

V. Document officiel

Rapport sur le concours général de mathématiques pour la classe de Première, en 1950

[Le Jury était composé ainsi : M. DESFORGE, inspecteur général, président ; Mlle BARBIER, professeur de mathématiques au lycée Victor-Duruy ; Mlle LECONTE, professeur de mathématiques supérieures au lycée Fénelon ; M. FLAVIEN, professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand ; M. ITARD, professeur de mathématiques supérieures au lycée Henri-IV ; M. MIRABEL, professeur de mathématiques supérieures au lycée Saint-Louis].

L'énoncé proposait l'étude de quelques propriétés des droites tangentes à la fois à deux sphères données, extérieures l'une à l'autre. Il ne pouvait être question, au niveau de la Première, de laisser aux candidats une grande liberté pour procéder à l'examen d'un problème dont les éléments ne devaient guère leur être familiers, car la notion de droite tangente à une sphère n'est pas particulièrement développée dans le programme de cette classe. Il a donc paru convenable de donner au départ des indications précises, afin d'orienter la recherche dans une direction raisonnable, et afin d'établir quelques résultats simples permettant ensuite d'aborder les parties plus difficiles. D'ailleurs, tenant compte de l'expérience des concours antérieurs, il était intéressant de ne pas se borner à des questions de géométrie, et de faire appel, d'une façon assez substantielle, aux connaissances que doivent acquérir les élèves en algèbre et en trigonométrie.

Le début avait essentiellement pour objet d'éviter aux candidats de fâcheux contresens au sujet des tangentes communes à deux sphères, en leur donnant le moyen de construire simplement l'une quelconque de ces droites, et en leur faisant prendre conscience, à partir d'une figure élémentaire très maniable, de la nature et de quelques propriétés immédiates des êtres géométriques qu'ils avaient à étudier.

Il s'agissait d'abord de déterminer les tangentes communes aux deux sphères (A) et (B) passant par un point P de la sphère (A), et de discuter leur nombre. Les résultats ont été assez généralement énoncés d'une façon correcte, mais les démonstrations sont trop souvent incomplètes ; une suite d'affirmations exactes ne constitue pas obligatoirement une solution ; les défauts de raisonnement que l'on relève à cet égard dans de nombreuses copies, même dans les meilleures, semblent provenir pour beaucoup d'une certaine négligence dans l'effort d'analyse des idées que l'on veut exposer et dans la mise au point d'une rédaction fidèle, et aussi d'une certaine confusion entre les notions de « condition nécessaire » et de « condition suffisante ». Ne peut-on demander à des élèves de Première de comprendre les différences de sens que présentent des propositions telles que les suivantes, toutes les trois relatives à une sphère (B) et à un cercle (γ) de cette sphère :

« les tangentes au cercle (γ) sont tangentes à la sphère (B) ;

« les tangentes à la sphère (B), situées dans le plan du cercle (γ) sont tangentes au cercle (γ) ;

« les tangentes à la sphère (B), situées dans le plan du cercle (γ), sont les tangentes au cercle (γ) » ? Il peut être fort utile de procéder parfois à une étude grammaticale des mots et des phrases que l'on emploie dans certaines démonstrations.

Supposant ensuite le point P pris sur un demi-grand cercle (α_1) de la sphère (A), limité par la droite des centres A, B des deux sphères, on demandait de définir l'arc sur lequel doit se trouver le point P pour qu'il existe au moins une tangente commune passant par P. La plupart des candidats se bornent à faire des constatations sur la figure, sans essayer de présenter une justification logique qui était cependant à leur portée : le calcul de la distance du centre B à la tangente au demi-cercle (α_1) en un point quelconque P, en fonction du rayon a de (A), de la distance $2d$ des centres et de l'angle λ des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$, puis la comparaison de cette distance au rayon b de (B) conduisaient à la condition

$$|a - 2d \cos \lambda| \leq b,$$

équivalente à la double inégalité

$$a - b \leq 2d \cos \lambda \leq a + b,$$

qui précisait les limites entre lesquelles doit être compris $\cos \lambda$ pour que le point P vérifie la condition demandée ; l'arc utile du demi-cercle (α_1) s'en déduisait, et l'interprétation géométrique des positions limites confirmait sans difficulté les remarques intuitives suggérées par l'examen de la figure. Ces résultats s'appliquent, avec des changements évidents, à un point Q de la sphère (B), et l'on obtient ainsi une détermination rigoureuse des lieux géométriques des points de contact des tangentes communes avec l'une et l'autre des sphères données.

Le calcul des hauteurs et des aires des zones sphériques constituant ces lieux n'exigeait qu'un peu d'attention (l'explication géométrique de l'égalité des hauteurs, qui se rattache simplement aux propriétés de l'axe radical de deux cercles, n'était, bien entendu, pas demandée) ; il est assez correctement présenté dans les bonnes copies, mais il donne à beaucoup l'occasion de commettre des erreurs et des maladresses qu'un contrôle rapide ou un instant de réflexion auraient souvent permis de redresser ou d'éviter.

La partie II du problème concernait le cas des sphères égales et commençait par l'étude de la projection orthogonale F du milieu O du segment AB sur une tangente commune PQ. Une application immédiate du théorème de Thalès, puis l'égalité des triangles rectangles FPA et FQB permettaient d'établir successivement que F est le milieu du segment limité par les points de contact P et Q et que la droite OF est en général la perpendiculaire commune aux deux droites AB et PQ (par précaution, l'énoncé attirait l'attention sur les tangentes communes situées dans un plan passant par AB). La représentation des projections orthogonales de la figure formée par les cinq segments AB, PQ, AP, OF, BQ, faites sur un plan parallèle à AB et PQ, puis sur un plan perpendiculaire à PQ, puis sur un plan perpendiculaire

à AB, fournissait ensuite aux candidats l'occasion de voir avec netteté la disposition dans l'espace des éléments qu'ils devaient un peu plus loin étudier au point de vue métrique.

Les premières questions sont traitées, plus ou moins habilement, dans un grand nombre de copies ; pourtant, la démonstration de l'orthogonalité des droites AB et OF a été assez souvent inachevée ou laissée de côté. Quant à la justification de la forme des trois projections, qui ne faisait appel qu'à des résultats très élémentaires sur la projection du milieu d'un segment et sur la projection d'un angle droit, elle n'apparaît que dans une douzaine de compositions ; très rares sont celles qui signalent la différence que présentent, malgré leur analogie d'apparence, les deux projections sur les plans perpendiculaires à AB et à PQ, en ce qui concerne la conservation de certaines longueurs et de certains angles.

Le travail ainsi préparé, le calcul (en fonction de a , de d et du cosinus de l'angle λ des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$) des longueurs PQ et OF et des cosinus des trois angles $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$, $(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB})$ et $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BQ})$, ne mettait en œuvre que l'application de résultats classiques aux configurations géométriques qui venaient d'être précisées. Différentes méthodes, plus ou moins compliquées, ont été utilisées par la cinquantaine de candidats qui ont abordé valablement cette question ; une manière logique de conduire les opérations était de calculer les segments PB et PO dans les triangles PAB et PAO, et d'en déduire, à partir de triangles rectangles et de triangles isocèles mis précédemment en évidence, les cinq expressions demandées. Si la détermination des longueurs PQ et OF a été faite correctement par une trentaine de candidats, celle des cosinus a été beaucoup moins bien réussie et une quinzaine seulement donnent des formules exactes, au moins pour l'un ou l'autre des angles.

La fin de cette deuxième partie comportait l'étude des trois cosinus ainsi calculés, considérés comme fonctions de la variable $x = \cos \lambda$. Deux d'entre elles apparaissaient comme des fonctions homographiques et la troisième comme une fonction linéaire de x , les coefficients dépendant simplement du paramètre $m = \frac{a}{d}$, compris entre 0 et 1 ; la variable indépendante restait comprise dans l'intervalle (0, m) dont les limites avaient été trouvées dans la première partie du problème. La construction des courbes représentatives des trois fonctions dans un même système d'axes de coordonnées, la détermination des tangentes à ces courbes en quelques points remarquables, et la recherche de leurs positions relatives, étaient demandées seulement dans l'hypothèse $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ces questions classiques n'exigeaient, pour être bien traitées, qu'un peu d'ordre et de méthode ; ayant constaté qu'à l'extrémité 0 de l'intervalle de variation de x les deux fonctions homographiques prenaient la même valeur $\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}$, et qu'à l'extrémité m les trois fonctions

étaient égales à (-1) , les différences $y - z$, $y - u$, $z - u$ de ces fonctions prises deux à deux apparaissaient elles-mêmes comme des fonctions de x dont le signe dépendait des signes de binômes du premier degré très simples : on déduisait facilement de là la place de chacune des courbes par rapport aux deux autres, et la détermination des tangentes aux points limitant les arcs utiles des deux hyperboles permettait un contrôle des résultats.

Ce petit problème d'algèbre a été très généralement délaissé. Il est commencé correctement dans une dizaine de compositions, mais n'est achevé dans aucune. Il est bon de signaler quelques copies, très rares, où apparaît la très louable préoccupation de ne pas perdre de vue l'origine des éléments étudiés et de rétablir de temps en temps la liaison entre les opérations algébriques et les propriétés géométriques de la figure initiale : constater que les angles $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$ et $(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB})$ sont toujours obtus, — qu'ils ne sont égaux entre eux que pour les valeurs extrêmes de λ , correspondant du reste aux tangentes communes situées dans un plan passant par AB, — que l'angle des rayons AP et BQ prend au contraire toutes les valeurs possibles..., constitue un ensemble de remarques sans doute élémentaires, mais qui n'en sont pas moins intéressantes, d'autant plus que certaines d'entre elles conduisent à des vérifications de bon sens, toujours fort utiles.

La dernière partie introduisait d'abord la sphère (S), lieu des sommets des cônes de révolution égaux circonscrits aux deux sphères (A) et (B), supposées maintenant inégales ($a > b$). Le calcul préalable, suggéré par l'énoncé, des sinus des demi-angles au sommet des cônes circonscrits à (A) et à (B) ayant pour sommet un point *quelconque* M de l'espace, facilitait la recherche et permettait de ramener, par un raisonnement très bref ne faisant intervenir que des conditions à la fois nécessaires et suffisantes, la détermination du lieu demandé à celle, classique, du lieu des points dont le rapport des distances aux centres A et B est égal au rapport des rayons correspondants a et b .

La plupart des compositions, assez nombreuses, où cette question est traitée, exposent la solution en commençant par la phrase habituelle : « Soit M un point appartenant au lieu cherché... », phrase qui amorce une chaîne de déductions ne pouvant conduire qu'à « des conditions nécessaires », et l'étude d'une réciproque s'impose alors logiquement. C'est bien là la démarche naturelle de la pensée en présence d'un problème nouveau, et c'est ainsi que, très normalement, l'on franchit l'étape de la découverte ; mais, au moment de la mise en forme définitive du raisonnement et des résultats, une réflexion critique peut intervenir, qui fera parfois apparaître que les deux phases « aller » et « retour » peuvent être condensées en une seule, à condition, bien entendu, de modifier la phrase d'introduction. Ce mode de présentation, qui n'est pas en général un mode d'investigation, et qui consiste, en fait, à faire apparaître une suite de transformations dont chacune remplace un problème par un problème équivalent, paraît accessible aux élèves de Première, pourvu qu'on leur en explique le mécanisme avec beaucoup de soin, et d'abord sur des exemples très simples et très clairs.

Ces remarques sont également valables pour les « problèmes de construction ».

L'énoncé attirait l'attention sur les points I et J de la sphère (S) situés sur la ligne des centres AB ; sans sortir du programme de la classe, ces points apparaissaient naturellement comme les centres d'homothétie des grands cercles, sections des sphères (A) et (B) par un plan passant par la droite AB.

L'étude des projections orthogonales H et K des points I et J sur l'une quelconque des tangentes communes aux sphères (A) et (B) constituait l'essentiel des dernières questions.

Par analogie avec le mode de raisonnement utilisé au début de la deuxième partie, l'application du théorème de Thalès aux deux droites PQ et AB, coupées par les quatre plans projetant orthogonalement, sur la tangente commune PQ, les quatre points de la division harmonique A B I J, permettait d'établir la similitude des triangles PAH et QBH, ainsi que celle des triangles PAK et QBK ; l'on en déduit immédiatement que les points H et K appartiennent à la sphère (S). Ces faits sont correctement présentés par une trentaine de candidats, qui ont également, presque tous, indiqué que les droites HI et KJ (lorsqu'elles existent) étaient respectivement bissectrice intérieure du triangle H A B et bissectrice extérieure du triangle K A B, mais aucun n'a songé à compléter ces remarques en étudiant les autres bissectrices des angles $\widehat{AHB}$ et $\widehat{AKB}$.

On proposait ensuite, en vue de préparer la recherche précise des lieux géométriques des points H et K, de déterminer les centres d'homothétie des deux cercles suivant lesquels le plan (R) perpendiculaire en H à la droite IH coupe les sphères (A) et (B), dans le cas général où la tangente commune PQ ne passe ni par I, ni par J, c'est-à-dire n'est pas dans un plan passant par la droite AB. D'abord, on établit facilement que le plan (R) est sécant pour chacune des sphères (A) et (B), puisqu'il contient les points P et Q de ces sphères sans être perpendiculaire à l'un ou à l'autre des rayons AP et BQ (sinon AP ou BQ serait parallèle à la normale IH au plan, et les deux droites AB et PQ seraient dans un même plan). Il est alors naturel de prendre comme plan de figure le plan ABH, qui est plan de symétrie pour l'ensemble des sphères (A), (B), (S) et pour le plan (R), donc pour les cercles de section (A') et (B') des sphères (A) et (B) par le plan (R) : la ligne des centres A' et B' de ces deux cercles n'est autre que la trace R' de (R) sur le plan ABH, trace perpendiculaire en H à IH et qui passe, par conséquent, par le point J diamétralement opposé à I sur la sphère (S). La droite PQ, tangente aux deux cercles (A') et (B'), coupant la droite des centres A'B' au point H, intérieur au segment PQ (puisque I est intérieur au segment AB), le point H apparaît comme le centre d' « homothétie négative » des deux cercles ; le point J est donc le centre d' « homothétie positive », puisque la division A'B'HJ, projection orthogonale de la division ABIJ sur la droite A'B', est harmonique. Le raisonnement peut du reste être présenté autrement, une fois constaté que la trace R' de (R) passe par

le point J : ce point étant centre d'homothétie des grands cercles de (A) et de (B) situés dans le plan de symétrie ABH, les cordes que ces deux grands cercles découpent sur la trace JA'B' sont homologues dans cette homothétie de centre J, et les deux cercles (A') et (B') ayant ces cordes pour diamètres admettent eux-mêmes J comme centre d'homothétie ; l'autre centre est par conséquent le point H, conjugué harmonique de J par rapport aux centres A' et B'. Les résultats analogues relatifs au point K et au plan perpendiculaire en K à la droite JK s'énoncent aisément.

Cette étude, un peu plus délicate, a été abordée convenablement, sinon adroitement, dans une quinzaine de copies, mais bien rares sont celles où est situé exactement le second centre d'homothétie des deux cercles, faute d'avoir vu, en général, que le plan perpendiculaire en H à IH passe par le point J.

La détermination du lieu géométrique de la projection orthogonale du point I sur les tangentes communes à (A) et à (B) est préparée par la connaissance des propriétés précédentes. On sait déjà que ce lieu est porté par la sphère (S), et, plus précisément, que tout point H' du lieu, correspondant à une tangente commune ne rencontrant pas la droite AB, est un point de (S) tel que le plan perpendiculaire en H à IH est sécant pour les sphères (A) et (B).

Pour les tangentes communes rencontrant la droite AB, qu'il est commode d'étudier d'abord, elles coïncident avec les génératrices des deux cônes circonscrits aux sphères (A) et (B) ayant pour sommets les points I et J : le lieu des projections de I sur les droites de ces deux familles comprend, d'une part le point I, d'autre part le cercle (h_0) de la sphère (S) décrit par la rotation autour de AB de la projection orthogonale H_0 du point I sur l'une des tangentes communes passant par J.

Il reste alors à étudier les points N de (S), distincts de I, tels que le plan (T) perpendiculaire en N à IN soit sécant pour les sphères (A) et (B). Le point N ne pouvant être confondu avec le point J d'après cette dernière hypothèse (car le plan perpendiculaire à IJ au point J est extérieur aux deux sphères), le plan ABN est bien défini et forme plan de symétrie pour l'ensemble des trois sphères et du plan (T) ; on retrouve alors, aux notations près, une figure déjà rencontrée, et l'on a justement établi tout à l'heure que le plan (T) passait par le point J et que les centres d'homothétie des deux cercles, sections de (A) et (B) par le plan (T) étaient le point J et le point N, — le raisonnement utilisant uniquement le fait que le point J est centre d'homothétie des deux grands cercles des sphères (A) et (B) situés dans le plan méridien ABN, et que les points N et J sont conjugués harmoniques par rapport aux centres des cercles sections de (A) et (B) par le plan (T), cercles qui sont évidemment extérieurs l'un à l'autre. Dès lors, par le point N passent deux tangentes communes à ces deux derniers cercles, donc aux sphères (A) et (B), et ce point N est bien la projection orthogonale de I sur une tangente commune aux deux sphères.

Ainsi, en dehors du point I et du cercle (h_0), le lieu géométrique cherché

coïncide avec le lieu des points N de (S) tels que le plan perpendiculaire en N à IN soit sécant aux sphères (A) et (B), c'est-à-dire tels que la droite JN soit sécante à ces deux sphères. La définition précise du lieu en résulte : il est formé par la calotte sphérique (S_1) et (S) contenant le point I et limitée au cercle (h_0) ; c'est aussi la partie de (S) située à l'intérieur du cône circonscrit aux sphères (A) et (B) ayant pour sommet le point J.

L'étude est analogue pour les projections du point J ; elle fait apparaître comme lieu la calotte sphérique (S_j) de (S) située à l'intérieur du cône circonscrit aux deux sphères (A) et (B) ayant pour sommet le point I.

La détermination de la distance IJ et des hauteurs h et k de ces deux calottes sphériques se ramenait à un calcul élémentaire de géométrie plane, qui pouvait, par exemple, faire intervenir les sinus des demi-angles au sommet des cônes circonscrits à la fois aux sphères (A) et (B). On constatait incidemment que les aires des deux calottes (S_1) et (S_j) ne dépendent pas de la distance des centres AB, ce qui s'explique par les propriétés harmoniques de la division ABIJ : en projetant successivement cette division sur un plan perpendiculaire à une tangente commune extérieure (passant par J), et sur un plan perpendiculaire à une tangente commune intérieure (passant par I), on établit facilement que les distances de I à une tangente commune extérieure et de J à une tangente commune intérieure sont les moyennes harmoniques respectivement du couple de nombres (a, b) et du couple ($-a, b$), et ces distances, indépendantes de d , sont justement les rayons des cercles ayant des aires équivalentes à celles des calottes (S_1) et (S_j).

La comparaison de la somme des hauteurs k et h à la distance IJ donnait immédiatement la condition nécessaire et suffisante pour que les deux calottes (S_1) et (S_j) aient une partie commune (pouvant se réduire, comme cas limite, à un cercle). Avec les notations de l'énoncé, cette condition est :

$$2d^2 \leq a^2 + b^2,$$

évidemment compatible avec l'hypothèse des sphères extérieures l'une à l'autre. Une interprétation géométrique simple peut en être donnée en faisant intervenir les cercles orthoptiques des cercles méridiens des deux sphères (A) et (B) dans un plan passant par AB. Le cas limite, correspondant à l'égalité, se présente lorsque, dans un plan méridien passant par AB, l'une des tangentes communes intérieures est perpendiculaire à l'une des tangentes communes extérieures, ou encore lorsque les cercles orthoptiques des deux cercles méridiens sont orthogonaux.

Six candidats ont abordé l'étude de ces lieux géométriques et ont donné, sinon des raisonnements complets, du moins des indications raisonnables et ont obtenu quelques résultats corrects.

L'énoncé proposait enfin la détermination des génératrices communes aux deux cônes de révolution égaux (M, A) et (M, B), circonscrits respectivement aux sphères (A) et (B), ayant pour sommet un point quelconque M de (S), qu'on peut naturellement supposer distinct de I et de J. Il revient évidemment au même de chercher les droites passant par M, tangentes communes aux sphères (A) et (B), et la question se liait ainsi aux résultats

précédemment acquis : il suffit de remarquer que les projections orthogonales H et K des points I et J sur l'une quelconque des tangentes communes sont deux points distincts, puisqu'ils sont conjugués harmoniques par rapport aux points de contact P et Q d'une telle droite avec (A) et (B) (sans pouvoir se confondre avec l'un de ces points P ou Q) ; ces points H et K étant sur la sphère (S), il en résulte que chaque tangente commune coupe (S) en deux points distincts, qui sont les projections orthogonales sur elle-même des points I et J.

En conséquence, les génératrices communes aux deux cônes (M, A) et (M, B) coïncident avec les tangentes communes aux sphères (A) et (B) qui sont perpendiculaires en M, soit à la droite IM, soit à la droite JM, c'est-à-dire qui sont situées, soit dans le plan (U) perpendiculaire en M à IM, soit dans le plan (V) perpendiculaire en M à JM. On est ainsi ramené à un problème déjà étudié : le plan (U), qui passe par J, contient deux génératrices communes si le point M est sur la calotte sphérique (S_1) ; lorsque M n'est pas sur le cercle de base limitant (S_1), ces deux génératrices sont distinctes et coïncident avec les tangentes communes intérieures aux deux cercles sections de (A) et (B) par le plan (U) ; si M est sur le cercle de base, elles sont confondues avec la tangente commune JM, le long de laquelle les deux cônes sont tangents. Les résultats sont analogues avec le plan (V), qui passe par I ; ils font intervenir la calotte sphérique (S_2).

La discussion du nombre des génératrices communes aux cônes (M, A) et (M, B) se déduit facilement de là ; ce nombre varie de zéro à quatre, suivant que les calottes sphériques (S_1) et (S_2) n'empiètent pas ou empiètent l'une sur l'autre, et suivant la position du point M sur l'une ou l'autre des zones définies sur la sphère (S) par les cercles limitant (S_1) et (S_2).

Ces dernières questions n'ont donné lieu qu'à de rares essais, d'ailleurs peu valables ; le lien entre la recherche de l'intersection des deux cônes de révolution et les propriétés des tangentes communes aux deux sphères n'a pas été dégagé nettement, et si un candidat commence la discussion du nombre de génératrices communes, c'est en affirmant *a priori* qu'il ne peut en exister plus de deux.



Les indications qui précèdent, systématiquement restreintes pour ne pas sortir du domaine des connaissances du programme de Première, montrent que l'épreuve ne dépassait pas les possibilités d'un bon élève ; elle n'exigeait, bien-entendu, aucune érudition, puisque l'énoncé, très explicite, proposait ou suggérerait les moyens d'aborder les différentes questions, toutes les fois qu'il pouvait se présenter une difficulté réelle de recherche pour des débutants. Sans doute le sujet peut paraître long, mais le fait que quelques candidats sont arrivés à présenter des résultats convenables sur un bon nombre de parties du problème prouve qu'il n'était pas impossible d'en traiter l'essentiel dans les délais imposés.

Plusieurs des rapports sur les concours antérieurs ont déjà signalé que

l'algèbre paraissait négligée au profit de la géométrie ; l'expérience de 1950 ne fait que confirmer cette remarque. En ne retenant que les meilleures compositions, la proportion est minime (une sur quatre environ) de celles dont les auteurs paraissent porter quelque intérêt aux questions d'algèbre. Evidemment, plusieurs ont l'excuse d'avoir laissé de côté les paragraphes relatifs aux fonctions pour avoir le temps de traiter la dernière partie du problème. Il n'en reste pas moins que les solutions présentées en algèbre ne sont guère satisfaisantes, et rares sont celles qui témoignent dans la conduite des raisonnements et des calculs, sinon d'une certaine maîtrise qu'on ne peut attendre de débutants, du moins d'une certaine attention réfléchie.

C'est là un fait méritant examen. Peut-être n'est-il pas inutile, à ce propos, d'insister encore sur l'importance de la discipline algébrique, qui ne doit pas être considérée comme une partie mineure des mathématiques, n'ayant guère d'autre objet que de fournir des formules et des procédés pratiques, mais qui doit, au contraire, avoir une place de choix dans l'enseignement du second degré, par la contribution qu'elle peut apporter à la formation intellectuelle et scientifique. Car, les définitions et les propriétés des nombres et des opérations élémentaires, une fois acquises, et raisonnablement acquises, pour constituer l'outillage indispensable, le développement du cours d'algèbre comporte essentiellement un ensemble de questions où la part de l'observation réfléchie, de l'imagination, du raisonnement logique est aussi importante qu'en géométrie élémentaire. Et l'algèbre n'est-elle pas à la base de la géométrie analytique comme de l'analyse, et de tous leurs prolongements théoriques et pratiques ?

Un autre fait que la majorité des compositions, même parmi les meilleures, met en évidence est le manque de rigueur logique dans la présentation des raisonnements relatifs aux lieux géométriques. Sans doute, les élèves savent bien que, si la recherche a commencé par l'hypothèse : « Soit M un point de lieu... », l'étude d'une réciproque des propriétés découvertes comme conséquences de cette hypothèse, ou une étude équivalente, s'impose. Mais la mise en application de cette règle de bon sens est très souvent incorrecte et les défauts semblent provenir, assez fréquemment, de ce que l'analyse des conditions nécessairement vérifiées par les points du lieu n'a pas été poussée assez loin.

Ainsi, pour prendre un exemple tiré de la dernière partie du problème, à propos du lieu des projections orthogonales du point I sur les tangentes communes aux sphères (A) et (B) , la mise en forme d'une solution précise est grandement facilitée si l'on a établi, non seulement que chacune de ces projections orthogonales H est un point de la sphère (S) , mais encore que le plan perpendiculaire en H à la droite IH est sécant ou tangent aux sphères (A) et (B) . Or, la plupart des candidats, après avoir constaté que le lieu est porté par la sphère (S) , s'efforcent de déterminer la région utile par des considérations telles que les suivantes : « Les positions-limites du point H « correspondent aux positions-limites du point P , déterminées dans la première partie en coupant les sphères par un plan passant par la droite AB ;

« les positions-limites des tangentes communes aux deux sphères sont les tangentes communes aux deux grands cercles, sections des sphères (A) et (B) par un tel plan ; les projections du point I sur ces tangentes sont le point I lui-même et les points H_0 et H'_0 symétriques par rapport à la droite AB. Le lieu des points H est donc la calotte sphérique engendrée « par la rotation de l'arc de grand cercle $H_0IH'_0$ de (S), tournant autour « de AB. » Il est bien évident que l'affirmation finale n'est pas la conclusion logique des remarques particulières formulées d'abord, et que la question n'est pas résolue ainsi. Il semble là qu'une confusion s'est établie, dans l'esprit de quelques débutants, qui ont pris pour de véritables démonstrations certaines remarques intuitives que l'on présente fréquemment pour préparer une détermination précise d'un lieu géométrique, en invoquant même parfois, assez fâcheusement, une vague raison de « continuité ». Bien entendu, il ne s'agit nullement de proscrire certains modes de raisonnement légitimement employés lorsque, par une suite de transformations ayant permis de substituer aux propriétés initiales de définitions des propriétés caractéristiques équivalentes, la recherche d'un lieu est pratiquement réduite à des constatations évidentes, se rapportant à des faits déjà connus ou faciles à établir rigoureusement (dans l'exemple actuel : rechercher des points N de la sphère (S) tels que la droite JN soit sécante ou tangente aux deux sphères données).

Il est intéressant de noter, cette année, une amélioration assez sensible de la rédaction et de l'orthographe. Sans doute on relève encore bien des fautes et des incorrections, et les meilleures compositions ne sont pas exemptes de certaines négligences qui pourraient laisser croire qu'il existe un « style mathématique » méprisant les règles les plus élémentaires de la correction grammaticale (j'allais dire : de la politesse) ; mais il n'y a là, très certainement, que fâcheuse habitude, sans aucune intention concertée. La phrase suivante, où la ponctuation est, bien entendu, respectée, en donne un exemple : « Soit PQ une tangente commune j'ai AP perpendiculaire PQ comme « tangente, et BQ perpendiculaire PQ comme OF est perpendiculaire à « PQ par AP, OF, BQ je peux faire passer des plans parallèles d'où le « le théorème de Thalès me donne immédiatement : F milieu de PQ... » Cependant, la recherche d'une expression correcte, à la fois complète et précise, si possible élégante, des idées et des faits semble avoir trouvé place parmi les préoccupations d'un certain nombre d'élèves, et il faut souhaiter que cette constatation ne soit point due à quelque hasard sans lendemain.

Dans l'ensemble, le concours de 1950 laisse une impression satisfaisante et confirme la valeur de l'enseignement donné dans nos établissements secondaires. Cette appréciation n'est point fondée, évidemment, sur la seule considération des meilleures copies ; elle tient compte surtout des résultats, incomplets sans doute, mais souvent de qualité fort honorable, obtenus par une bonne partie des candidats soumis à une épreuve à peu près nouvelle pour eux, par sa durée et par ses exigences.

Quelques précisions numériques compléteront ces conclusions. Sur les

cent cinquante-huit élèves qui ont pris part à l'épreuve, une trentaine environ ont remis des copies nettement insuffisantes. Par contre, trente-et-une compositions ont été soumises, après délibération du jury, à une seconde lecture, et le classement définitif a permis de proposer sept récompenses : un premier prix ; puis, assez nettement détachés, deux seconds prix *ex-æquo*, et, après une nouvelle coupure, quatre accessits, deux à deux *ex-æquo*. Une quinzaine de compositions, classées immédiatement après celles des lauréats, méritaient de retenir l'attention. Bien que les notes « chiffrées » ne constituent qu'un médiocre moyen pour traduire un véritable jugement de valeur, on peut situer approximativement les niveaux relatifs des candidats du peloton de tête en disant que si l'on attribue la note 15 au premier classé, les quinze copies suivant celles qui figurent au palmarès peuvent être cotées entre 8 et 10.

Il n'est pas sans intérêt d'ajouter, comme contribution à la petite histoire du Concours général, que, parmi les sept lauréats de 1950, figurent un élève de Première A (troisième accessit) et deux élèves d'École Normale, à qui ont été attribués un second prix et un troisième accessit ; les quatre autres sont des élèves de Première C. Disons enfin que le palmarès du Concours général de Mathématiques, pour la classe de Mathématiques, en 1950, contient en bonne place les noms de cinq élèves déjà cités au Concours de 1949, dans la classe de Première ; parmi eux, M. Jean-Pierre Barrat, du lycée Louis-le-Grand, mérite une mention particulière, puisqu'il a obtenu, au cours de ces deux années, les deux premiers prix de mathématiques et le premier prix de physique.

J. DESFORGE,
Inspecteur général.
