à savoir \overrightarrow{AB} et \overleftarrow{AB} , il semblait logique de faire appel à \overrightarrow{AOB} et \overleftarrow{AOB} , à $\overrightarrow{D, D'}$ et $\overleftarrow{D, D'}$, à $\overrightarrow{AB, CD}$ et $\overleftarrow{AB, CD}$. C'est ce que nous avons fait. Les deux dernières sont les moins esthétiques à cause d'un développement en hauteur un peu trop grand. Dans l'espace, naturellement, nous avons pris des notations analogues, \overrightarrow{PABQ} , \overleftarrow{PABQ} , pour un dièdre orienté et sa mesure algébrique, $\overrightarrow{P, P'}$, $\overleftarrow{P, P'}$, pour un angle orienté de plans et sa mesure algébrique ; remarquer que, pour un dièdre \overrightarrow{PABQ} , la flèche indique en même temps, par convention, le sens positif choisi sur l'arête.

Pour ce qui est de la notation (D, D') , couramment utilisée, puisqu'il faut bien l'avouer, lui fait-on désigner un être géométrique ou sa mesure algébrique ? Si, probablement, c'est tantôt l'un, tantôt l'autre, car on aime bien se débarrasser le plus souvent de l'arbitraire qu'il y a à orienter le plan, il peut y avoir ambiguïté. On peut en dire autant de la notation $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$. De plus, si cette dernière se justifie d'elle-même pour deux vecteurs liés d'origines différentes, elle paraît surchargée pour deux vecteurs de même origine.

Indépendamment des notations utilisées, signalons un fait qui a son importance. Toute écriture étant destinée à être lue, comment doit-on lire la notation (D, D') ou toute autre équivalente décemment acceptable ? Si l'on doit persister à appeler angle d'une droite D avec une droite D' un angle (D', D) , il faut renoncer à lire l'écriture (D, D') *D avec D'* : on peut alors choisir parmi les appellations D à D' *D vers D'*, DD' (tout court). Mais, en aucun cas, nos élèves ne doivent faire les frais d'une confusion quelconque dans la terminologie.

Une autre notation, sur laquelle l'entente paraît difficile à faire, est celle qui consiste à désigner la puissance d'un point donné pour un cercle donné ou une sphère donnée. Comme une notation n'est vraiment avantageuse que si elle est succincte, nous avons adopté dans nos ouvrages \overline{P}_O pour désigner la puissance du point P pour le cercle (ou la sphère) de centre O , en conseillant aux élèves de la lire *puissance de P pour O*, le trait rappelant le mot puissance. S'il faut une lettre pour rappeler le mot puissance, une autre pour rappeler le point en cause et une troisième pour rappeler le cercle (ou la sphère) dont il s'agit, accompagnées d'une parenthèse et peut-être même d'une virgule, je crois qu'on s'éloigne de la brièveté.

Je viens de dire *puissance de P pour O* au lieu de *puissance de P par rapport à O* : c'est plus court, tout aussi expressif et supprime un peu le mot rapport du vocabulaire mathématique qui, vraiment, en abuse. Dans les mêmes conditions, nous disons symétrie pour un point, symétrie pour un plan, points conjugués harmoniques pour deux points donnés, points conjugués pour un cercle, polaire d'un point pour deux droites ou pour un cercle, etc., etc.

Puisque nous en sommes à examiner la terminologie, quand nous déciderons-nous à remplacer par d'autres certains mots du vocabulaire mathématique, comme *lieu* et *déplacement*, pour ne citer que ceux-là. Tout le monde s'accorde à les trouver défectueux, mais, malgré cela, ils ont la vie dure. De combien de fautes, chez le débutant surtout, le mot lieu, à lui tout seul, est-il responsable du fait qu'il y a souvent hésitation entre le sens donné à ce mot par définition mathématique et le sens qu'il a dans le langage courant ? La marche suivie pour la recherche d'un lieu ne fait qu'aggraver cette hésitation et, au surplus, en associant au mot lieu le qualificatif limité (cette habitude semble perdue maintenant), on ne fait qu'augmenter la confusion entre les deux sens. Il vaudrait bien mieux, à mon avis, n'avoir aucun mot qu'un mot aussi néfaste que le mot lieu. On dirait aussi bien : la totalité (ou l'ensemble) des points équidistants des extrémités d'un segment constitue (ou est) la médiatrice du segment. Mais il n'est peut-être pas impossible de trouver un mot

nouveau, quitte à franciser élégamment le mot utilisé dans une autre langue pourvu que celui-ci corresponde bien à ce qu'il doit dire.

Pour le mot *déplacement*, c'est plus délicat, car il semble lié, qu'on le veuille ou non, au mot *symétrie*. Dans notre Cours de Mathématiques, édité par Istra, nous étudions d'abord les *transformations ponctuelles conservant les longueurs* (le segment joignant deux points quelconques est égal au segment joignant les deux points homologues) et nous les classons ensuite en *déplacements* (le sens des dièdres orientés de grandeur saillante est conservé) et en *symétries* (le sens de ces dièdres est renversé). M. BOULIGAND utilise les mots *déplacement* et *antidéplacement*. Si le premier n'était pas défectueux, le deuxième serait parfait. Comme l'homothétie donne d'une figure une figure homothétique, l'inversion une figure inverse (les substantifs ont évidemment donné naissance aux adjectifs — à moins que ce ne soit le contraire) et un déplacement une figure égale, on pense tout de suite à remplacer le mot déplacement par le mot *égalité* (cette fois-ci, sans aucun doute, l'adjectif donne naissance au substantif). Le mot égalité étant retenu, on pourrait compléter par le mot *antiégalité*; je lui préférerais cependant le mot *opposition*. On appellerait alors figures opposées deux figures en correspondance ponctuelle, telle que les longueurs homologues sont égales et les dièdres homologues (de grandeur saillante) de sens contraires. C'est ce que dans notre cours nous avons appelé figures symétriques, car il fallait un mot : il n'était peut-être pas trop mal choisi puisque la symétrie pour un point ou pour un plan (dans l'espace), la symétrie pour une droite (dans le plan) donnent d'une figure une figure « opposée ».

Si l'on met le mot symétrie (tout court) à la place du mot opposition, comme nous l'avons fait avec MITAULT, il faut alors se débarrasser de la terminologie *symétrie pour une droite dans l'espace* et *symétrie pour un point dans le plan*, puisque ce sont des déplacements; nous avons alors utilisé les expressions *transposition autour d'une droite* et *transposition autour d'un point*.

J'avoue que je préférerais un couple de mots nouveaux — mettons égalité et opposition pour fixer les idées — pour pouvoir conserver au mot symétrie son sens de toujours, à savoir correspondance ponctuelle qui, au segment joignant deux points homologues quelconques, donne un milieu fixe, ou une médiatrice fixe, ou un médiateur fixe. Les trois symétries sont alors incluses dans les transformations ponctuelles conservant les longueurs, les unes à titre d'« égalité », les autres à titre d'« opposition » (cela dépend de la parité des dimensions de l'espace envisagé).

Passons maintenant aux définitions : il s'agira simplement des définitions concernant les transformations ponctuelles. On dit peut-être un peu trop hâtivement qu'une propriété caractéristique de l'homothétie est de transformer les vecteurs en vecteurs proportionnels et qu'une propriété caractéristique de l'inversion est d'avoir deux couples de points homologues quelconques cocycliques ou exceptionnellement alignés. Cependant si l'on définit l'homothétie par $\overrightarrow{OP'} = k \overrightarrow{OP}$, la première propriété n'est nullement caractéristique puisque la translation la possède aussi et que celle-ci n'est pas incluse dans la définition de l'homothétie. De même, si l'on définit l'inversion par $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = k$, la deuxième propriété n'est nullement caractéristique puisque la symétrie pour une droite dans le plan et la symétrie pour un plan dans l'espace la possèdent aussi et que ces deux symétries ne sont pas incluses dans la définition de l'inversion. Je sais bien que, dans un cas comme dans l'autre, on peut, par passage à la limite, etc., etc...

Ne pourrait-on donner une définition de l'homothétie dans laquelle serait incluse la translation, une définition de l'inversion dans laquelle seraient incluses la symétrie pour une droite dans le plan et la symétrie pour un plan dans l'espace ?

Pour l'homothétie, il n'y a qu'à prendre la définition suivante : A, A' étant deux points donnés et k un scalaire donné, on appelle homothétie (A, A', k) la transformation qui, à tout point P associe le point P' tel que $\overrightarrow{A'P'} = k \overrightarrow{AP}$. On remarque que, si P est en A, P' est en A' : donc A et A' sont homologues. Si B et B'

sont homologues, on voit que l'homothétie (B, B', k) coïncide avec l'homothétie (A, A', k) . S'il y a un point double O , on a alors $\vec{AO} = k \vec{AO}$ ou $\vec{OA'} = k \vec{OA}$ (ceci suppose $k \neq 1$ et donne alors un seul point double) et l'homothétie (A, A', k) peut s'appeler (O, O, k) ou simplement (O, k) : la loi de correspondance est alors $\vec{OP} = k \vec{OP}$. On retrouve l'homothétie habituelle, nous dirons ici *homothétie normale*. S'il n'y a pas de point double, c'est que $k = 1$: la loi de correspondance est alors $\vec{AP'} = \vec{AP}$: il s'agit de la translation $(\vec{AA'})$, nous l'appellerons ici *homothétie singulière*. Si, au lieu de faire brutalement $k = 1$, on fait tendre k vers 1, l'homothétie (A, A', k) , d'abord normale (il y a un point double) devient singulière (le point double disparaît à l'infini dans la direction AA').

Au surplus, si I est un point fixe quelconque, la relation $\vec{AP'} = k \vec{AP}$ conduit à une relation équivalente de la forme $\alpha \vec{IP'} + \alpha' \vec{IP} = \vec{V}$: l'homothétie est alors caractérisée par une relation (que l'on peut dire) *linéaire* entre les vecteurs $\vec{IP}, \vec{IP'}$. Toutes les questions relatives à l'homothétie s'étudient aisément à partir de l'une ou l'autre des deux relations précédentes, en particulier la question du produit de plusieurs homothéties.

Pour l'inversion, guidés par le fait qu'une propriété caractéristique doit être la cocyclicité ou, exceptionnellement, l'alignement de deux couples de points homologues quelconques, nous pouvons la définir ainsi : $(A, A'), (B, B')$ étant deux couples de points appartenant à un même cercle, associons à un point quelconque P le point P' situé sur la droite d'intersection des plans $AA'P, BB'P$, ainsi que sur les cercles de mêmes noms : on constate aisément que ceci est possible, non seulement dans le cas où AA' et BB' se coupent en un point O , mais aussi dans le cas du parallélisme. Remarquons que la sphère $AA'BB'P$ aurait pu jouer le même rôle que le couple de cercles $AA'P, BB'P$. Si P est pris dans le plan $AA'BB'$ (ce qui liquide ainsi le cas de la géométrie plane), il suffit des deux cercles mentionnés pour définir P' , l'un d'eux devant être remplacé par une droite si P est pris sur AA' ou BB' . Si P est pris sur le cercle $AA'BB'$, on définit P' par un passage à la limite.

Dans le cas où AA' et BB' se coupent en O , on reconnaît liant P et P' l'inversion habituelle de pôle O et de puissance $\overline{OA} \cdot \overline{OA'}$ ou $\overline{OB} \cdot \overline{OB'}$, nous l'appellerons *inversion normale* (il y a un pôle). Dans le cas où AA' et BB' sont parallèles, on reconnaît, liant P et P' , la symétrie pour le médiateur de AA' , nous l'appellerons *inversion singulière* (il n'y a pas de pôle). Tout ceci prouve, en outre, qu'on peut considérer $(A, A'), (B, B')$ comme couples de points homologues : l'inversion est donc définie par un couple de points homologues, nous la noterons ici inversion $[(A, A'), (B, B')]$.

L'inversion étant ainsi définie, il est clair qu'elle a pour propriété caractéristique d'avoir deux couples de points homologues quelconques cocycliques ou, exceptionnellement, alignés. Remarquons aussi que, si $(P, P'), (Q, Q')$ sont deux couples de points homologues quelconques dans l'inversion $[(A, A'), (B, B')]$, l'inversion $[(P, P'), (Q, Q')]$ coïncide avec la première.

Si, BB' n'étant pas parallèle à AA' , on fait tendre, sur le cercle $AA'B, B'$ vers B'' , tel que BB'' soit parallèle à AA' , l'inversion, d'abord normale (il y a un pôle), devient singulière (le pôle disparaît à l'infini dans la direction AA').

Terminons par une remarque sur l'inversion qui peut être intéressante au point de vue exercices et qui prouve en même temps que les domaines où le vecteur peut avoir droit de cité sont plus nombreux qu'on ne le croit. Il s'agit de l'inversion normale (O, k) . La relation entre un point P et son homologue P' , à savoir

$OP \cdot OP' = k$, peut s'écrire $\vec{OP'} = \frac{k}{OP^2} \vec{OP}$. Notons que cette forme donne immé-

diatement, dans un système d'axes de coordonnées rectangulaires d'origine O, les coordonnées x', y' de P' en fonction des coordonnées x, y de P, à savoir

$$x' = \frac{kx}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{ky}{x^2 + y^2},$$

et donc aussi, par réciprocité, $x = \frac{kx'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{ky'}{x'^2 + y'^2}$. Appliquée à deux couples de points homologues (P, P'), (Q, Q'), elle conduit, par combinaison et utilisation des barycentres, à la relation $\vec{P'Q'} = k \left(\frac{1}{OQ^2} - \frac{1}{OP^2} \right) \vec{OT}$, T étant le pied, sur la droite PQ, de la tangente en O au cercle OPQ. On suppose, naturellement, $OP \neq OQ$; dans le cas contraire, on a immédiatement $\vec{P'Q'}$ en fonction de \vec{PQ} . A partir de là, on peut faire toutes les spéculations habituelles sur l'inversion : à être d'exercice, c'est assez curieux.

R. ESTÈVE.