

V. Documents officiels

Rapport sur la Composition de mathématiques (classe de Mathématiques)

au Concours général de 1950 (1)

Le Jury était composé de M. ROBERT, inspecteur général, président ; de Mme AYRAULT, professeur de Mathématiques (Fontenay) au Lycée Jules-Ferry ; de MM. KÉROMEN, professeur de Mathématiques Spéciales (Centrale) au Lycée Louis-le-Grand ; MAGNIER, professeur de Mathématiques Spéciales (Navale) au Lycée Saint-Louis ; PICARDAT, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Chaptal ; POUGNAND, professeur de Mathématiques Spéciales (Centrale) au Lycée Buffon.

ANALYSE DU SUJET

1^{re} PARTIE. — Dans un plan (P), on donne une conique (Γ) définie par un foyer F, la directrice correspondante (D), et son excentricité e , et un point fixe C distinct de F, essentiellement supposé intérieur à (Γ).

1° A un point quelconque m de (P), on fait correspondre le point n (dit associé de m), homothétique de F dans une homothétie (H_m) ayant son centre h sur (D) et telle que (H_m) transforme m en C.

Démontrer que, lorsque m décrit une droite (M) de (P), n décrit une droite (N) [dite associée de (M)] et vice-versa.

On obtient h comme point de rencontre de Cm avec (D) ; en général, la donnée de m détermine h , l'homothétie (H_m), puis le point n sans ambiguïté. Dans le cas particulier où la droite Cm est parallèle à (D), il y a lieu de considérer que (H_m) devient une translation de vecteur $\overrightarrow{mC}$ et le point n est encore déterminé par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{Fn} = \overrightarrow{mC}$: c'est le symétrique de m par rapport au milieu de FC.

Dans le cas singulier où m est en C, on doit regarder h comme indéterminé sur (D) et (H_m) comme ayant l'unité pour rapport d'homothétie : ceci conduit à regarder que n est encore déterminé et confondu avec F : C admet F comme point associé.

Quand n est-il rejeté à l'infini ? Faisons varier m sur une droite arbitraire passant par F : dans ces conditions h est fixe ; le rapport d'homothétie de (H_m) est $\frac{h\overline{C}}{hm}$ (quand m est différent de h). C, intérieur à (Γ),

n'est pas situé sur (D), donc hC n'est pas nul ; ce rapport prend, quand m varie sur la droite Fh, toutes les valeurs positives ou négatives possibles, il est égal à $\frac{h\overline{n}}{h\overline{F}}$ ($h\overline{F}$ toujours $\neq 0$) ; donc n prend toute position possible

(1) L'énoncé du problème a été publié dans nos fascicules d'énoncés publiés précédemment.

(sauf h) sur cette droite. Si m tend vers h , le rapport précédent augmente indéfiniment en valeur absolue, n s'éloigne à l'infini. Si m s'éloigne à l'infini, le rapport considéré tend vers zéro et n tend vers h . Ainsi les points de (D), et seulement ces points, ont des associés rejetés à l'infini, et sont aussi les associés de points m à l'infini.

Il y avait lieu de bien observer que la transformation ponctuelle associant à m le point n , 1° n'est pas une homothétie, (H_m) dépendant de m , 2° n'est pas *réciroque*. Il apparaît que lorsqu'on échange dans la définition de cette transformation les rôles des points C et F, m et n sont échangés ; ceci permet de ne pas réétudier la transformation inverse, analogue (sinon identique) à la première. La droite (D) joue le même rôle dans les deux transformations.

Soit maintenant supposé que m varie sur une droite arbitraire (M) coupant (D) en un point φ ; (H_m) change φ en un point φ' de (D) tel que la droite $C\varphi'$ soit parallèle à $m\varphi$ qui est (M). φ' est donc fixe. (H_m) change la droite $F\varphi$ en la droite parallèle $n\varphi'$; donc n varie sur une droite fixe (N), parallèle à $F\varphi$ et passant par φ' . La transformation change les droites en droites ; la relation

$$\frac{\overline{\varphi'C}}{\overline{\varphi m}} = \frac{\overline{\varphi'n}}{\overline{\varphi f}} \quad \text{d'où} \quad \overline{\varphi m} \times \overline{\varphi'n} = \text{Cte} \neq 0,$$

montre d'ailleurs que lorsque m décrit (M), n décrit toute la droite (N). Au point φ correspond un associé rejeté à l'infini sur (N) ; le point φ' de (N) est l'associé d'un point m rejeté à l'infini sur (M).

Cas particuliers de la transformation d'une droite : Le cas où (M) est parallèle à (D) donne lieu aux constatations suivantes :

$$\frac{\overline{hm}}{\overline{hC}} = \text{Cte} = k \neq 0 \quad \frac{\overline{hF}}{\overline{hn}} = k \quad \frac{\overline{Fn}}{\overline{Fh}} = \frac{\overline{hn} - \overline{hF}}{-\overline{hF}} = \frac{k-1}{k} = \text{Cte}$$

n décrit une droite homothétique de (D) dans une homothétie de centre F, son rapport étant $\frac{k-1}{k} \neq 0$ en général [si (M) ne passe pas par C] ; ici (N), comme (M), est parallèle à (D).

Si m décrit la parallèle à (D) passant par (C), on sait déjà que n reste symétrique de m par rapport au milieu de CF, n décrit la parallèle à (D) passant par F.

En résumé, si (M) est parallèle à (D), il en est de même de (N) et vice-versa. Le cas particulier où (M) passe par (C) [sans être parallèle à (D)] a déjà été étudié ; (N) passe par (F), et vice-versa.

Enfin, si (M) est confondue avec (D), l'associée (N) de (M) est rejetée à l'infini.

2° Quel est le lieu décrit par n quand m décrit la conique (Γ) ?

N.-B. — On désigne, dans tout le problème, la distance d'un point quelconque p à une droite ($\mathcal{P}$) par $\mathcal{P}(p)$.

Le rapport d'homothétie de (H_m) est au signe près $\frac{D(C)}{D(m)}$ [puisque (D) est invariante dans l'homothétie considérée].

C'est aussi le rapport algébrique $\frac{\overline{Cn}}{mF}$.

$$\text{Donc } \frac{Cn}{Fm} = \frac{D(C)}{D(m)} \text{ ou } \frac{Cn}{D(C)} = \frac{Fm}{D(m)},$$

Pour que m soit sur (Γ) il faut et il suffit que $\frac{Fm}{D(m)} = e$.

Cette condition équivaut à $Cn = eD(C)$. Posons :

$$eD(C) = R.$$

Le lieu demandé de n est donc le cercle de centre C et de rayon R : soit (C) ce cercle.

C étant intérieur à (Γ) , le rapport $\frac{CF}{D(C)}$ est inférieur à e .

Ainsi $CF < eD(C)$, ou $CF < R$. Le point F est intérieur au cercle (C) .

La relation $\frac{R}{D(C)} = e$ montre que le cercle (C) est sécant à (D) si $e > 1$, c'est-à-dire si (Γ) est une hyperbole ; il est tangent à (D) si $e = 1$, c'est-à-dire si (Γ) est une parabole ; il n'a aucun point commun avec (D) si $e < 1$, c'est-à-dire si (Γ) est une ellipse.

Remarque : Cette discussion résulterait aussi du fait que les points communs éventuels à (C) et (D) sont les associés des « points à l'infini » de (Γ) .

3° La polaire (Φ) du point F par rapport au cercle (C) étant supposée (cas général) sécante à (D) en un certain point I , caractériser la droite (Δ) ayant (Φ) comme associée.

A un point rejeté à l'infini sur (Δ) correspond comme associé le point I sur (Φ) : ceci indique que (Δ) est parallèle à la droite CI .

Au point A de rencontre de (Δ) avec (D) doit correspondre comme associé le point rejeté à l'infini sur (Φ) : donc FA est parallèle à (Φ) , autrement dit FA est perpendiculaire à CF .

On suppose (cas général) CF non perpendiculaire à (D) . Dans ces conditions, A est à distance finie.

En résumé, on peut construire (Δ) en élevant en F la perpendiculaire à CF qui coupe (Δ) en A ; (Δ) est la parallèle à CI issue de A .

Relation utile par la suite (donnée à vérifier dans le texte intégral du problème) :

n désignant l'associé d'un point quelconque m de (P) , menons par n la droite ayant la direction de (Φ) qui coupe (nécessairement) (D) en un point I_1 .

A des droites telles que (N) , de même direction, correspondent des droites associées (M) se coupant sur (D) : donc la droite nI_1 , qui a la direction de la droite FA , est l'associée d'une droite passant par A , et, évidemment, par m . Ainsi la droite Am a pour associée la droite nI_1 .

L'homothétie (H_m), qui change m en C , et F en n , a comme centre un point h de (D) ; menons par m la parallèle à CI , qui coupe (nécessairement) (D) en un certain point J ; le rapport de (Hm) est :

$$\rho = \frac{h\bar{I}}{h\bar{J}}.$$

La droite nI_1 est homothétique, dans (Hm) , de la droite FA , donc I_1 est l'homothétique de A , d'où :

$$\rho = \frac{h\bar{I}_1}{hA}. \text{ D'ailleurs } \rho = \frac{h\bar{C}}{hm}.$$

Le vecteur $\vec{II_1}$ est homothétique du vecteur $\vec{JA}$, donc

$$\vec{II_1} = \frac{h\bar{C}}{hm} \vec{JA}. \text{ En valeur absolue, } II_1 = \frac{hC}{hm} JA \text{ (1')}. \quad (1')$$

Cette relation permet de comparer à la distance $\Delta(m)$, de m à (Δ) , la distance $\Phi(n)$, de n à (Φ) ; en effet

$$\begin{aligned} \Delta(m) &= \Delta(J) = JA \sin(\Delta, D), & [(\Delta, D) \text{ angle aigu de } (\Delta) \text{ et } (D)] \\ \Phi(n) &= \Phi(I_1) = II_1 \sin(\Phi, D) & [(\Phi, D) \text{ angle aigu de } (\Phi) \text{ et } (D)] \end{aligned}$$

Il s'ensuit, d'après (1') :

$$\Phi(n) = \frac{hC}{hm} \cdot JA \sin(\Phi, D) = \frac{hC}{hm} \frac{\Delta(m)}{\sin \Delta, D} \sin(\Phi, D), \text{ soit}$$

$$\Phi(n) = K \frac{hC}{hm} \Delta(m) \text{ en posant } K = \frac{\sin(\Phi, D)}{\sin(\Delta, D)}.$$

Dans cette relation :

$$(1) \quad \Phi(n) = K \frac{hC}{hm} \Delta(m),$$

K ne dépend que des directions de (Φ) , (Δ) , (D) , donc est constant quand m varie dans le plan, puisque (D) , (Φ) et (Δ) sont des droites fixes.

Cette relation sera utilisée, dans la suite du problème, quand m varie plus particulièrement sur (Γ) , mais elle est indépendante de cette hypothèse.

Remarque de contrôle : Pour tout point m d'une droite passant par A , le rapport des distances à (D) et (Δ) est constant, donc

$$\frac{D(m)}{\Delta(m)} = \text{Cte.}$$

Cette droite a pour associée une parallèle à (Φ) , donc on doit trouver que $\frac{D(m)}{\Delta(m)} = \text{Cte}$ entraîne $\Phi(n) = \text{Cte}$; cela tient à ce que $\frac{hC}{hm} = \frac{D(C)}{D(m)}$, ce qui permet d'écrire (1) sous la forme $\Phi(n) = KD(C) \frac{\Delta(m)}{D(m)}$ où $KD(C) = \text{Cte}$.

II. 1° Ce paragraphe est plus une explication de méthode qu'un problème, et ne présentait aucune difficulté :

On y considère, outre le plan (P) , une droite (Z) oblique à (P) et coupant ce plan au point ω , et le plan (Π) perpendiculaire à (Z) en ω .

A tout point u du plan (P), on fait correspondre sa projection orthogonale v sur le plan (II) : en effectuant un des deux rabattements, choisi une fois pour toutes, du plan (II) sur le plan (P), autour de l'intersection (X) de ces deux plans comme charnière, le point v prend comme nouvelle position un point u' du plan (P). Il est visible immédiatement que u et u' sont sur une même perpendiculaire à X, et que le rapport de leurs ordonnées par rapport à X :

$\frac{X(u')}{X(u)}$ est égal à $\cos \theta$ [θ étant l'angle de la rotation effectuée (dite rabattement)], en valeur algébrique. On peut donc considérer que u' se déduit de u par l'opération ponctuelle, dite « affinité orthogonale d'axe X et de rapport d'affinité $\cos \theta$ » qui ne dépend que de la donnée de (Z) par rapport à (P).

Si l'on fait abstraction des tracés graphiques qui pourraient (tel le « trait » de la géométrie descriptive traditionnelle) fournir u' connaissant u , on peut considérer que u' est défini en fonction de u par cette affinité, ce qui donne simplement la solution des problèmes métriques suivants :

a) Trouver, en vraie grandeur, la distance $Z(u)$ de u à Z :

C'est aussi la distance de v à Z, soit $v\omega$, rabattue en vraie grandeur en $u'\omega$, distance de u' au point ω .

b) Trouver en vraie grandeur les angles des deux plans Zu et Zu_1 , u_1 désignant un second point, situé, comme u , dans le plan (P) :

Ce sont les angles des droites ωv , ωv_1 ; et, dans (P), ce sont aussi les angles (supplémentaires entre eux) des droites $\omega u'$, $\omega u'_1$.

En particulier, si les plans Zu et Zu_1 sont rectangulaires, les droites $\omega u'$, $\omega u'_1$ le sont aussi et le segment $u'u'_1$ transformé, par l'affinité, du segment uu_1 est vu de ω sous un angle droit.

Ces remarques seront à utiliser dans la suite de (II).

2° Le point F étant intérieur au cercle (C), il existe un angle aigu α défini par la relation

$$(2) \quad \cos \alpha = \frac{CF}{R}.$$

Considérons la perpendiculaire FA en F à la droite CF et faisons-la tourner autour de CF, dans un sens arbitraire, de l'angle α ainsi défini. On obtient une droite (Φ_1) coupant (P) en F et faisant avec (P) l'angle α : il existe deux telles droites, symétriques par rapport à (P).

Prenons cette droite (Φ_1) comme droite (Z), le point F jouant le rôle de ω (II, 1°). Et, tout d'abord, le rôle du point u de (P) sera joué par un point quelconque n du cercle (C).

D'après la remarque a, la distance $\Phi_1(n)$ de n à la droite (Φ_1) est égale à Fn' , n' étant transformé de n par l'affinité orthogonale d'axe CF [qui joue ici le rôle de (X)] et de rapport $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha$ [car le plan perpendiculaire à (Φ_1) en F fait avec (P) l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$].

Quand n décrit (C), n' décrit une ellipse ayant (C) comme cercle principal, la droite CF comme axe focal ; ses demi-longueurs d'axes sont

$$\mathcal{A} = R \quad \mathcal{B} = R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = R \sin \alpha.$$

La relation $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2$ permet d'en déduire la demi-distance focale $\mathcal{C}$ de cette ellipse : cela donne visiblement

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= R \cos \alpha, \text{ et, d'après la relation (2) :} \\ \mathcal{C} &= CF. \end{aligned}$$

Ainsi F est l'un des foyers de cette ellipse : la directrice correspondante est la polaire de F par rapport au cercle principal (C), qui n'est autre que la droite (Φ).

$\Phi_1(n) = Fn'$ s'écrit aussi $\Phi_1(n) = \mathcal{C} \Phi(n')$, puisque

$$\frac{Fn'}{\Phi(n')} = \mathcal{C}, \text{ excentricité de l'ellipse.}$$

$\mathcal{C}$, c'est $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}} = \cos \alpha$. D'autre part, la droite nn' , étant perpendiculaire à CF, est parallèle à (Φ), les points n et n' ont même distance à (Φ) :

$$\Phi(n') = \Phi(n), \text{ d'où, en résumé}$$

$$\Phi_1(n) = \Phi(n) \cos \alpha.$$

Il existe un rapport constant entre les distances de tout point n du cercle (C) aux droites fixes (Φ_1) et (Φ).

3° Dans ce paragraphe, c'est la remarque b de (II, 1°) qui va être utilisée, le rôle de (Z) étant toujours dévolu à la droite (Φ_1), introduite dans (II, 2°).

On y considère deux plans variables, rectangulaires, passant par la droite (Φ_1), et leurs points d'intersection avec la directrice (D) de (Γ), désignés par h et k .

Faisons jouer les rôles de u et u_1 [dans (II, 1° b)] par ces points h et k . L'affinité orthogonale d'axe CF et de rapport $\sin \alpha$ change respectivement h et k en h' et k' sur la droite fixe (D'), transformée de (D) dans cette affinité. Le segment $h'k'$ de (D') est vu de F sous un angle droit.

Comment se correspondent les points variables h et k sur (D) ?

Soient q' le pied de la perpendiculaire abaissée de F sur (D') et q le point de (D) que l'affinité précédente transforme en q' . Les droites hh' , kk' , qq' sont parallèles à la direction, fixe, de (Φ) ; d'après le théorème de Thalès, les segments qh , qk , varient proportionnellement aux segments $q'h'$, $q'k'$. (D) et (D') étant supposées orientées $\overline{qh} = m \cdot \overline{q'h'}$ $\overline{qk} = m \cdot \overline{q'k'}$, m étant un nombre constant.

Or, le triangle $h'Fk'$, rectangle en F, donne :

$$\overline{q'h'} \cdot \overline{q'k'} = -\overline{q'F}^2 = \text{Cte.}$$

Il en résulte $\overline{qh} \cdot \overline{qk} = -m^2 \cdot \overline{q'F}^2 = \text{Cte.}$

L'analogie entre la correspondance h/k et la correspondance h'/k' incite à interpréter cette dernière relation comme il suit : sur la perpendiculaire

élevée en q à la droite (D), considérons les points de rencontre du cercle de diamètre hk avec cette droite, appelons-les λ et μ :

$$\overline{qh} \cdot \overline{qk} = \overline{q\lambda} \cdot \overline{q\mu} = -q\lambda^2 = \text{Cte.}$$

Donc λ , et aussi son symétrique μ , par rapport à (D), sont fixes. De *cha-*
cun des points λ et μ on voit le segment variable hk sous un angle droit.

4° Montrer que $\Phi_1(h)$ varie proportionnellement à la distance $h\lambda = h\mu$.
D'après (II, 2°, a), $\Phi_1(h)$, distance de h à la droite (Φ_1) , est égale à la distance Fh' .

Dans le triangle rectangle $h'Fk'$

$$Fh'^2 = \overline{h'q'} \cdot \overline{h'k'}$$

et
$$\overline{h'q'} = \frac{\overline{hq}}{m} \quad \overline{h'k'} = \frac{\overline{hk}}{m} \quad \text{d'où} \quad Fh'^2 = \frac{\overline{hq} \cdot \overline{hk}}{m^2}.$$

Dans le triangle rectangle $h\lambda k$
$$\lambda h^2 = \overline{hq} \cdot \overline{hk}.$$

Ainsi
$$\frac{Fh'^2}{\lambda h^2} = \frac{1}{m^2} = \text{Cte} \quad \frac{Fh'}{\lambda h} = \text{Cte} \quad \Phi_1(h) \text{ varie proportionnellement à } h\lambda.$$

C.Q.F.D.

Le coefficient de cette proportionnalité est $\frac{1}{|m|}$, qui est aussi le rapport de $h'k'$ à hk , et aussi celui de λk à Fk' [k pouvant être considéré comme une position du point variable h quand il varie sur (D)]. Les triangles $Fh'k'$ et λhk sont semblables (côtés proportionnels).

Les triangles λhk et μhk , symétriques l'un de l'autre par rapport à (D), sont tous deux semblables au triangle $Fh'k'$, mais l'un d'eux est directement semblable au triangle $Fh'k'$. Comme jusqu'ici, rien ne distingue dans leur définition λ et μ , nous pouvons supposer que *ce soit* λhk qui soit directement semblable à $Fh'k'$.

Autrement dit, il existe une opération de similitude *directe* (Σ) qui fait correspondre aux points λ, h, k , les points respectifs F, h', k' . Elle transforme (D) en (D'), et le vecteur $\overrightarrow{\lambda q}$ en le vecteur $\overrightarrow{Fq'}$. Ceci montre que (Σ), déterminée par cette remarque, est indépendante de la position de h sur (D). Il est, à cet effet, à remarquer que λ est lui-même indépendant de cette position : car, en orientant (D) selon un axe $\overrightarrow{(D)}$, l'affinité fait correspondre à $\overrightarrow{(D)}$ un axe $\overrightarrow{(D')}$ porté sur (D') et le sens de rotation autour de λ d'un mobile parcourant (D) dans le sens de $\overrightarrow{(D)}$ doit être le même que le sens de rotation autour de F d'un mobile, homologue du précédent par (Σ), qui parcourt (D') dans le sens de $\overrightarrow{(D')}$.

Considérons comme position particulière de h sur (D), le point A, déjà considéré dans (I), tels que FA soit perpendiculaire à CF. La position correspondante de k est le point de rencontre de CF avec (D), que nous appelons B [en excluant le cas particulier où CF est parallèle à (D), pour abréger, puisque C est supposé arbitraire à l'intérieur de (Γ)].

B étant sur CF est son propre homologue dans l'affinité, et par consé-

quent aussi dans la similitude (Σ) qui fait correspondre k' à k . B est donc le centre de la similitude (Σ).

Étudions la figure particulière, où le cercle de diamètre AB, position du cercle de diamètre hk , obtenus quand h vient en A, passe encore par λ et μ

et, de plus, par F, puisque $\widehat{AFB}$ est un angle droit. A a comme homologue dans l'affinité, et aussi dans la similitude (Σ), le point A' de la demi-droite

FA, tel que $\frac{FA'}{FA} = \text{rapport de l'affinité} = \sin \alpha < 1$, donc A' est entre F

et A. L'angle $\widehat{FBA'}$, homologue dans (Σ) de l'angle $\widehat{\lambda BA}$, est égal à $\widehat{\lambda BA}$ et de même sens que lui. Sur le demi-cercle de diamètre AB et qui contient

le point λ , est situé aussi F, puisque $\widehat{FBA}$ a le même sens que $\widehat{FBA'}$, donc aussi même sens que $\widehat{\lambda BA}$. De plus, $\widehat{FBA} > \widehat{FBA'}$, ou $\widehat{FBA} > \widehat{\lambda BA}$.

Il en résulte que F et A, sur le cercle de diamètre AB, sont, de part et d'autre de la corde $\lambda\mu$. A est le milieu de l'arc de ce cercle intercepté par l'angle inscrit $\lambda F\mu$. Donc les demi-droites d'origine F, contenant respectivement les points λ et μ , ont comme bissectrice intérieure la demi-droite FA.

La similitude (Σ) fait correspondre aux points B, λ , A, les points respectifs B, F, A'. Elle conserve les angles de demi-droites et les rapports de segments, d'où le fait que les triangles λBF et ABA' sont semblables. On en déduit la proportion :

$$(\mathcal{P}_1) \quad \frac{B\lambda}{BA} = \frac{F\lambda}{A'A}.$$

Rien n'est changé, aux considérations précédentes, si on substitue à l'affinité d'axe CF et de rapport $\sin \alpha$, l'affinité d'axe CF et de rapport opposé $-\sin \alpha$. Mais alors il y a lieu de remplacer A' par le point, que nous appelons A'', symétrique de A' par rapport à F, et la droite (D') par la droite (D'') symétrique de (D') par rapport à la droite BFC. L'axe $(\overrightarrow{D'})$ défini plus haut, est remplacé par l'axe $(\overrightarrow{D''})$, également symétrique de $(\overrightarrow{D'})$, par rapport à BFC.

Les sens de rotation définis par les axes $(\overrightarrow{D'})$ et $(\overrightarrow{D''})$ relativement au point F sont opposés, ce qui montre que dans la substitution opérée, c'est maintenant le point μ qu'il convient de substituer au point λ .

Par analogie avec la proportion ($\mathcal{P}_1$) nous obtenons, désormais :

$$(\mathcal{P}_2) \quad \frac{B\mu}{BA} = \frac{F\mu}{A''A} \quad (A'' \text{ remplaçant } A', \mu \text{ remplaçant } \lambda).$$

Les premiers membres des égalités ($\mathcal{P}_1$) et ($\mathcal{P}_2$) étant visiblement égaux, de la comparaison de ces proportions résulte la nouvelle proportion :

$$\frac{F\lambda}{A'A} = \frac{F\mu}{A''A}.$$

Ces rapports égaux sont encore égaux à

$$\frac{F\mu - F\lambda}{AA'' - AA'} = \frac{F\mu + F\lambda}{AA'' + AA'}.$$

Or $AA'' - AA' = A'A'' = 2FA'$, A étant extérieur au segment $A'A''$, et $AA'' + AA' = AF + FA'' + AF - FA' = 2AF$. Ainsi

$$\frac{F\mu - F\lambda}{2FA'} = \frac{F\mu + F\lambda}{2AF} \quad \text{d'où}$$

$$\frac{F\mu - F\lambda}{F\mu + F\lambda} = \frac{FA'}{FA} = \sin \alpha.$$

En faisant abstraction de la distinction opérée entre λ et μ , et qui n'a eu d'autre rôle que de préciser des considérations de situation, on arrive donc à la relation :

$$(\mathcal{P}_3) \quad \frac{|F\lambda - F\mu|}{F\lambda + F\mu} = \sin \alpha$$

que le texte de l'énoncé demandait de prouver.

5° Déterminer une droite (Δ_1) , sécante à (P) en C , telle que tous les couples de plans Δ_1h et Δ_1k restent orthogonaux quand h varie sur (D) , k ayant la même signification que dans (II, 3°).

Supposons le problème résolu et (Δ_1) trouvée : bien entendu les considérations de (II, 3°) et (II, 4°) développées en considérant (D) dans (P) et (Φ_1) sécante à (P) en F , formant avec (P) l'angle α sont encore valables en substituant seulement à (Φ_1) la droite (Δ_1) et à F le point C , à l'angle α l'angle β , que (Δ_1) forme avec (P) . Mais il nous faut déterminer, à partir des données, la droite (Δ_1) passant par C .

Par hypothèse, les couples de plans orthogonaux passant par (Δ_1) déterminent, toujours sur (D) , les mêmes couples de points h et k , donc des segments hk vus des mêmes points λ et μ (qui sont connus) sous des angles droits. Nécessairement, d'après les résultats de (II, 4°) :

la projection orthogonale de (Δ_1) sur (P) est une droite portant la bissectrice des demi-droites $C\lambda$ et $C\mu$;

l'angle β satisfait à la relation analogue à $(\mathcal{P}_3)$:

$$(\mathcal{P}_4) \quad \frac{|C\lambda - C\mu|}{C\lambda + C\mu} = \sin \beta.$$

C est distinct de λ et de μ , sans quoi il serait, sur le cercle de diamètre AB et sur la droite BF , lignes qui n'ont en commun que B et F ; or, C est distinct de F , et de B , puisque C ne peut être situé sur (D) .

La bissectrice de $C\lambda$ et $C\mu$ est donc portée par une droite bien déterminée et connue : en général, cette droite coupe (D) en un point A (connu) et la perpendiculaire à CA en C coupe, de même (D) , en un point $\bar{B}$ (connu).

Dans le plan perpendiculaire à (P) , mené par la droite $C\bar{A}$ [où plan perpendiculaire en C à $C\bar{B}$], il existe deux droites faisant avec P l'angle β ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) défini par la relation $(\mathcal{P}_4)$. Cet angle existe, car

$$|C\lambda - C\mu| < C\lambda + C\mu.$$

La droite (Δ_1) est nécessairement l'une de ces droites.

Mais il nous reste à montrer que l'une quelconque des droites ainsi construites répond au problème posé :

Ce que l'on sait, c'est que deux plans rectangulaires quelconques, passant par (Δ_1) , droite ainsi choisie, déterminent sur (D) des points h et l , tels que les segments hl sont vus de certains points fixes $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ sous des angles droits.

Les plans $\Delta_1\bar{A}$ et $\Delta_1\bar{B}$, par construction de (Δ_1) , sont perpendiculaires, puisque $\bar{C}\bar{B}$ est perpendiculaire au premier de ces deux plans et contenu dans le second. Ils coupent (D) en $\bar{A}$ et $\bar{B}$, qui sont les points d'un couple (hl) . Les points $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$, voient $\bar{A}\bar{B}$ sous un angle droit, ils sont donc sur le cercle de diamètre $\bar{A}\bar{B}$ et sont symétriques par rapport à (D) .

Or, ces propriétés appartiennent aux points λ et μ , car on pouvait construire $\bar{A}$ et $\bar{B}$ comme points de rencontre de (D) avec le cercle $C\lambda\mu$.

Supposons, pour fixer les idées, $C\lambda > C\mu$, dans ces conditions, on déduit de $(\mathcal{P}_4)$

$$\frac{C\mu}{C\bar{\lambda}} = \frac{1 - \sin \beta}{1 + \sin \beta} < 1.$$

On peut distinguer les points $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ en supposant $C\bar{\lambda} > C\bar{\mu}$: on sait que (Δ_1) faisant l'angle β avec (P) ,

$$\frac{C\bar{\mu}}{C\bar{\lambda}} = \frac{1 - \sin \beta}{1 + \sin \beta}$$

$C\bar{\mu}$ et $C\bar{\lambda}$, comme $C\mu$ et $C\lambda$ ont pour bissectrice intérieure $\bar{C}\bar{A}$.

On passe donc de λ à μ , et aussi de $\bar{\lambda}$ à $\bar{\mu}$, par une symétrie relativement à la droite $\bar{C}\bar{A}$, suivie d'une homothétie de centre C et de rapport $\frac{1 - \sin \beta}{1 + \sin \beta}$.

Cette opération ponctuelle (*similitude indirecte*) transforme le cercle passant par $C, \bar{A}, \bar{B}$ en un autre cercle, de rayon plus petit, passant par C, μ , qui coupe donc le premier cercle en C et μ . $\bar{\mu}$ doit appartenir au nouveau cercle et est distinct de C , donc $\bar{\mu}$ n'est autre que μ , et $\bar{\lambda}$ n'est autre que λ .

De l'identité, ainsi prouvée entre $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ et (λ, μ) résulte que tout cercle $h\bar{\lambda}\mu$ est confondu avec le cercle $h\bar{\lambda}\mu$; ces cercles recoupent (D) respectivement en l et k , donc il y a identité entre les couples (hk) et les couples (hl) , c'est-à-dire que les plans Δ_1h et Δ_1k sont orthogonaux, quel que soit h .

Le problème posé est possible et admet deux solutions (Δ_1) symétriques par rapport à (P) .

Remarque. — L'étude des cas où B est rejeté à l'infini sur D , et où la même circonstance se présente pour l'un des points $\bar{A}$ ou $\bar{B}$ construits dans (II. 5°) ne présente pas de difficultés, et les résultats trouvés demeurent valables quant aux conclusions finales.

(Δ_1) étant l'une des droites fixes ainsi trouvées, que peut-on dire du rapport $\frac{\Delta_1(h)}{h\bar{\lambda}}$?

On a trouvé dans (II, 3°) que $\frac{\Phi_1(h)}{h\lambda} = \text{Cte}$

De même ici $\frac{\Delta_1(h)}{h\bar{\lambda}} = \text{Cte}$ et comme λ est identique à $\bar{\lambda}$, le rapport mentionné dans l'énoncé est constant.

Il en résulte que, lorsque h varie sur (D), le rapport $\frac{\Delta_1(h)}{\Phi_1(h)} = \text{Cte}$.

6° *Conséquences* : Rappelons-nous ici que m étant un point quelconque de la conique (Γ), il lui correspond le point appelé h à l'intersection de (D) et de la droite Cm .

Dans l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{Cm}{Ch}$, la droite (Δ_1) , issue de C est invariante : les distances de h et de m à cette droite sont homothétiques, ce qui s'écrit : $\frac{\Delta_1(m)}{\Delta_1(h)} = \frac{Cm}{Ch} = \frac{hm}{Ch} \times \frac{Cm}{hm}$.

Le parallélisme de Cn et mF donne $\frac{Cm}{hm} = \frac{Fn}{Fh}$.

L'homothétie de centre F et de rapport $\frac{Fn}{Fh}$, où la droite (Φ_1) issue de F est invariante, montre que $\frac{Fn}{Fh} = \frac{\Phi_1(n)}{\Phi_1(h)}$.

Il vient $\frac{\Delta_1(m)}{\Delta_1(h)} = \frac{hm}{hC} \frac{\Phi_1(n)}{\Phi_1(h)}$ et comme on a vu dans (II 5°) que $\frac{\Delta_1(h)}{\Phi_1(h)} = \text{Cte}$

$$\Delta_1(m) = K' \frac{hm}{hC} \Phi_1(n) \quad K' \text{ étant une constante.}$$

Rappelons ici la relation (1) de (I, 3°) :

$$\Phi(n) = K \frac{hC}{hm} \Delta(m) \text{ d'où } \Delta(m) = \frac{1}{K} \frac{hm \cdot \Phi(n)}{hC}.$$

Formons le rapport $\frac{\Delta_1(m)}{\Delta(m)}$.

$$\frac{\Delta_1(m)}{\Delta(m)} = KK' \frac{\Phi_1(n)}{\Phi(n)}$$

On a vu dans (II, 2°) que lorsque n décrit (C)

$$\frac{\Phi_1(n)}{\Phi(n)} = \text{Cte.}$$

Donc enfin $\frac{\Delta_1(m)}{\Delta(m)} = \text{Cte} \quad (5).$

On a prouvé, en résumé, qu'à tout point C intérieur à la conique (Γ) on peut faire correspondre une certaine droite (Δ) dans le plan (P) de la conique et une certaine droite (Δ_1) coupant le plan (P) en C , déterminée à la symétrie près par rapport au plan (P), tel que le rapport des distances d'un point variable de (Γ) aux droites (Δ_1) et (Δ) demeure constant. Ce théorème est dû à Henri Lebesgue.

III. 1^{re} *Que peut-on dire de la projection orthogonale de (Γ) sur un plan $(\mathcal{P})$ perpendiculaire à (Δ_1) ?*

Il y a proportionnalité, avec rapport constant, entre $\Delta(m)$ et la distance de m à un plan fixe quelconque passant par (Δ) . Choisissons ce plan parallèle à la droite (Δ_1) , c'est alors le plan projetant orthogonalement (Δ) sur $(\mathcal{P})$. $\Delta(m)$ est proportionnel à la distance de m à ce plan, qui est aussi celle de la projection de m à la projection de (Δ) .

$\Delta_1(m)$ est la distance de la projection de m à un point fixe, tracé de (Δ_1) sur $(\mathcal{P})$. Il en résulte, d'après (5), que la *courbe projection de (Γ) sur le plan $(\mathcal{P})$ est une conique (γ) ayant pour foyer la trace (ou projection) de (Δ_1) et pour directrice la projection de (Δ) .*

En déduire le lieu du point de rencontre des tangentes aux extrémités d'une corde de (Γ) passant par le point C :

Ce lieu est projeté sur $(\mathcal{P})$ suivant le lieu analogue relatif à la conique (γ) , les cordes de (γ) passant par un de ses foyers. On reconnaît que ce lieu projeté est une droite, la directrice de (γ) relative à ce foyer. Et le lieu proposé dans (P) n'est autre que la droite (Δ) .

Ainsi, la droite (Δ) correspondant au point C, est la « polaire » de C par rapport à (Γ) ; cela aurait pu résulter de l'emploi de la transformation qui fait l'objet de la partie (I).

De la proposition connue : « une tangente à (γ) , limitée d'une part à son point de contact, d'autre part, à son point de rencontre avec une directrice, donne un segment vu du foyer correspondant sous un angle droit », résulte de même, par transfert à (Γ) , que :

le segment d'une tangente à (Γ) , limité à son point de contact et à la droite (Δ) , est vu de la droite (Δ_1) sous un angle dièdre droit.

2^o Supposons, pour éviter des complications d'emploi de mesures algébriques, que (Γ) soit une ellipse, ou une parabole. (γ) est nécessairement une ellipse, ou une parabole également (cette dernière courbe n'a qu'une tangente de direction donnée, propriété projective en projections cylindriques).

On considère deux points C et C' intérieurs à (Γ) et par ailleurs quelconques. C est le « pied » sur (P) de la droite (Δ_1) ; C' est, de même, le « pied » sur P, d'une droite analogue (Δ'_1) . La droite CC', qui contient des points intérieurs à (Γ) coupe nécessairement (Γ) en un point au moins à distance finie, soit m_0 . On appelle θ la mesure de l'angle dièdre $\widehat{m_0\Delta_1m}$ et θ' celle de l'angle dièdre $\widehat{m_0\Delta'_1m}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \theta' \leq \pi$).

Etablir que lorsque m varie sur (Γ) , θ et θ' sont liés par une relation de la forme :

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta'}{2}} = \text{Cte.}$$

Soient t le point de rencontre des tangentes à (Γ) en m et m_0 , p le point de rencontre des tangentes aux extrémités de la corde de (Γ) située sur Cm_0 . Projetons orthogonalement la figure sur le plan (Φ) perpendiculaire en C à (Δ_1) : soient T, P, M_0, M les projections de t, p, m_0, m . CP est perpendiculaire à CM_0 , et d'après le théorème de Poncelet, CT est bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{MCM_0}$, rectiligne du dièdre $m\Delta_1m_0$. Donc $\widehat{M_0CT} = \frac{\theta}{2}$. Les perpendiculaires TK, TL abaissées de T sur les droites

CM_0, CP , donnent lieu à la relation $\frac{KT}{LT} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$.

En revenant au plan (P) , les segments KT et LT sont projections sur (Φ) des segments kt et lt , le premier parallèle à Cp , le second parallèle à Cm_0 . Quand m se déplace sur (Γ) , tk et tl gardent des directions fixes, donc $KT = kt \times \text{Cte}$, $TL = tl \times \text{Cte}$, et l'on peut écrire : $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{kt}{lt} \times \text{Cte}$.

On voit de même, en considérant une projection auxiliaire de (P) sur le plan (Φ') perpendiculaire en C' à (Δ'_1) , que : $\operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} = \frac{k't}{l't} \times \text{Cte}$

$k't$ étant parallèle à $C'p$, et $l't$ étant parallèle à $C'm_0$. Les points t, l, l' sont donc alignés, l sur Cp , l' sur $C'p$.

Par division, on obtient : $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} = \frac{kt}{k't} : \frac{lt}{l't}$.

Quand m varie sur (Γ) , t se déplace sur la tangente m_0p , $\frac{kt}{k't}$ reste constant, la figure tkk' variant homothétiquement, le centre d'homothétie étant m_0 .

D'autre part $\frac{lt}{l't} = \frac{C'm_0}{Cm_0} = \text{Cte}$.

D'où $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} = \text{Cte}$.

C.Q.F.D.

Résultats et observations : Notre maître regretté, Henri LEBESGUE, souhaitait que sa contribution si originale à éclaircir les questions de Mathématiques élémentaires relatives aux coniques, fasse l'objet d'études proposées aux concours, estimant que rien n'était plus propre à mettre en évidence les beautés de la Géométrie.

Jusqu'ici, ce vœu du grand géomètre était resté lettre morte : c'est en hommage à sa mémoire que nous avons tenté de lui donner un essai de satisfaction.

Cependant, la transposition de ses méthodes pour les rendre accessibles à de jeunes esprits, nous a conduit à proposer ce sujet certainement long et hardi. Le résultat de ces efforts est cependant loin d'être décevant.

Il était à prévoir que les concurrents seraient arrêtés dans la partie (II, 4°) et dans la partie (II, 5°) qui n'ont été effectivement qu'abordées, vu le

manque de temps pour rédiger des solutions complètes ; en les donnant ici, nous avons le sentiment d'abuser un peu de l'hospitalité de ce *Bulletin*.

Nous devons citer, pour faire le point de l'impression générale résultant de la correction, des considérations développées, de manière très pertinente, par l'un des professeurs du Jury, qui s'est intéressé très vivement à cette expérience.

« Novice à ce Jury, je ne sais s'il est utile, ni même convenable, de dire les remarques d'ordre général que j'ai pu faire ; mais je me demande précisément, si, après une autre expérience analogue, celle de cette année ne ferait pas écran entre mes souvenirs de lycéen ou normalien et de nouvelles impressions.

En effet, je n'ai enseigné en Élémentaires que pendant mon stage d'agrégation, puis dans une classe mêlée provisoirement à une classe de Saint-Cyr. J'ai interrogé aussi au baccalauréat. Chaque année, plus que la précédente, j'ai été effaré du peu de solidité des connaissances des bacheliers en Mathématiques, et me suis trouvé tenté de parler d'une faillite de l'Enseignement secondaire, et de dire trompeurs les programmes d'étude et d'examens qui ne correspondent pas aux possibilités intellectuelles de la génération actuelle.

Or, en corrigeant cette soixantaine de copies des meilleurs élèves de l'Enseignement secondaire (et aucune d'elles n'est très bonne), il m'a semblé, au contraire, qu'il n'y avait pas, aujourd'hui, moins le *très bons élèves* que par le passé, et que, pour ceux-là du moins, des termes comme ceux que j'emploierais en parlant des assez bons et des moyens seraient injustifiés.

Plus précisément :

1) Je m'attendais à trouver beaucoup de démonstrations utilisant des triangles semblables, des angles alternes-internes, valables dans un cas spécial de figure. Or, au contraire, les concurrents m'ont paru très familiarisés avec le théorème de Thalès sous sa forme algébrique, et surtout plusieurs ont bien su remarquer, dans une figure, que tels éléments se correspondaient dans une transformation simple (homothétie, affinité...) ; je vois là un signe net d'une grande amélioration de l'enseignement de la Géométrie.

2) Je craignais aussi l'emploi plus ou moins heureux de notions hors du programme (points à l'infini) ; sauf dans quelques copies il n'y en a guère eu.

3) Certaines copies sont peu soignées ; bien entendu, quelques-unes contiennent des fautes d'orthographe ; dans l'une d'elles, d'ailleurs assez bonne, les deux figures principales du début ont été omises. Mais dans l'ensemble, la rédaction a été assez nette ; la division, extrêmement précise du texte, facilitait d'ailleurs considérablement le travail des concurrents.

Je ferais pourtant deux critiques générales, l'une déjà indiquée à propos du paragraphe 3^e de la I^{re} partie : il semble que les constructions géométriques, le tracé expérimental du lieu d'un point d'une figure variable, l'étude de celle-ci au voisinage de ses formes limites ne soient pas employées dans la recherche d'une solution. De même, je n'ai vu aucun candidat s'aider au début de la II^e partie d'une petite épure de géométrie descriptive.

Mais, surtout, j'ai l'impression que, parmi les concurrents, il n'y en a pas eu pour qui aient été dégagées nettement, à propos des exemples du programme, les propriétés des transformations. Certes, c'est là un travail de synthèse qui a plus sa place en Mathématiques supérieures qu'en élémentaires ; mais, à mes yeux, les concurrents qui auraient pu commettre plus souvent un lapsus en employant le mot usuel de « transformé » au lieu du mot « associé » du texte (choisi, je pense, pour éviter toute confusion), n'auraient pas dû être surpris de se voir demander si cette transformation ponctuelle était *toujours définie* ; ils auraient dû se demander, d'eux-mêmes, si elle avait une *inverse*, si celle-ci était toujours définie, si elle était distincte de la transformation initiale... Je n'ignore pas les difficultés qu'éprouvent mes collègues de Mathématiques élémentaires pour traiter entièrement un très lourd programme ; mais, sinon dans une leçon magistrale, qui ne pourrait être faite que tard dans l'année, au moins à l'occasion d'un problème, une comparaison, par exemple, des différentes transformations du programme serait, il me semble, extrêmement fructueuse. »

Remarques particulières : 1° a) Les concurrents n'ont pas toujours compris le paragraphe : « Que devient cette homothétie... ». Elle devient une translation (variable avec m) ; certains ont donné une construction de n dans ce cas.

b) Quand m est sur CF, la transformation a le même effet qu'une inversion. Très peu de candidats l'ont exprimé.

c) Au contraire, la plupart des concurrents ont bien reconnu que, pour m sur (D), n était à l'infini et réciproquement ; mais ce n'est qu'une minorité des meilleurs qui a pensé à préciser la direction du point à l'infini, n correspondant à une position de m sur (D), et inversement.

d) « ... n décrit une droite N... » Il résulte de ce qui précède, que les concurrents n'ont pas su profiter des indications précises que fournissaient les premiers paragraphes. En fait, sur 60 copies lues, 40 n'ont pu démontrer le fait demandé ; parmi ces 40 une dizaine contiennent pourtant des indications sur des propriétés de (N) obtenues en supposant que ce soit une droite. Une dizaine de copies contiennent des démonstrations fantaisistes méritant d'être pénalisées.

Cette fin du paragraphe 1° a donc été le premier obstacle véritable des concurrents ; plusieurs ont donné la démonstration très simple qui s'imposait ; l'un d'eux a donné une démonstration plus longue, mais dénotant, de la part de son auteur, une certaine maturité : « (N) est une droite si (M) passe par (C) ; mais si l'on compare deux transformations définies par la même droite (D), le même point F, et deux points C, C', situés sur la même parallèle à (D), les transformées n, n' d'un même point se déduisent l'un de l'autre par translation : $\overrightarrow{nn'} = \overrightarrow{CC'}$; il suffisait alors, par une translation, d'amener C sur (M). »

2° Cette question a été bien comprise, et, en général, bien faite (5 copies sur 60 n'ont pas la moyenne pour elle). Rares pourtant ont été ceux qui ont fait un rapprochement entre la nature de la conique (possibilité pour m

d'aller à l'infini) et l'intersection de (D) et de (C). Je n'ai vu signaler nulle part, que les droites se transformant en droites, les tangentes à (Γ) se transformaient en tangentes à (C), d'où résultait une vérification de la propriété immédiate « F intérieur à (C) ».

3° Cette question a été rarement traitée ; pourtant, on trouve dans une quinzaine de copies des réponses plus ou moins complètes — ou consciencieuses — aux deux premiers paragraphes. Tout d'abord la grande majorité des concurrents construit la droite (Ψ) associée à (Φ), et non la droite (Δ) dont (Φ) est l'associée. Résultat d'une lecture peu attentive du texte qui ne prêtait à aucune ambiguïté, certes, mais avec cette circonstance atténuante qu'ils avaient constaté, en 1°, que la transformation était réciproque pour des points particuliers.

II^e PARTIE. — 1° A été très bien compris, sinon très bien expliqué. Pourtant quelques candidats, qui avaient bien traité cette question, ont préféré continuer dans les questions suivantes (il est vrai qu'ils ne sont pas allés bien loin) à se servir de figures de l'espace.

2° Egalement bien comprise et bien traitée, par ceux, du moins, qui étaient allés jusqu'à elle.

3° Au contraire, cette question a arrêté presque tous les concurrents, et ceux qui l'ont franchie, n'ont pu venir à bout de la seconde question du 4°.

Un des concurrents a récité, à l'occasion de la question 3°, des propriétés de l'involution à points doubles imaginaires qui, effectivement, auraient pu lui être utiles, mais qu'il n'a pas su exploiter.

La formule $\frac{|F\lambda - F\mu|}{F\lambda + F\mu} = \sin \alpha$ n'a pu être démontrée.

Il est remarquable que tous les correcteurs ont mis l'accent sur les mêmes insuffisances.

Un autre signale que six sur 60 des candidats ont montré que $F\lambda$ et $F\mu$ sont des droites symétriques par rapport à la droite FA, mais aucun n'a démontré la propriété pour les demi-droites.

148 concurrents ont pris part à l'épreuve, dont trois ont remis des copies blanches. Les copies ont été triées dans une première réunion, après lecture de chacune par deux correcteurs. 24 ont été retenues pour un examen plus approfondi, par tous les correcteurs.

Palmarès : Il a été attribué un premier et un second prix (pas de troisième prix) et 10 accessits. Les notes globales (sur 20) varient de 18,8 à 9,6.

La copie classée première est remarquable par la qualité des raisonnements, malgré quelques lourdeurs. La seconde est fort intelligente, mais il lui manque des raccourcis en langage ordinaire : la rédaction est sobre, et ne fait pas assez usage de mesures algébriques. La partie III a été abordée.

Les autres copies primées sont estimables, soit par l'intelligence des figures, soit par le soin de la rédaction.

Le premier prix est le lauréat de l'an dernier du Concours général de Première qui y fut classé premier. On retrouve également des lauréats de ce concours, obtenant, en 1950, les premier, troisième et septième accessits.

Dans l'ensemble de toutes les copies, on constate une très forte accumulation au-dessous de 8 sur 20, et une quinzaine de résultats au-dessus de 10, qui ont fourni d'ailleurs presque tous les lauréats.

La comparaison du concours de cette année avec celui de l'année précédente est plutôt en faveur des concurrents de 1950, surtout si l'on prend comme élément de comparaison l'ensemble des résultats obtenus par tous les concurrents. Les copies ont été signalées cette année comme de correction plus aisée, ce qui est très encourageant puisqu'il s'agissait cette fois de Géométrie. Il nous est permis de conclure sur une impression nettement optimiste.

L'Inspecteur général, Président du Jury,

P. ROBERT.
