

Sur la géométrie du cycle

par E. EHRHART, professeur agrégé au Lycée Kléber, Strasbourg

Il nous paraît utile de grouper quelques propriétés simples des cycles. Elles nous montreront, une fois de plus, le rôle de l'orientation : supprimer les difficultés provenant de l'existence de plusieurs cas de figure en ramenant la pluralité à l'unicité.

DÉFINITIONS. — En orientant un cercle on le transforme en *cycle*. Les tangentes orientées dans le sens du cycle sont ses *axes tangents*. Si le plan support est orienté, nous pouvons définir le *rayon algébrique* du cycle : c'est le nombre qui a pour valeur absolue la mesure du rayon du cercle, et qui est positif ou négatif suivant que le cycle et le plan orienté sont de même sens ou non.

CYCLES TANGENTS. — Deux cycles $\vec{O}$, $\vec{O}'$ sont dits tangents en un point commun A, s'ils ont en ce point même axe tangent. Nous dirons qu'ils sont tangents intérieurement, si leurs cercles supports le sont. *La tangente est alors intérieure ou extérieure, suivant que les rayons sont de même signe ou non.* On vérifie facilement que sur l'axe déduit de l'axe tangent commun par rotation de $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ autour de A, on a dans tous les cas

$\overline{OO'} = r' - r$. Réciproquement, si, pour une orientation convenable de la ligne des centres $\overline{OO'} = r' - r$, les deux cycles sont tangents.

CYCLES HOMOTHÉTIQUES. — Par définition l'homothétique d'un axe est l'axe de même sens porté par l'homothétique de sa droite support. Si K est le rapport d'homothétie, à un vecteur $\overline{AB}$ du premier axe correspond un vecteur $\overline{A'B'}$ du second, tel que $\overline{A'B'} = K\overline{AB}$. L'homothétique d'un cycle donné $\tilde{O}$ sera le cycle dont les axes tangents sont les homologues de ceux de $\tilde{O}$. Il résulte de cette définition, que ces cycles seront de même sens ou non, suivant que l'homothétie est directe ou inverse, et que l'on a toujours $r' = Kr$ et $\overline{A'B'} = K\overline{AB}$, où $\overline{AB}$ désigne la mesure algébrique sur $\tilde{O}$ de l'arc orienté $\overline{AB}$. On remarquera que dans le cas de l'homothétie inverse, si un point décrit $\tilde{O}$ dans son sens positif, son homologue décrit O' dans son sens négatif. On voit aussi que l'homothétie conserve aux points correspondants l'angle orienté de deux cycles ou d'un axe et d'un cycle.

Fait essentiel : deux cycles inégaux ($r' \neq r$) sont toujours homothétiques d'une manière et d'une seule, puisqu'il existe sur la droite OO' un point et un seul, qui divise $O'O$ dans le rapport $\frac{r'}{r}$. (Si les cycles ont même centre, c'est lui qui est le centre d'homothétie) (1).

Les centres d'homothétie de trois cycles pris deux à deux sont alignés, car des trois rapports $\frac{r_1}{r_2}, \frac{r_2}{r_3}$ et $\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3}$, il y en a toujours zéro ou deux qui sont négatifs.

CYCLES INVERSES. — Etant donnés deux cycles de centre d'homothétie I , nous dirons qu'ils se correspondent dans l'inversion de centre I et de puissance K telle, que l'inversion (I, K) échange leurs cercles supports. Pour que cette inversion unique échangeant deux cycles donnés existe, il faut et il suffit qu'ils ne soient, ni tangents, ni égaux. Si K est positif, à un point M parcourant le cycle $\tilde{C}$ dans son sens positif, correspond dans l'inversion un point M' parcourant le cycle $\tilde{C'}$ dans son sens négatif, puisque le point homothétique M'' le parcourt dans son sens positif.

Quel que soit le signe de K , les axes tangents en M et M'' sont parallèles et de même sens. Donc les axes tangents en M et M' ont des directions symétriques par rapport à la droite IM . Il en résulte que l'inversion renverse le sens de l'angle orienté de deux cycles en des points homologues. En particulier l'inversion conserve la tangente de deux cycles. Une inversion qui conserve le cercle support d'un cycle conserve aussi son sens.

(1) Les sens de parcours dans le plan orienté de deux points homologues sur deux cercles homothétiques étant identiques, aussi bien dans l'homothétie directe que dans l'inverse, ils ne peuvent servir à définir l'homothétie unique de deux cycles donnés.

Si un cycle $\tilde{\Gamma}$ est tangent à deux cycles $\tilde{C}, \tilde{C}'$ donnés, la droite de contact passe par leur centre d'inversion (ou d'homothétie). On sait, en effet, que cette droite passe par l'un des centres I d'inversion des cercles C, C'. L'inversion de centre I, qui échange ces cercles, conserve le cercle $\tilde{\Gamma}$ et donc $\tilde{\Gamma}$. Par suite, les cycles transformés de $\tilde{C}$ et $\tilde{C}'$ sont portés par C et C' et sont tangents à $\tilde{\Gamma}$: ce sont bien les cycles $\tilde{C}', \tilde{C}$. Remarquons que tout axe tangent commun à $\tilde{C}, \tilde{C}'$ passe aussi par I.

Il résulte du précédent, que si deux cycles $\tilde{\Gamma}, \tilde{\Gamma}'$ sont tangents à $\tilde{C}, \tilde{C}'$, leur axe radical passe par I, car ce point a même puissance par rapport à $\tilde{\Gamma}$ et $\tilde{\Gamma}'$, égale à la puissance de l'inversion qui échange $\tilde{C}, \tilde{C}'$.

Orientons arbitrairement la droite passant par I et portant le diamètre AB de C. Sur cet axe nous avons

$$\overline{A'B'} = \overline{IB'} - \overline{IA'} = \frac{K}{\overline{IB}} - \frac{K}{\overline{IA}} = \frac{-K(\overline{IB} - \overline{IA})}{\overline{IA} \overline{IB}} = \frac{-K \cdot AB}{p},$$

où p désigne la puissance de I par rapport à C. D'où : $|r'| = \left| \frac{rK}{p} \right|$. Mais

on a aussi toujours $r' = \frac{rK}{p}$. En effet, si p et K sont positifs, cela est évident, et quand K ou p change de signe, r' en change également. Cette formule fournit en particulier aisément le sens du cycle inverse, sans recours à l'homothétie.

CYCLE INSCRIT A UN TRIAXE. — Le lieu des centres des cycles tangents à deux axes est la bissectrice extérieure de leur angle. Considérons trois axes quelconques $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, se coupant en $A(\vec{\beta}, \vec{\gamma}), B(\vec{\gamma}, \vec{\alpha}), C(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$. Il existe un cycle et un seul tangent aux trois axes. Son centre I est le point de concours des bissectrices extérieures des angles $(\vec{\beta}, \vec{\gamma}), (\vec{\gamma}, \vec{\alpha}), (\vec{\alpha}, \vec{\beta})$. Nous l'appellerons « inscrit » au « triaxe $\vec{\alpha}\vec{\beta}\vec{\gamma}$ ». Posons

$$\overline{BC} = a, \quad \overline{CA} = b, \quad \overline{AB} = c, \quad a + b + c = 2p.$$

Soient T, T', T'' les points de contact du cycle avec $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$. Nous allons montrer que, quelle que soit la disposition des axes donnés

$$\overline{AT''} = p - a, \quad \overline{BT} = p - b, \quad \overline{CT'} = p - c.$$

En effet, puisque I est sur la bissectrice extérieure de $(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$,

$$\overline{AT''} = -\overline{AT'}; \text{ de même } \overline{BT} = -\overline{BT'}, \overline{CT'} = -\overline{CT''}.$$

$$\text{Donc } \overline{AT''} = \overline{BT''} - \overline{BA} = -\overline{BT'} + c,$$

$$-\overline{AT'} = -\overline{CT'} + \overline{CA} = \overline{CT''} + b,$$

$$\text{et par addition } 2\overline{AT''} = -\overline{BC} + b + c = -a + b + c.$$

On a bien $\overline{AT''} = p - a$ et, par permutation circulaire, $\overline{BT} = p - b$, $\overline{CT'} = p - c$.

Démontrons maintenant que l'on a *toujours* $S = pr$, où S désigne l'aire algébrique du triaxe, c'est-à-dire le nombre qui a pour valeur absolue la mesure de l'aire du triangle ABC, et qui est positif ou négatif suivant que le contour du triangle, décrit dans l'ordre ABC, est du sens du plan orienté ou non.

Posons $\overline{HA} = h$, la mesure algébrique de cette hauteur se faisant sur l'axe déduit de $\vec{\alpha}$ par rotation de $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ autour de son pied H. On a alors *toujours* $S = \frac{ah}{2}$, car cela est évident quand a et h sont positifs, et S change de signe quand a ou h en change. En appliquant cette formule au triangle IBC, on a $S_{IBC} = \frac{ar}{2}$, car $\overline{TI}$, mesuré sur l'axe déduit de $\vec{\alpha}$ par rotation de $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ autour de T, a le signe de r (positif si le sens du cycle est celui du plan orienté). On a de même $S_{ICA} = \frac{br}{2}$, $S_{IAB} = \frac{cr}{2}$. Comme d'après la formule de Moebius des aires algébriques on a toujours $S_{IBC} + S_{ICA} + S_{IAB} = S_{ABC}$, la relation $S = pr$ est établie (1).

E. EHRHART.

(1) On reconnaît en $BT = p - b$ et $S = \frac{ah}{2} = pr$ des formules trigonométriques classiques. Dans *Le triangle orienté* (en vente chez l'auteur, prix : 150 fr.), nous démontrons que toute formule du triangle s'étend à un triaxe quelconque avec des conventions de signes convenables.