

Rapport sur la composition de mathématiques
(classe de Mathématiques)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1951 (1)

Le jury était composé de M. ROBERT, Inspecteur général, Président ; de Mme AYRAULT, Professeur (Fontenay) au Lycée Jules-Ferry ; de MM. CHAZAL, Professeur (Normale Supérieure) au Lycée Saint-Louis ; MAGNIER, Professeur (Navale) au Lycée Saint-Louis ; RAMIS, Professeur (Ingénieurs de la Marine) au Collège Jean-Baptiste-Say ; RICHE, Professeur (Saint-Cloud) au Lycée Saint-Louis.

ANALYSE DU SUJET

I. ETUDE D'UNE TRANSFORMATION T, DANS UN PLAN (II). — 1° On donne deux segments distincts FF', GG' de (II) ayant même milieu O. T fait correspondre à un point n de (II) le point m de (II), tel que les triangles nFm et nGF' soient directement semblables.

Il faut entendre ici le mot triangle au sens large ; trois points distincts, mais alignés, constituent un triangle aplati.

L'hypothèse de similitude s'interprète par une égalité d'angles orientés (1) et une proportion entre longueurs (2) :

$$(1) \quad (\vec{nF}, \vec{nm}) = (\vec{nG}, \vec{nF'}) \quad (\text{à } 2k\pi \text{ près}).$$

$$(2) \quad \frac{nm}{nF} = \frac{nF'}{nG} \quad \text{d'où } nm = \frac{nF'}{nG} \cdot nF.$$

Elles déterminent sans ambiguïté le vecteur $\vec{nm}$ quand n diffère de F, F', G. Examinons le cas où n tend vers un de ces points :

a — n tend vers F ; $\frac{nF'}{nG}$ a une limite finie, car FG est $\neq 0$. nF tend vers zéro, donc nm tend vers zéro et m tend vers F.

b — n tend vers F' : $\frac{nF'}{nG}$ tend vers zéro, car F'G est $\neq 0$. nF tend vers la limite finie F'F, donc nm tend vers zéro et m tend vers F'.

On étendra donc la possibilité de T en stipulant qu'à chaque point F ou F' la transformation T fait correspondre ce même point.

c — n tend vers G. nF' a la limite GF' $\neq 0$, $\frac{nF'}{nG}$ a la limite $+\infty$; il en est de même de nm, car nF a la limite GF $\neq 0$. Conclusion : m est rejeté à l'infini.

m et n peuvent-ils être confondus ?

Cette éventualité est impossible quand n est pris distinct de F, F' (et, bien entendu de G), car $nm = 0$ équivaut, d'après (2), à $nF' \times nF = 0$.
 Donc : les points F et F' sont les seuls points invariants dans T.

(1) L'énoncé du problème a été publié dans le *Bulletin* n° 142, de juillet 1951, pages 279 à 281.

2° En écartant les positions F, F', G de n, les relations (1) et (2) se mettent sous les formes équivalentes

$$(1') \quad (\overrightarrow{nF}, \overrightarrow{nm}) = (\overrightarrow{nG}, \overrightarrow{nF}) \quad (\text{à } 2k\pi \text{ près})$$

$$(2') \quad \frac{nm}{nF} = \frac{nF}{nG}$$

qui se traduisent par le fait que les triangles nF'm et nGF sont directement semblables. C'est aussi dire que T ne change pas, quand, dans sa définition, on échange les rôles de F et F', sans changer celui de G.

Ce résultat s'applique aussi aux positions F, F', G de n, par les passages à la limite considérés dans (I, 1°).

3° De nouvelles conséquences vont résulter de ce que le quadrilatère FGF'G' est un parallélogramme, d'où

$$(3) \quad \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{G'F'}$$

La similitude directe des triangles nF'm et nGF se traduit par

$$(\overrightarrow{mn}, \overrightarrow{mF'}) = (\overrightarrow{Fn}, \overrightarrow{FG}) \quad (\text{à } 2k\pi \text{ près})$$

$$\frac{mF'}{mn} = \frac{FG}{Fn} \text{ sous les mêmes restrictions qu'au début des (2°).}$$

Ces relations deviennent en utilisant (3) :

$$(\overrightarrow{mn}, \overrightarrow{mF'}) = (\overrightarrow{Fn}, \overrightarrow{G'F'})$$

$$\frac{mF'}{mn} = \frac{G'F'}{Fn} \text{ ou, sous des formes équivalentes.}$$

$$(4) \quad (\overrightarrow{nm}, \overrightarrow{nF}) = (\overrightarrow{F'm}, \overrightarrow{F'G'}) \quad (\text{à } 2k\pi \text{ près})$$

$$(5) \quad \frac{nF}{nm} = \frac{F'G'}{F'm}$$

(4) et (5) expriment que les triangles (au sens large) mFn et mG'F' sont directement semblables.

Si, dans la définition de T, sans changer les rôles respectifs de F, F', on substitue à G le point G', la transformation T est remplacée par celle qui fait passer de m à n, c'est-à-dire par sa transformation inverse.

On peut en déduire, sans étude directe, qu'à tout point m de (II) correspond un point unique n ; à priori les cas à réserver sont ceux où m est en F, F' ou G', mais l'analogie de T avec son inverse dispense d'étudier les positions limites de n lorsque m tend vers F, F', ou G : auxquels cas respectifs n tend vers F, F' ou est rejeté à l'infini.

4° L'inventaire des similitudes (directes) de triangles de la figure donne le résumé suivant :

nFm est semblable à nGF' et à F'G'm ; et (par permutation des rôles de F, F') : nF'm est semblable à nGF et à FG'm.

La similitude directe de nGF' et F'G'm, qui résulte de là, s'interprète par

$$(6) \quad (\overrightarrow{GF'}, \overrightarrow{G'm}) = (\overrightarrow{Gn}, \overrightarrow{GF'}) \quad (\text{à } 2k\pi \text{ près}).$$

$$(7) \quad \frac{G'm}{GF'} = \frac{GF'}{Gn}.$$

Pour interpréter (6), considérons la droite X'OX parallèle à la bissec-

trice intérieure des vecteurs $\vec{F'G}$, $\vec{F'G'}$ (ou aussi de $\vec{G'F'}$ et $\vec{GF'}$). Par symétrie : $(\vec{OX}, \vec{G'F'}) = -(\vec{OX}, \vec{GF'}) = (\vec{GF'}, \vec{OX})$ (à $2k\pi$ près).

Ajoutons membre à membre (6) et cette relation ; en tenant compte de la relation de Chasles pour les angles orientés, il vient :

$$(\vec{OX}, \vec{G'm}) = (\vec{G'n}, \vec{OX}) \text{ ou } (8) (\vec{OX}, \vec{G'm}) + (\vec{OX}, \vec{G'n}) = 2k\pi \text{ (} k \text{ entier).}$$

Quant à (7), on peut l'écrire (7') $G'm \times G'n = F'G \cdot F'G'$.

Le second membre de (7') n'est pas nul (F' distinct de G et G'). Nous poserons : $l^2 = F'G \cdot F'G'$ ($l > 0$) (7') devient $G'm \times G'n = l^2$.

La transformation T s'exprime par un double lien, angulaire et métrique, entre les vecteurs libres $\vec{G'm}$ et $\vec{G'n}$: ils sont inclinés d'angles opposés sur $\vec{OX}$ (ou $\vec{OX'}$) et le produit de leurs longueurs est constant.

Comme contrôle des définitions de l^2 et de $X'OX$, on peut particulariser ces résultats en considérant que lorsque m vient en F' , n vient aussi en F' .

Pour la suite, nous retiendrons que l est moyenne proportionnelle entre les longueurs de deux côtés consécutifs du parallélogramme $F'GF'G'$ et que $X'OX$ est parallèle à la bissectrice intérieure des angles intérieurs en F' , ou aussi en F , de ce parallélogramme.

5° Il en résulte qu'on peut passer de m à n par la suite des transformations simples suivantes (dont les deux dernières sont permutables) : Translation de vecteur $\vec{G'G}$; symétrie par rapport à la parallèle à $X'OX$ issue de G ; inversion de pôle G et de puissance l^2 , toutes opérations indépendantes, par leurs éléments, du point m considéré.

On retrouve, comme résultat acquis dans (I, 3°), que : Quand m est rejeté à l'infini, n vient en G ; et la suite, inversée, des opérations inverses des précédentes montre que lorsque n est rejeté à l'infini, m vient en G [acquis dans (I, 1°)].

Quand m décrit un cercle, la même considération des opérations intermédiaires montre que n décrit un cercle ou une droite, puisque l'inversion change un cercle en un cercle ou une droite.

Le lieu de n est une droite dans le cas où le cercle décrit par m passe par G' .

II. APPLICATION A DES CONIQUES A CENTRE. — 1° Lorsque m décrit une droite (M) passant par G' , la correspondance établie entre les vecteurs $\vec{G'm}$, $\vec{G'n}$ fait voir aussitôt que n décrit une droite (N) passant par G : les directions de (M) et de (N) sont symétriques par rapport à celle de $X'OX$, ce qui définit (N) connaissant (M) et vice-versa.

Supposons d'abord (cas général) que (M) ne passe ni par F , ni par F' . Il existe alors une conique (Γ) et une seule de foyers F , F' tangente (ou asymptote) à (M) : c'est une ellipse ou une hyperbole selon que F et F' sont du même côté, ou de part et d'autre de (M).

Considérons les triangles $F'mG'$ et nmF , directement semblables (I, 4°) : cela comporte que

$$(\vec{mF'}, \vec{mG'}) = (\vec{mn}, \vec{mF}) = -(\vec{mF}, \vec{mn}), \quad (\text{à } 2k\pi \text{ près}),$$

et que $\overrightarrow{mF}$, $\overrightarrow{mF'}$ ont même bissectrice intérieure que $\overrightarrow{mn}$, $\overrightarrow{mG'}$. Les tangentes à (Γ) , issues du point m , dont l'une est (M) , satisfont au théorème de Poncelet : elles ont mêmes bissectrices que mF , mF' . On voit donc que la seconde tangente est portée par la droite mn .

Quand m décrit entièrement (M) , la droite mn vient successivement en coïncidence avec toutes les tangentes à (Γ) , y compris (M) elle-même [lorsque m atteint le point de contact de (M) avec (Γ)] et sa symétrique (M') par rapport au centre O de (Γ) , lorsque m s'éloigne à l'infini. L'enveloppe de la droite mn , dans ces conditions, est donc la conique (Γ) .

Les triangles nFm et nGF' sont directement semblables (I, 1°) : le théorème de Poncelet appliqué aux tangentes à (Γ) issues du point n , dont une est mn , montre, comme précédemment, que la seconde tangente est nG , soit (N) . En résumé, la conique (Γ) est tangente aux droites (M) , (N) .

Supposons, maintenant (cas particulier) que M passe par F ou par F' , par exemple que (M) soit la droite $G'F$: il n'y a plus, à proprement parler, de conique (Γ) . Lorsque m est en F , n étant aussi en F , on doit considérer que la droite mn est indéterminée parmi toutes celles issues de F . Si m est distinct de F , les triangles semblables mFG' , mnF' sont aplatis puisque $(\overrightarrow{mF}, \overrightarrow{mG'}) = k\pi$; $(\overrightarrow{mn}, \overrightarrow{mF'}) = k\pi$; mn coïncide avec mF' , donc passe par F' . L'enveloppe de mn est le point F' , plus le point F (enveloppe singulière).

Même résultat si (M) passe par F' : l'enveloppe de mn est le système des points F , F' et c'est alors l'enveloppe point F' qui est singulière.

2° Dans la figure constituée par F , F' , G , G' , m , n , est-il possible que les vecteurs $\overrightarrow{G'm}$ et $\overrightarrow{G'n}$ soient équipollents ?

D'après (I, 4°), il faut et il suffit que $\overrightarrow{G'm}$ soit parallèle à $X'OX$ et que $G'm = l$.

On est ainsi conduit à prendre pour (M) la parallèle à $X'OX$ menée par G' et à prendre sur cette droite, de part et d'autre de G' , les longueurs $G'm_1 = G'm_2 = l$.

Les points n_1 , n_2 homologues de m_1 et m_2 sont sur la parallèle à $X'OX$ menée par G et

$\overrightarrow{Gn_1} = \overrightarrow{G'm_1}$; $\overrightarrow{Gn_2} = \overrightarrow{G'm_2}$. $m_1n_1n_2m_2$ est un parallélogramme de centre O .

D'après la définition de $X'OX$ la droite $m_1G'm_2$ est bissectrice extérieure de l'angle de $\overrightarrow{G'F}$ avec $\overrightarrow{G'F'}$. Supposons (cas général) que G' (ou G) ne soit pas intérieur au segment FF' : il existe alors une ellipse (E) de foyers F , F' passant par G' (et G) et sa tangente en G' est $m_1G'm_2$; c'est la conique (Γ) obtenue en prenant pour (M) cette droite $m_1G'm_2$: m_1n_1 et m_2n_2 lui sont tangentes (II, 1°) : le parallélogramme $m_1n_1n_2m_2$ est circonscrit à (E) : appelons H et H' les points de contact avec (E) de m_1n_1 et m_2n_2 .

Les tangentes $m_1G'm_2$ et n_1Gn_2 sont parallèles au diamètre conjugué du diamètre GG' dans l'ellipse (E) , donc ce diamètre conjugué est sur la droite $X'OX$. Les tangentes m_1Hn_1 et m_2Hn_2 sont de même parallèles au diamètre conjugué de HH' , et comme elles ont la direction de GG' , GG' est ce

diamètre conjugué. $OH = G'm_1 = l$, d'où $HH' = 2l$. On voit que le diamètre conjugué HH' de GG' a comme support $X'OX$ et pour longueur $2l$.

Dans le cas particulier où G' , et par suite G , sont intérieurs au segment FF' , l'ellipse (E) s'aplatit sur le segment FF' ; d'ailleurs $X'OX$ coïncide avec la droite FF' .

3° Dans ce paragraphe, les données sont deux points F, F' distincts et une droite $X'OX$, distincte de FF' , passant par le milieu O de FF' ; et de plus la longueur l ($l \neq 0$).

Le problème à résoudre est la détermination d'un couple inconnu de points G, G' symétriques par rapport à O , et tel que la transformation ponctuelle T qui fait l'objet de (I), définie à l'aide des couples (FF') et (GG') , ait des éléments $X'OX, l$ (I, 4°) confondus respectivement avec la droite et la longueur données.

Analyse. S'il existe de tels points G, G' , on a vu dans (II, 2°) que l'ellipse (E) (inconnue *a priori*) de foyers F, F' et passant par G, G' , a comme diamètre conjugué de GG' , le diamètre HH' porté par $X'OX$ et de longueur $2l$. Cette ellipse est proprement dite, car G' ne peut être sur le segment FF' , sans quoi $X'OX$ serait confondue avec FF' (fin de II, 2°).

H et H' sont connus sur $X'OX$ (à la symétrie près de centre O), puisque $OH = OH' = l$. L'ellipse (E) est déterminée; on connaît ses foyers F, F' et un point H de l'ellipse, non situé sur le segment FF' . G et G' sont nécessairement les extrémités du diamètre conjugué de HH' dans cette ellipse.

Le problème n'est donc susceptible, à la symétrie près de centre O , que d'une solution.

Synthèse. Inversement, G, G' étant ainsi obtenus, il existe une transformation $T_1(FF'GG')$ [où les rôles de FF' sont permutables, et l'échange de G, G' la mène en son inverse]; l'ellipse (E_1) , définie à l'aide de T_1 comme E le fut à l'aide de T dans (II, 2°), est confondue avec (E) et la droite $X'OX_1$, la longueur l_1 caractéristiques de T_1 sont respectivement la droite $X'OX$ et la longueur l .

Conclusion. Le problème est possible et admet deux solutions [une seule en ne distinguant pas les points du couple (G, G')].

On aurait pu envisager le problème posé, d'après (I, 4°) comme consistant à achever la détermination du parallélogramme $FGF'G'$ de manière que $X'OX$ soit parallèle à la bissectrice intérieure de $\vec{FG}, \vec{F'G'}$ et que l'on ait

$$FG \times F'G = l^2,$$

mais la méthode naturelle, consistant à déterminer G par l'intersection de deux « lieux géométriques » exprimant les conditions précédentes, n'eût pas été élémentaire.

Examinons directement les cas particuliers qui ont été écartés.

F et F' confondus : G et G' différents de F : la bissectrice de $\vec{GF}, \vec{GF'}$, vecteurs confondus est sur GF et doit être perpendiculaire à OX , donc G et G' sont sur la perpendiculaire à $X'OX$ en O , à une distance de O égale à l . Le problème a encore une solution unique : d'ailleurs (E), de considération superflue ici, est le cercle de centre O et de rayon l .

$X'OX$ confondu avec FF' (F, F' distincts) : si, pour une solution éventuelle, le triangle FGG' est véritable, FO est à la fois bissectrice et médiane de l'angle en F du triangle, donc $FG = FG'$ et la valeur commune de ces longueurs est l , le parallélogramme doit être un losange de côté l . Ce n'est possible que si $l > OF$. Mais il est *a priori* possible que G soit sur $X'OX$, auquel cas G (et G') sont intérieurs au segment FF' : on voit que

$$\begin{cases} GF + GF' = FF' = 2 OF, \\ GF \cdot GF' = l^2. \end{cases}$$

Comme il est connu, cette éventualité ne peut se produire que si $l \leq OF$. Il en résulte la discussion suivante :

1° $l > OF$: le cercle de centre F et de rayon l coupe la médiatrice de FF' aux points G, G' ; c'est l'unique solution du problème.

2° $l \leq OF$: le cercle de diamètre FF' rencontre la parallèle à FF' distante de cette droite de la longueur l en des points dont les projections orthogonales sur $X'OX$ fournissent les points G, G' cherchés.

Le problème, dans tous les cas, a pour solution un couple unique de points G, G' (confondus si $l = OF$).

4° Les données sont ici les points G, G' (milieu O), la droite $X'X$ passant par O et la longueur l ($l \neq 0$). Soit à trouver F, F' .

Pour que G, G' soient solutions, il faut et il suffit que $X'OX$ soit parallèle à la bissectrice extérieure de GF, GF' et que l'on ait $GF \times GF' = l^2$. La première condition équivaut à la suivante : la bissectrice intérieure de GF, GF' doit être parallèle à une droite connue $Y'OY$ qui n'est autre que la perpendiculaire à $X'OX$ en O . Le problème se ramène donc à un problème du même type que celui qui fait l'objet de (II, 3°) : il n'est pas nécessaire de reprendre les détails de la construction de F, F' , dans les différents cas possibles. Bornons-nous à la conclusion :

La connaissance de $GG', X'OX$ (O milieu de GG') et de $l \neq 0$ détermine l'existence d'un couple de points F, F' et d'un seul.

5° On donne dans (II) deux droites (N) et (M) orientées, un point G sur (N) , un point G' sur (M) et une constante non nulle K . Trouver l'enveloppe des droites mn coupant (M) et (N) aux points respectifs m, n , variables et tels que $\overline{G'm} \times \overline{Gn} = K$.

Le changement de l'orientation positive d'une seule des droites (M) et (N) a pour effet le changement de K en $-K$. Il est loisible ainsi de disposer les orientations de ces droites de manière que K soit positif. Posons alors $K = l^2$ ($l > 0$) et soit $X'OX$ la droite passant par le milieu O de GG' et parallèle à la bissectrice intérieure des deux orientations de ces droites.

Nous venons d'établir qu'il existe un couple de points (F, F') symétriques par rapport à O et tel que la transformation $T(FF', G, G')$ se traduise, entre deux points homologues n, m , par les relations

$$\begin{aligned} (\vec{OX}, \vec{G'm}) + (\vec{OX}, \vec{Gn}) &= 2k\pi, \\ \vec{G'm} \times \vec{Gn} &= l^2. \end{aligned}$$

D'après les choix effectués pour $X'OX$ et l^2 , les points n [sur (N)] et

mn [sur (M)], dont il s'agit dans le texte de (II, 5°), sont homologues par T.

Le problème posé se ramène à celui qui fait l'objet de (II, 1°) : l'enveloppe des droites mn de (II, 5°) est généralement une ellipse ou hyperbole (Γ) , de foyers F, F', tangente à (M), (N) et à leurs symétriques (M'), (N') par rapport à O.

Quand K varie, (Γ) conserve ces quatre tangentes fixes.

Toutefois, l'enveloppe peut être dégénérée en un système de deux points qui sont alors F, F', et on a vu (fin de II, 1°) que ce cas se présente si (M) et (N) ont en commun un des points F, F'. Peut-on caractériser ce cas, *a priori*, c'est-à-dire d'après les données $[G', G, (M), (N) \text{ et } K]$?

Il est nécessaire, à cet effet, que le point de rencontre f de (M) et (N) soit à distance finie et tel que $\overline{G'f} \times \overline{Gf} = K$.

Cette condition imposée à K est suffisante : si elle est remplie, f est en effet point double de T et nécessairement confondu avec F ou F'.

6° Réciproquement, soit donnée dans (II) une ellipse ou hyperbole (Γ) et deux tangentes fixes, distinctes, (M) et (N) à (Γ) ; considérons une tangente arbitraire à (Γ) qui coupe (M)' en m , (N) en n .

Appelons F, F', O, les foyers et le centre de (Γ) et supposons d'abord (M) et (N) non parallèles. Appelons G' le point de rencontre, déterminé, de (M) avec la symétrique (N') de (N) par rapport à O, et G le symétrique de G' par rapport à O. G est sur (N).

Les couples (F, F') et (G, G'), de même milieu O, sont distincts et déterminent une transformation T. D'après (II, 1°), quand n décrit (N), son homologue m_1 dans (T) décrit une droite (M_1) passant par G' et l'enveloppe de la droite m_1n est une conique (Γ_1) de foyers F, F' tangente à (M_1) , (N), (N'). Or, il n'y a qu'une conique (Γ) de foyers (F, F'), tangente à (N) ; donc (Γ_1) coïncide avec (Γ) .

De plus, la droite (M_1) , tangente à (Γ) et passant par G', coïncide avec (M) ou (N'). Si (M_1) était confondue avec (N'), elle représenterait deux tangentes confondues à (Γ_1) issues de G', et G' serait sur (Γ_1) : ce qui n'est pas puisque G' est extérieur à $(\Gamma) = (\Gamma_1)$. Donc (M_1) n'est autre que (M) : m_1n et mn étant par hypothèse deux tangentes à (Γ) issues de n ($n \neq G$) sont confondues et m_1 n'est autre que m .

Toujours d'après (II, 1°), quand n varie sur (N), $\overline{G'm_1} \times \overline{Gn} = C^{te}$.

Donc, il est possible de trouver les points G [sur (N)] et G' [sur (M)] de manière que $\overline{G'm} \times \overline{Gn} = C^{te}$.

Dans le cas particulier où (M) et (N) sont parallèles, donc symétriques par rapport à O, il suffit de prendre pour G' et G les points de contact respectifs de (M) et (N) avec (Γ) et le raisonnement de synthèse, utilisant la transformation T, est tout semblable au précédent : (Γ_1) coïncide avec (Γ) et (M_1) , tangente à (Γ_1) , donc à (Γ) , coïncide nécessairement avec (M). Les conclusions obtenues subsistent.

III. Revenons aux données de (II, 1°), la conique (Γ) étant supposée non dégénérée. Adjoignons à ces données une droite (Φ) du plan (II) qui ne passe, ni par G , ni par G' et qui coupe (M) et (N) en les points respectifs u et v qui ne sont, ni rejetés à l'infini, ni sur (Γ).

1° En général (Φ) n'est pas tangente à (Γ) ; par u passe une tangente à (Γ) distincte de (M), et de (Φ) ; elle n'est pas parallèle à (N), sinon u serait le point G' , ce qui est exclu par les restrictions stipulées ; cette tangente coupe (N) en un point r à distance finie. De même par v passe une tangente à (Γ), distincte de (N) et de (Φ) qui coupe (M) en un point q à distance finie.

Les orientations positives de (M) et (N) étant choisies symétriquement par rapport à la direction $X'OX$, exprimons que ur et vq sont tangentes à (Γ) par les relations :

$$\overline{G'u} \cdot \overline{Gr} = l^2, \quad \overline{G'q} \cdot \overline{Gv} = l^2,$$

puis que mn (conditions de II, 1°) est tangente à (Γ) :

$$\overline{G'm} \cdot \overline{Gn} = l^2,$$

$$\text{d'où } \overline{nr} = \overline{Gr} - \overline{Gn} = l^2 \left(\frac{1}{\overline{G'u}} - \frac{1}{\overline{G'm}} \right) = -l^2 \frac{\overline{mu}}{\overline{G'u} \cdot \overline{G'm}}$$

$$\text{et de même } \overline{nv} = -l^2 \frac{\overline{mq}}{\overline{G'q} \cdot \overline{G'm}}$$

On en déduit $\frac{\overline{nr}}{\overline{nv}} = \frac{\overline{mu}}{\overline{mq}} : \frac{\overline{G'u}}{\overline{G'q}}$ relation qui s'écrit aussi :

$$(8) \quad \frac{\overline{mq}}{\overline{mu}} \times \frac{\overline{nr}}{\overline{nv}} = \frac{\overline{G'q}}{\overline{G'u}} = C^{\text{te}}.$$

2° Si (Φ) est tangente à (Γ), les points u et v sont liés par :

$$\overline{G'u} \cdot \overline{Gv} = l^2.$$

Transformons la relation $\overline{G'm} \cdot \overline{Gn} = l^2$ en introduisant comme variables

$$X = \overline{um} \quad Y = \overline{vn}$$

$$(\overline{G'u} + X) (\overline{Gv} + Y) = l^2 \text{ devient } Y \cdot \overline{G'u} + X \cdot \overline{Gv} + XY = 0.$$

Pour mn distincte de (Φ), X et Y sont non nuls et cette relation s'écrit :

$$(9) \quad \frac{A}{X} + \frac{B}{Y} = 1 \quad \text{en posant } A = -\overline{G'u} \quad B = -\overline{Gv}$$

A et B sont des constantes non nulles.

Remarque. La relation (8) dans le premier cas, la relation (9) dans le second cas sont caractéristiques du fait que la droite mn est tangente à (Γ) : car il résulte des formes (8) ou (9) qu'à un point m elles font correspondre un point unique n .

IV. APPLICATION A LA PROJECTION CONIQUE. — Soit S un point non situé dans (II) ; soit (Π_1) un plan parallèle au plan passant par S et (Φ).

On va effectuer une projection conique du plan (Π) sur le plan (Π_1) , le centre de projection étant S .

Les points, simultanément variables, m et n de (M) et (N) ont comme « projections » respectives m_1 et n_1 les points de rencontre avec (Π_1) des droites Sm et Sn .

(Φ) et (M) étant des droites distinctes, le plan SM n'est pas parallèle à (Π_1) , et le lieu de m_1 est la trace sur (Π_1) de ce plan SM . Appelons cette droite (M_1) . De même le lieu de n_1 est une droite (N_1) . Etudions la correspondance entre m_1 et n_1 sur ces droites.

Cas (III, 1°) : (Φ) non tangente à (Γ) . Les droites Sq , Sr coupent (Π_1) , à distance finie, en des points fixes respectifs q_1 , r_1 , situés respectivement sur (M) et (N) . (M_1) et (N_1) sont respectivement parallèles aux droites Su et Sv .

Dans le plan SMM_1 contenant les droites Su , Sqq_1 , Smm_1 , menons par q la parallèle à Su qui coupe Sm en μ ; par homothétie :

$$\frac{\overline{mq}}{\overline{mu}} = \frac{\overline{\mu q}}{\overline{Su}}$$

et aussi

$$\frac{\overline{\mu q}}{\overline{m_1 q_1}} = \frac{\overline{Sq}}{\overline{Sq_1}} = \alpha \quad (\text{constante}),$$

d'où

$$\frac{\overline{mq}}{\overline{mu}} = \overline{m_1 q_1} \times \frac{\alpha}{\overline{Su}}.$$

De même on voit que, β étant $\frac{\overline{Sr}}{\overline{Sr_1}}$ (constante), $\frac{\overline{nr}}{\overline{nv}} = \overline{n_1 r_1} \times \frac{\beta}{\overline{Sv}}$.

La relation (8) devient donc : $\overline{m_1 q_1} \times \overline{n_1 r_1} = C''$.

Dans le plan (Π_1) , d'après (II, 5°), où les rôles des points fixes G' et G sont joués par les points fixes q_1 et r_1 , l'enveloppe de la droite $m_1 n_1$ est une conique (Γ_1) tangente à (M_1) et (N_1) .

Cas (III, 2°) : (Φ) tangente à (Γ) . Il convient de modifier comme suit la démarche du raisonnement : La parallèle à (M) menée par S n'est pas parallèle à (Π_1) , sinon (M) serait confondue avec (Φ) : elle coupe (Π_1) en un point a situé sur (M_1) ; de même la parallèle à (N) , menée par S , coupe (Π_1) en un point b situé sur (N_1) .

Dans le plan SMM_1 les triangles uSm , am_1S ont leurs côtés homologues parallèles, ils sont homothétiques et il en résulte :

$$\frac{\overline{uS}}{\overline{am_1}} = \frac{\overline{um}}{\overline{aS}}$$

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{um} = \frac{\overline{am_1}}{\overline{uS} \cdot \overline{aS}} = \alpha' \cdot \overline{am_1} \quad (\alpha' \text{ constante} \neq 0).$$

De même, dans le plan SNN_1 on obtient :

$$\frac{1}{Y} = \beta' \cdot \overline{bn_1} \quad (\beta' \text{ constante} \neq 0).$$

La relation (9) devient une relation de la forme

$$A_1 \overline{am_1} + B_1 \overline{bn_1} = 1 \quad A_1, B_1 \text{ constante} \neq 0.$$

Soient μ_1 et ν_1 des positions *correspondantes* de m_1 et n_1 sur M_1 et N_1 :

$$A_1 \overline{a\mu_1} + B_1 \overline{b\nu_1} = 1.$$

Par soustraction, il en résulte :

$$A_1 \overline{\mu_1 m_1} + B_1 \overline{\nu_1 n_1} = 0 \text{ ou } \frac{\overline{\mu_1 m_1}}{\overline{\nu_1 n_1}} = C^{\text{te}}.$$

Donc sur (M_1) et (N_1) , m_1 et n_1 engendrent des divisions semblables : on sait que $m_1 n_1$ enveloppe alors une *parabole*, soit (Γ_1) .

Remarque. Dans ces deux cas (III, 1°) (III, 2°) on ne risque pas de rencontrer pour l'enveloppe de $m_1 n_1$ une dégénérescence en points fixes, à distance finie ou à l'infini, puisque cela comporterait une dégénérescence correspondante de l'enveloppe de mn dans le plan (Π) , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Soit p un point de (Γ) , sa projection conique p_1 sur (Π_1) est telle que par p_1 passent deux tangentes *confondues* à (Γ_1) , projections des tangentes *confondues* à (Γ) issues de p ; et les points de (Γ_1) sont, inversement, les seuls à posséder cette propriété. p_1 est sur (Γ_1) , condition *équivalente* à « p sur (Γ) ». (Γ_1) est donc la *projection conique* de (Γ) .

Conclusion. On pourrait dans (Π) se donner une conique (Γ) à *centre quelconque* et d'après (II, 6°), (M') et (N) étant deux tangentes *arbitraires* à (Γ) , (Γ) peut être considérée comme enveloppe des droites mn dans les conditions de (II, 1°). La projection conique, dans le système de projections $[S, (\Pi), (\Pi_1)]$ de (Γ) sur (Π_1) est une conique (Γ_1) , *qui n'est pas nécessairement une conique à centre.*

On est tenté d'affirmer la proposition suivante : « Toute projection conique d'une conique est une autre conique. »

Cependant sa démonstration n'est pas encore assurée dans le cas où la conique projetée est une parabole. On ne demandait pas d'étudier ce cas, qui peut cependant être ramené aux considérations précédentes.

L'idée d'une telle méthode, pour établir cette importante propriété des coniques, nous paraît remonter à un travail de G. ILIOVICI et E. WEILL, en 1927.

Appréciations de l'épreuve. — Le guidage étroit des candidats, qui était assuré par les paragraphes du texte, semble procéder d'un certain scepticisme du jury quant à l'éventualité d'un candidat faisant preuve de génie. On reproche souvent à ces épreuves, abondamment « jalonnées », la contrainte inutile qu'elles feraient peser sur ce candidat (s'il s'en trouvait), comme si des questions précises, se succédant d'après un plan rationnel, devaient apporter une entrave à la manifestation de la personnalité de l'élève. Ces appréhensions nous paraissent chimériques.

En fait, un lot de candidats très intéressant, devançant une troupe dont les notes s'échelonnent régulièrement, a été mis en valeur par l'étude des copies. La sélection s'opère, en pareil cas, par l'appréciation des réactions des concurrents sur certains points délicats, que très peu dominent entièrement, et qui jouent ainsi un rôle crucial.

Ainsi, l'emploi des méthodes de la géométrie orientée n'a pas donné lieu, dans ces copies, à des critiques trop graves. On a relevé que la notion de « similitude directe » est interprétée de manière fort diverse, et que cela indique sans doute que cette question est définie et enseignée différemment dans nos classes : le jury s'est montré tout à fait impartial à cet égard, tenant compte du libre choix des méthodes adoptées par les maîtres.

Une faute technique, qui a cours fréquemment, consiste à croire qu'en remplaçant un vecteur par son opposé, on remplace aussi par son opposé l'angle qu'il fait avec une direction fixe.

La manière de caractériser par une congruence angulaire la bissectrice de l'angle de deux vecteurs a donné lieu à des erreurs, d'un type moins grossier, qui prouvent de l'inattention, et ne sont guère évitables par l'observation de règles rigides. Toutefois, on devrait savoir qu'en divisant les deux membres d'une congruence (mod. 2π) par 2, on n'obtient plus qu'une congruence (mod. π), et avoir réfléchi aux faits de ce genre.

Le manque d'esprit critique s'est manifesté sous deux formes chez les concurrents : en premier lieu, une certaine passivité devant l'énoncé, dont on ne discute pas les affirmations : il fallait expliquer, par une analyse rigoureuse, une phrase comme « m n'est défini que si n est différent de F' et de G (I, 1°) ». Le manque de commentaire de la phrase du texte où il est question d'une conique déterminée par ses foyers et une tangente est un peu inquiétant aussi ; ce mutisme a été presque général : nulle allusion au cercle principal, au cas exceptionnel, à la nature de la conique.

En second lieu, on ne se préoccupe que fort peu d'effectuer des contrôles des résultats acquis. Ainsi la question « que devient m quand n tend vers G ? » intervenait deux fois : rares sont les candidats qui indiquent qu'ils l'ont remarqué. Que dire de ceux qui trouvent, à des reprises différentes, des résultats se contredisant, en réponse à cette question, et ne s'en inquiètent pas !

L'hypothèse du texte : « Les couples F_1F' et G_1G' sont distincts », n'a joué presque aucun rôle. On aurait aimé tenir compte de la rigueur des déductions où cette hypothèse apparaît.

Une figure, jointe au texte, qui s'est trouvée être utile aux candidats, et à leurs correcteurs, représentait un parallélogramme $FGF'G'$ non aplati. Nous inclinons à penser que maint élève, de ce fait, n'a pas imaginé que les deux segments FF' et GG' peuvent appartenir à une même droite. La tendance des élèves à sous-estimer les hypothèses, à surestimer les figures est à combattre, avec mesure, car elle est naturelle et d'ordre esthétique.

La part faite à l'érudition, dans les copies, ne donne pas lieu à l'unanimité des critiques : on signale qu'elle a conduit des concurrents à réciter certaines constructions des foyers d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués. Nous ne nous scandalisons pas du fait que des notions plus ou moins hors-programme, soient connues des élèves, mais elles risquent de ne l'être pas profondément.

Les élèves qui étalent leurs connaissances (sur le fait précité pour fixer les idées) soupçonnent-ils qu'il y a certaines difficultés à démontrer l'exis-

tence effective d'une ellipse dont deux diamètres conjugués sont arbitrairement donnés, en grandeur et position ?

L'homographie a-t-elle été employée ? Bien rarement, semble-t-il, et ç'eût été enlever au problème sa saveur. Une copie, émanant d'un élève de Mathématiques (Technique) et qui, pour des raisons de règlement n'a pas été classée, a utilisé correctement la notion de rapport anharmonique. Ces constatations n'appellent aucun reproche pour personne.

Beaucoup de candidats, même estimables, conçoivent les problèmes de construction comme simple affaire de tracés : c'est compréhensible, car ils ont entre les mains, règle, équerre et compas. Il se trouvait que, dans le problème, c'était l'*existence* (et l'unicité) des solutions qui jouaient un rôle essentiel. Il y a là une éducation de l'esprit (et non de la main) à développer, et ceux de nos collègues, justement séduits par le rôle de l'axiomatique en mathématiques, ne devront pas méconnaître les résistances de leurs élèves venant d'un attachement exclusif au concret ; il y a là beaucoup de doigté encore à employer.

La méthode des lieux géométriques, pour traiter de problèmes de construction, est éminente, mais ce n'est pas une panacée. Ainsi, elle conduisait, à propos de (II, 3°) à déterminer G par l'intersection d'un ovale de Cassini et d'une hyperbole équilatère (homofocales). Un candidat l'a signalé. Comme quoi les méthodes qu'on pourrait qualifier de primaires, ne sont pas (dans un cadre évidemment restreint) élémentaires...

Ce sont des considérations de cet ordre qui conduisent les auteurs de problèmes des concours, à diriger les élèves dans des sentiers parfois contournés.

Cette conduite des esprits est toujours délicate alors et nécessite l'appel au balancement nuancé de l'analyse et de la synthèse : nous préférons l'emploi de ces termes à ceux de « propositions directes et réciproques » qui semble entraîner une pédagogie dogmatique, et non de découverte, où les vérités à justifier seraient connues d'avance.

Dans de bonnes copies, les démonstrations des dites réciproques, de libellé fourni (fâcheusement, nous en convenons, mais comment faire autrement !), par le texte même de l'énoncé sont insuffisantes. « La réciproque se démontré par identification » affirme un lauréat. Nous n'en doutons pas, mais ne savons apprécier le contenu, obscur, de la valeur de cette affirmation. Sans doute, le rôle des mathématiques est la recherche du moindre effort : mais l'aptitude à raisonner directement sur des exemples, à exposer et développer une synthèse bien faite, est cependant d'un ordre plus élevé que l'application des mécanismes mathématiques, pour la formation de l'esprit.

Présentation. — On relève, comme par le passé, des lettres utilisées sans définitions, des entorses à l'orthographe, et une certaine hésitation des candidats à multiplier les figures partielles indispensables.

Un jury moins bienveillant pourrait sanctionner effectivement ces insuffisances : d'autant plus qu'il a parfois bien de la peine à faire crédit, géné-

reusement, à la manière peu explicite dont certains résultats sont obtenus dans les copies.

La partie II est certainement celle où les concurrents ont éprouvé des difficultés à comprendre le sujet, à le discuter en détail de manière satisfaisante. Cependant le (I, 5°), par sa facilité, aurait dû être mieux dominé. Le jury s'est étonné, par contre, de constater combien le III a peu arrêté les candidats qui ont eu le temps de l'aborder. Le IV n'a été qu'ébauché par les meilleurs.

Classement. — 21 copies sur 173 remises ont été retenues par le jury pour faire l'objet d'un examen attentif par tous les correcteurs.

Alors que la copie classée première, sans lacunes graves, a été unanimement estimée remarquable, les deux suivantes n'ont pu être départagées par le jury : les explications y sont parfois moins sobres et plus attachantes par là que dans la première. Ces deux copies ont été classées *ex-æquo*. Il a été proposé un premier prix (15,66 sur 20) ; deux seconds prix (14), et sept accessits (13,5 à 10). Ces propositions ont tenu compte de ce que l'épreuve de 1951 a semblé plus facile que sa devancière de 1950.

Dans le palmarès, il s'est trouvé que le premier prix du concours de Première de 1950 a obtenu cette année un premier accessit ; que l'un des seconds prix de 1950 a maintenu son rang et que le second accessit de Première a enlevé le premier prix en Mathématiques. Ces accidents inévitables sont minimes par rapport à la constatation, qui devient traditionnelle, que les résultats des deux concours sont d'une remarquable concordance.

Nous adressons aux membres du Jury nos remerciements et nos compliments pour la conscience, la compétence éclairée et le zèle ardent avec lesquels ils ont fait l'étude des compositions.

Nous sommes heureux de féliciter également les professeurs qui ont su développer une culture géométrique toujours en progrès ; sur eux rejaillit l'éclat des résultats de cette manifestation traditionnelle de la vitalité de notre enseignement.

L'Inspecteur général, Président du Jury,

P. ROBERT.
