

A propos d'un problème de Baccalauréat

Il s'agit de l'hyperbole (H), d'excentricité 2, de foyer O, de directrice Δ . On appelle A le sommet de (H) symétrique de O par rapport à Δ . L'énoncé proposé aux candidats se terminait ainsi : « P étant un point quelconque de (H), on considère le cercle (C), de centre C, circonscrit au triangle OAP et on demande de démontrer l'égalité entre angles de droites $(CO, CP) = \frac{2}{3}(CO, \Delta)$ et de déduire de cette égalité que (C) coupe (H), outre A, en trois points P, Q, R; sommets d'un triangle équilatéral. » On peut se demander :

1° le sens qu'il convient de donner au symbole $\frac{2}{3}(CO, \Delta)$;

2° comment le fait que (CO, CQ) est connu fournira un seul point Q et non deux points diamétralement opposés ;

3° pourquoi, un calcul simple sur les angles de demi-droites permettant en fait d'obtenir le triangle équilatéral PQR, on a été amené à introduire dans l'égalité de l'énoncé des angles de droites.

Pour répondre à ces questions, on est conduit à reprendre la théorie de l'angle généralisé telle qu'elle est ordinairement présentée : définition, demi-droite mobile, différentes déterminations, orientation du plan et mesures algébriques de ces différentes déterminations. Symbole $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \alpha + 2k\pi$ où α est une détermination (1) quelconque, mais qui a été préalablement choisie et $(\vec{OA}, \vec{OB})$ une détermination quelconque qui pourra être choisie ultérieurement.

Egalité : $(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OC}, \vec{OD}) + 2k\pi$ $(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{OB}) + 2k\pi$.

Ce sont des égalités algébriques qui contiennent chacune trois indétermi-

(1) Détermination est mis ici pour : mesure algébrique d'une détermination.

nés, le troisième est déterminé par le choix de deux autres, et cela, quel que soit le choix, parmi les valeurs *à priori* possibles, qui a été fait. Ces égalités ont aussi un sens géométrique : le déplacement plan qui fait correspondre $\vec{OC}$ à $\vec{OA}$ fait correspondre $\vec{OD}$ à $\vec{OB}$, mais l'égalité géométrique s'écrirait $(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OC}, \vec{OD})$.

Formule de Chasles : Soient trois demi-droites $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$, on a établi, pour des déterminations choisies, α , β et γ de $(\vec{OA}, \vec{OB})$, $(\vec{OA}, \vec{OC})$ et $(\vec{OC}, \vec{OB})$, l'égalité algébrique $\alpha = \beta + \gamma$,

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = \alpha + 2k_1\pi \quad (\vec{OA}, \vec{OC}) = \beta + 2k_2\pi \quad (\vec{OC}, \vec{OB}) = \gamma + 2k_3\pi.$$

Fixons k_1 , k_2 et k_3 et soient $(\vec{OA}, \vec{OB})_{k_1}$, $(\vec{OA}, \vec{OC})_{k_2}$, $(\vec{OC}, \vec{OB})_{k_3}$ les déterminations correspondantes, un calcul simple (et classique) permet d'écrire :

$$(1) \quad (\vec{OA}, \vec{OB})_{k_1} = (\vec{OA}, \vec{OC})_{k_2} + (\vec{OC}, \vec{OB})_{k_3} + 2k\pi$$

avec $k = k_1 - k_2 - k_3 \quad (2).$

L'égalité algébrique (1) est vérifiée si, et seulement si, l'égalité algébrique (2) l'est. Dans l'égalité algébrique (2), on peut choisir arbitrairement trois quelconques des quatre entiers indéterminés qui y figurent, le quatrième se trouve alors déterminé, comme dans les égalités précédentes. Nous écrivons aussi $(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{OC}) + (\vec{OC}, \vec{OB}) + 2k\pi$, égalité (1) *bis*.

Supposons maintenant que $(\vec{OC}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{OC}) + 2k\pi$, nous aurons :

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{OC}) + (\vec{OA}, \vec{OC}) + 2k\pi \quad (3) \text{ ter.}$$

Avec des déterminations choisies $\alpha = 2\beta + n \cdot 2\pi$, n étant déterminé par le choix préalable de nos déterminations, un calcul analogue nous donne

$$(3) \quad (\vec{OA}, \vec{OB})_{k_1} = 2(\vec{OA}, \vec{OC})_{k_2} + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k = k_1 - 2k_2 + n \quad (4),$$

n est fixé, il y a trois indéterminés k , k_1 et k_2 , nous ne pouvons plus choisir arbitrairement les entiers k et k_1 : il est nécessaire, et suffisant, que $k - k_1 - n$ soit pair. Nous pourrions bien écrire

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{OA}, \vec{OC}) + 2k\pi \quad (3) \text{ bis}$$

avec les indéterminés, mais nous ne pourrions avoir l'égalité algébrique que si nous choisissons convenablement la détermination de $(\vec{OA}, \vec{OB})$ et k . D'ailleurs ceci apparaît si nous écrivons $2(\vec{OA}, \vec{OC}) = (\vec{OA}, \vec{OB}) + 2k\pi$. Le premier membre, produit de nombres, est défini à 4π près, le second, si $(\vec{OA}, \vec{OB})$ et k sont arbitraires, donne un nombre algébrique défini à 2π près, d'où la condition supplémentaire pour le choix simultané de la détermination de $(\vec{OA}, \vec{OB})$ et de l'entier k . Au contraire, dans l'égalité (3) *ter*, qui, comme (1) *bis*, comporte quatre indéterminés, pas de restriction quant à leur choix.

On peut cependant, dans l'égalité (3) *ter*, remplacer

$$(\vec{OA}, \vec{OC}) + (\vec{OA}, \vec{OC}) \quad \text{par} \quad 2(\vec{OA}, \vec{OC})$$

(convention bien naturelle), mais alors

$2(\vec{OA}, \vec{OC}) = (\vec{OA}, \vec{OC}) + (\vec{OA}, \vec{OC}) = \beta + 2k_2\pi + \beta + 2k_3\pi = 2\beta + 2k\pi$
 $2(\vec{OA}, \vec{OC})$ n'indique plus un produit de nombres.

Nous obtenons ainsi l'égalité (III) $(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{OA}, \vec{OC}) + 2k\pi$. Cette égalité ne diffère qu'en apparence de l'égalité (3) *ter*

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{OC}) + (\vec{OA}, \vec{OC}) + 2k\pi,$$

elle a ses quatre indéterminés, sans restriction ; au contraire, elle s'écrit exactement comme l'égalité (3) *bis* $(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{CA}, \vec{OC}) + 2k\pi$, mais ici il n'y a plus que trois indéterminés, avec restriction ; cette différence essentielle provient du fait que le symbole $2(\vec{OA}, \vec{OC})$ désigne dans le premier cas le terme général d'une progression de raison 2π , dans le second le terme général d'une progression de raison 4π .

Recherche de la bissectrice : I. Soit un angle orienté $(\vec{OA}, \vec{OB})$ donné. Considérons la demi-droite mobile qui balaye l'une quelconque, mais choisie, des déterminations de $(\vec{OA}, \vec{OB})$, de mesure algébrique $\alpha + 2n\pi$, si l'on arrête la demi-droite mobile à mi-parcours la mesure algébrique de l'angle balayé est $\frac{\alpha + 2n\pi}{2} = \frac{\alpha}{2} + n\pi$; inversement, si une demi-droite, partie de $\vec{OA}$, est arrêtée après avoir balayé un angle de mesure algébrique $\frac{\alpha}{2} + n\pi$ (n quelconque, mais choisi), puis qu'on lui fasse balayer encore un angle égal, elle aura balayé un angle de mesure algébrique $(\frac{\alpha}{2} + n\pi) \times 2 = \alpha + 2n\pi$, elle sera donc sur $\vec{OB}$.

Notre raisonnement suppose n choisi, à chaque détermination de $(\vec{OA}, \vec{OB})$ il correspond une bissectrice $\vec{OX}_n$ et nous connaissons une détermination particulière de $(\vec{OA}, \vec{OX}_n)$, nous pouvons donc écrire

$$(\vec{OA}, \vec{OX}_n) = \frac{\alpha}{2} + n\pi + 2k\pi.$$

Nous remarquons que $(\vec{OA}, \vec{OX}_{n+2}) = (\vec{OA}, \vec{OX}_n) + 2k\pi$, il ne subsiste en définitive que les bissectrices $\vec{OX}_0$ et $\vec{OX}_1$.

II. Ce n'est point ainsi que l'on procède d'habitude. On dit : soit à déterminer une demi-droite qui fasse des angles égaux avec $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$. Supposons qu'une telle demi-droite existe et soit $\vec{OX}$ cette demi-droite, nous avons alors $(\vec{OA}, \vec{OX}) = (\vec{OX}, \vec{OB}) + 2k\pi$.

Or, $(\vec{OX}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{OB}) - (\vec{OA}, \vec{OX}) + 2k\pi$,
 par suite $(\vec{OA}, \vec{OX}) + (\vec{OA}, \vec{OX}) = (\vec{OA}, \vec{OB}) + 2k\pi$.

On remplace, ce qui paraît si naturel $(\vec{OA}, \vec{OX}) + (\vec{OA}, \vec{OX})$, par $2(\vec{OA}, \vec{OX})$ où l'on entend (première erreur, d'après ce que nous avons

vu), produit par 2 d'une détermination quelconque de $(\vec{OA}, \vec{OX})$. On obtient ainsi, après division par 2 : $(\vec{OA}, \vec{OX}) = \frac{\alpha}{2} + k\pi$ (α choisi, k indéterminé), égalité qui, en vérité, n'a pas grand sens. On l'interprète en disant que cette égalité définit, non pas une demi-droite, mais deux demi-droites, suivant la parité de k , qui sont les bissectrices, si elles existent.

La deuxième erreur, qui se trouve rattraper la première, est que l'on applique à l'ensemble des deux demi-droites des conditions nécessaires qui sont vérifiées séparément par chacune d'elles. Je m'explique : on a cru établir que si une demi-droite $\vec{OX}$ est bissectrice, on a nécessairement $2(\vec{OA}, \vec{OX}) = \alpha + 2k\pi$, α choisi, k indéterminé. On trouve deux solutions $\vec{OX}_1$ et $\vec{OX}_2$, on devrait donc avoir :

$$2(\vec{OA}, \vec{OX}_1) \text{ et } 2(\vec{OA}, \vec{OX}_2) = \alpha + 2k\pi,$$

on se contente de :

$$2(\vec{OA}, \vec{OX}_1) \text{ ou } 2(\vec{OA}, \vec{OX}_2) = \alpha + 2k\pi.$$

Au contraire, nous avons bien, pour l'une et l'autre :

$$(\vec{OA}, \vec{OX}_1) + (\vec{OA}, \vec{OX}_1) = \alpha + 2k\pi \quad (\vec{OA}, \vec{OX}_2) + (\vec{OA}, \vec{OX}_2) = \alpha + 2k\pi.$$

On a remplacé le choix de deux déterminations d'une solution par le choix de l'une ou l'autre solution.

II bis. Le calcul est présenté quelquefois d'une façon légèrement différente. On part encore de l'égalité $(\vec{OA}, \vec{OX}) = (\vec{OX}, \vec{OB}) + 2k\pi$, mais on pose $(\vec{OA}, \vec{OX}) = \varphi$, on arrive à la condition $2\varphi = \alpha + 2k\pi$,

ou bien φ est supposé être une détermination choisie de l'angle $(\vec{OA}, \vec{OX})$ supposé exister et l'égalité indique alors qu'il existe une détermination de $(\vec{OA}, \vec{OB})$ qui est égale à 2φ , la condition est suffisante et on devrait terminer comme au I,

ou bien φ est une autre manière d'écrire $(\vec{OA}, \vec{OX})$ et les critiques du II restent valables.

III. Le calcul peut, je crois, être mené correctement de la façon suivante :

1) Au sens de l'égalité (3) bis (produit de nombres).

On doit avoir (5) $2(\vec{OA}, \vec{OX}) + 2h\pi = \alpha + 2k\pi$, mais, restriction arithmétique : $k - h$ doit avoir une parité déterminée, il doit donc être, soit pair, soit impair, on doit donc avoir :

$$\text{soit} \quad 2(\vec{OA}, \vec{OX}) = \alpha + 2\pi \cdot 2n = \alpha + 4n\pi,$$

$$\text{soit} \quad 2(\vec{OA}, \vec{OX}) = \alpha + 2\pi(2n + 1) = \alpha + 2\pi + 4n\pi.$$

D'où $(\vec{OA}, \vec{OX}_1)$ et $(\vec{OA}, \vec{OX}_2)$ et, pour les deux solutions l'égalité (5) est vérifiée.

2) Au sens de l'égalité III. Nous avons posé

$$2(\vec{OA}, \vec{OC}) = (\vec{OA}, \vec{OC}) + (\vec{OA}, \vec{OC}) = 2\beta + 2k\pi,$$

le quotient par 2 de $2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ n'est point ici (OA, OC) , c'est $\beta + k\pi$, c'est-à-dire le terme général de la progression obtenue en insérant un moyen entre chacun des termes de la progression $\beta + 2k\pi$.

La condition $2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX}) = \alpha + 2k\pi$ signifie donc que la progression $\frac{\alpha}{2} + k\pi$ est obtenue en insérant un moyen entre chaque terme de la progression $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX})$, d'où les deux progressions nécessaires, d'où les deux solutions.

En résumé, nous avons vu apparaître de sérieuses difficultés dès que nous avons voulu définir un multiple d'un angle ; nous sommes devant l'alternative suivante : ou bien renoncer au produit dans le sens produit de deux nombres, ou bien adjoindre à nos égalités algébriques des conditions arithmétiques. Si nous songeons aussi aux difficultés impliquées par la seule égalité $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha + 2k\pi$ (où le nombre entier k ne figure pas au premier membre) et à la clarté apportée par la considération, non plus du terme général, mais de l'ensemble des termes de la progression, nous comprenons l'utilité, voire même la nécessité de définir et d'étudier ce que nous appellerons

Le calcul des progressions arithmétiques

Définitions. — Dans tout ce qui suit nous appelons progression l'ensemble des termes d'une progression arithmétique indéfinie dans les deux sens. Symbole (a) , s'il y a lieu d'indiquer la raison r , nous écrirons $(a)_r$.

Nous supposons cet ensemble ordonné ; chaque terme se déduit du précédent en ajoutant r . Si on prend les termes de n en n on obtient un sous-ensemble qui est lui-même une progression que nous appellerons sous-progression d'ordre n . Symbole $(a)_{nr}$.

$(a)_r$ étant donné, il existe n sous-progressions $(a)_{nr}$; $(a)_r$ peut être regardé comme constitué par la réunion des n sous-progressions.

Inversement, $(a)_r$ donné peut être considéré comme sous-progression d'ordre n de la progression obtenue en insérant $(n-1)$ moyens entre deux termes consécutifs de $(a)_r$, nous appellerons sur-progression d'ordre n cette progression. Symbole $(a)_{\frac{r}{n}}$.

La progression initiale $(a)_r$ est l'une des n sous-progressions d'ordre n de $(a)_{\frac{r}{n}}$, chacune d'elles admettant pour sur-progression d'ordre n $(a)_{\frac{r}{n}}$.

De même $(a)_r$ est la sur-progression d'ordre n de chacune des $(a)_{nr}$.

Egalité. — Nous dirons que deux progressions sont égales si elles sont constituées des mêmes termes et nous écrirons $(a) = (b)$.

Si deux progressions sont égales, leurs sous-progressions d'ordre n sont les mêmes, leurs sur-progressions d'ordre n sont égales.

Addition. — Etant donnés une progression $(a)_r$ et un nombre β , si on ajoute le nombre β à chaque terme de (a) , on obtient tous les termes d'une

progression (c) et on n'obtient que cela. Nous dirons que la progression (c) est la somme de la progression (a) et du nombre β , nous écrirons

$$(c) = (a) + \beta ;$$

(c) est, comme (a) , de raison r .

La progression (c) ne change pas si on remplace β par l'un quelconque des termes de la progression (b) admettant β pour l'un de ses termes et de raison r , nous dirons que (c) est la somme des progressions (a) et (b) et nous écrirons $(c) = (a) + (b)$, ce qui signifie que si α est un terme de (a) , β un terme de (b) , $\alpha + \beta$ est un terme de (c) , et que si γ est un terme de (c) , il existe un couple de termes α, β , tel que $\alpha + \beta = \gamma$ (il existe une infinité de tels couples). Nous pourrions écrire aussi : $(c)_r = (a)_r + (b)_{nr}$, $(b)_{nr}$ étant l'un des n sous-progressions d'ordre n de $(b)_r$.

Nous pourrions généraliser, définir la somme $(a)_r + (b)_r + \dots + (l)_r$, c'est une progression de raison r qui a pour terme $\alpha + \beta + \dots + \lambda$.

Tout ceci repose sur le lemme suivant : pour que deux nombres appartiennent à une même progression, il faut et il suffit qu'ils diffèrent d'un multiple entier de la raison.

Multiplication naturelle. — *Multiplication et division homothétiques :* Etant donnés une progression $(a)_r$ et un nombre entier n , il est naturel d'appeler produit de la progression par l'entier la somme de n progressions égales à (a) . Symbole $n(a)$, raison r .

Si α est un terme de (a) , $n\alpha$ est un terme de $n(a)$. Divisons par n chaque terme de $n(a)$, nous obtenons une progression qui contient tous les termes de $(a)_r$ et qui a pour raison $\frac{r}{n}$; c'est la sur-progression d'ordre n de $(a)_r$, $(a)_{\frac{r}{n}}$. Nous appellerons division homothétique l'opération que nous venons de faire subir à $n(a)$. Etant donnés une progression $(a)_r$ et un nombre entier n , nous appelons quotient homothétique de la progression par l'entier, la progression constituée par le quotient de chaque terme de $(a)_r$ par l'entier n et produit homothétique, la progression constituée par le produit de chaque terme de $(a)_r$ par l'entier n . Symboles $\left(\frac{ar}{n}\right)$; (nar) .

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant : le quotient homothétique par n du produit naturel par n d'une progression donnée $(a)_r$ est la sur-progression d'ordre n de $(a)_r$; ou l'énoncé équivalent : le produit naturel par n d'une progression donnée $(a)_r$ est le produit homothétique par n de la sur-progression d'ordre n de $(a)_r$; et traduire ces deux énoncés

$$\text{par les deux identités : } \left[\frac{n(a)_r}{n} \right] = (a)_{\frac{r}{n}} \quad n(a)_r = (na)_{\frac{r}{n}}.$$

Division naturelle. — C'est l'opération inverse de la multiplication naturelle. Etant donnés une progression $(a)_r$ et un nombre entier n , s'il existe une progression $(x)_r$, telle que $n(x)_r = (a)_r$, nous dirons que (x) est le quotient naturel de la progression (a) par l'entier n . Symbole $(x) = \frac{1}{n}(a)$.

L'égalité $n(x)_r = (a)_r$ peut s'écrire $(n x \frac{r}{n}) = (a)_r$ ou $(x) \frac{r}{n} = (\frac{ar}{n})$
 $(\frac{ar}{n})$ est donc la sur-progression d'ordre n de (x) , autrement dit (x) est
 une sous-progression d'ordre n de $(\frac{ar}{n})$.

Théorème : Etant donnés une progression $(a)_r$ et un nombre entier n ,
 il y a n progressions quotients naturels de $(a)_r$ par n ; ces n progressions
 sont les sous-progressions d'ordre n du quotient homothétique de $(a)_r$ par n .

Si on remarque que les sous-progressions du quotient homothétique sont
 les quotients homothétiques des sous-progressions, en d'autres termes que
 « l'homothétie » conserve la relation progression, sous-progression, on
 pourra donner à ce théorème la forme suivante : les n quotients naturels
 d'une progression $(a)_r$ par un entier n sont les quotients homothétiques
 par n des n sous-progressions d'ordre n de $(a)_r$,

ou encore : les produits homothétiques par n des n quotients naturels de
 $(a)_r$ par n sont les sous-progressions d'ordre n de $(a)_r$.

Propriétés des égalités. — Nous appellerons progression nulle $(O)_r$ une
 progression qui contient le terme O . Deux progressions de même raison
 seront dites opposées si leur somme est la progression nulle. Nous écrirons,
 si $(a)_r + (b)_r = (O)_r$, $(b)_r = -(a)_r = (-a)_r$. On pourra ajouter une
 même progression ou un même nombre aux deux membres d'une égalité,
 on pourra ajouter membre à membre deux ou plusieurs égalités, et par
 conséquent multiplier naturellement par un même nombre entier. A noter
 cette restriction : dans la suite de ces opérations, non seulement les deux
 membres doivent rester des progressions de même raison, mais encore la
 plus petite raison mise en jeu ne peut être modifiée par additions ou sous-
 tractions. Ainsi, si on a $(a)_r + (b)_{mr} = (a')_r + (b)_{mr}$, on a $(a)_r = (a')_r$;
 mais si on a $(b)_{mr} + (a)_r = (b')_{mr} + (a)_r$, on n'a pas nécessairement
 $(b)_{mr} = (b')_{mr}$, mais seulement $(b)_r = (b')_r$. Notons ici que la somme de
 deux progressions de raisons différentes n'est une progression que si les
 deux raisons sont commensurables.

On pourra aussi multiplier ou diviser homothétiquement les deux mem-
 bres d'une égalité par un même nombre entier. Notons ici que la multipli-
 cation homothétique d'une progression par un entier peut être considérée
 comme cas particulier d'une addition que nous qualifierons d'ordonnée (au
 lieu d'ajouter un terme quelconque à un terme quelconque, on ajoute à un
 terme quelconque un terme choisi : choisi de manière que la somme soit
 définie à nr près).

Signalons, pour terminer, la distributivité du produit, naturel ou homo-
 thétique, par rapport à l'addition. Par exemple, si l'on désigne par
 $(x_1) \dots (x_n)$ le n quotients naturels de $(a)_r$ donné par n entier donné. Si
 α est un terme de $(a)_r$, on a $(a)_r = \alpha + (O)_r$;

$$(x_1) = \frac{\alpha}{n} + (O)_r \quad (x_r) = \frac{\alpha}{n} + \frac{r}{n} + (O)_r \quad (x_n) = \frac{\alpha}{n} + \frac{(n-1)r}{n} + (O)_r$$

$$n(x_1) + n(x_2) = \dots = n(x_n) = \alpha + (O)_r = (a)_r ; \\ n(x_1) = \alpha + (O)_{nr}, \dots, (nx_n) = \alpha + (n-1)r + (O)_{nr}$$

ou encore, si l'on convient de représenter par $\frac{1}{n}(a)$ la solution qui corres-

pond au terme α $(x_1) = \frac{1}{n}(a)$, $(x_2) = \frac{1}{n}(a) + \frac{r}{n}, \dots$,

$$(x_n) = \frac{1}{n}(a) + \frac{(n-1)r}{n} ; n(x_1) = n(x_2) = \dots = (a)_r$$

et $(nx_1) = (a)_{nr}$, $(nx_2) = (a)_{nr} + r, \dots$, $(nx_n) = (a)_{nr} + (n-1)r$.
 $(a)_{nr}$ désignant la sous-progression d'ordre n de $(a)_r$ qui contient le terme α . On pourra éventuellement choisir pour α le terme de $(a)_r$ qui a la plus petite valeur absolue.

Application aux angles orientés

Angles de demi-droites : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ représente symboliquement une progression de raison 2π . Nous dirons que cette progression est la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

L'égalité $(OA, OB) = (\Delta, \Delta')$ est une égalité entre progressions, Comme il n'y a qu'un symbole pour l'angle et sa mesure, cette égalité est aussi une égalité géométrique, de même que $AB = CD$ peut s'entendre aussi bien : ou superposabilité géométrique, ou égalité des mesures.

La formule de Chasles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$ est égalité entre progressions, le second membre étant la progression somme de deux progressions (elle est établie dès que l'on a montré l'égalité algébrique pour des déterminations choisies). Elle peut aussi être considérée comme l'égalité de définition de la somme géométrique de deux angles orientés de demi-droites : la somme géométrique de deux angles orientés est un angle qui a comme côté origine le côté origine du premier angle et comme côté extrémité le côté extrémité d'un angle égal au second angle et dont le côté origine coïncide avec le côté extrémité du premier angle. Cas particulier, si $\overrightarrow{OC}$ est la demi-droite opposée à $\overrightarrow{OA}$ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pi + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$.

Angles de droites (OA, OB) , progression de raison π , mesure de l'angle orienté de droites non orientées (OA, OB) . L'égalité est aussi une égalité géométrique ; la formule de Chasles, égalité entre progressions, peut être aussi considérée comme une égalité géométrique définissant la somme géométrique de deux angles de droites.

Sous-angles. Sur-angles. — La mesure d'un angle de demi-droites est une progression de raison 2π , pourrions-nous définir des angles ayant pour mesure une sous-progression d'ordre n ou la sur-progression d'ordre n ?

Soit un angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ donné, la sur-progression d'ordre 2 :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \frac{2\pi}{2} = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pi$$

est la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ou (OA, OB) . Nous dirons que l'angle

d'un axe et d'une droite, ou l'angle de deux droites est un sur-angle d'ordre 2.

Ceci peut être généralisé : nous appellerons n -axe un faisceau régulier de n axes. Soient deux demi-droites $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ données ; le sur-angle d'ordre n , de mesure $(\vec{OA}, \vec{OB}) \frac{2\pi}{n}$ est l'angle d'un axe et d'un n -axe : $\vec{OB}_1, \vec{OB}_2, \dots, \vec{OB}_n$, l'un des $\vec{OB}_i$ étant confondu avec OB , ou l'angle de deux n -axes.

Soient une demi-droite $\vec{OA}$ et un n -axe : $\vec{OB}_1, \vec{OB}_2, \dots, \vec{OB}_n$, donnés ; l'angle de cette demi-droite et du n -axe a pour mesure $(\vec{OA}, \vec{OB})_{2n\pi}$, les n sous-progressions d'ordre n correspondantes sont les mesures de n angles d'axes : $(\vec{OA}, \vec{OB}_1)_{2\pi}, (\vec{OA}, \vec{OB}_2)_{2\pi}, \dots, (\vec{OA}, \vec{OB}_n)_{2\pi}$. En définitive : angles de n -axes : $(\vec{OA}, \vec{OB}) \frac{2\pi}{n}$, progression de raison $\frac{2\pi}{n}$, mesure de l'an-

gle orienté qui amène l'un quelconque des $\vec{OA}$ sur l'un quelconque des $\vec{OB}_j$. L'égalité est aussi une égalité géométrique et la formule de Chasles définit aussi la somme géométrique de deux angles orientés de n -axes.

Soit un angle $(\vec{OA}, \vec{OB})$ donné, pour interpréter géométriquement $(\vec{OA}, \vec{OB})_{2n\pi}$ (n entier donné), nous ferons appel à la signification concrète des différentes déterminations de l'angle $(\vec{OA}, \vec{OB})_{2\pi}$, à l'aide de la demi-droite mobile ; on peut imaginer que cette demi-droite engendre par son mouvement une infinité de feuillets plans superposés, de sorte que là où l'on ne voit qu'un point B , il y a en réalité une infinité de points $B_1, B_2, \dots, B_k, \dots ; B_{-1}, B_{-2}, \dots, B_{-h}, \dots$, chacun dans son feuillet. Une sous-progression $(\vec{OA}, \vec{OB})_{2n\pi}$, si on convient de donner le même indice à deux points B dont l'indice initial différerait de n est la mesure de l'un de ces n sous-angles $(\vec{OA}, \vec{OB}_i)$. On peut imaginer un dispositif où ces points B_i sont effectivement confondus : la demi-droite mobile « s'élève » à partir de $\vec{OA}$ sur les n feuillets superposés, surface d'un seul tenant, elle coïncide ainsi successivement avec les n demi-droites OB_i (le point B_i dans le feuillet numéro i), jusqu'à la demi-droite $\vec{OA}$ du feuillet n° n ; là elle « retombe » dans le feuillet n° 1, puis elle balaye à nouveau les n feuillets dans le même sens et ainsi de suite. Voilà pour les déterminations, par exemple, positives. Pour les déterminations négatives, on partira, en « descendant » de la demi-droite $\vec{OA}$ du feuillet n . La surdétermination de $\vec{OB}$ peut être conférée à $\vec{OA}$, il suffit d'attribuer comme indices aux demi-droites $\vec{OA}$ le numéro de leur feuillet. Une sous-progression $(\vec{OA}, \vec{OB})_{2n\pi}$ est alors la mesure de l'un des angles $(\vec{OA}_i, \vec{OB}_j)$ ainsi définis. Nous pourrions dire que $\vec{OB}_i$ est un $\frac{1}{n}$ axe et que un sous-angle d'ordre n , de mesure $(\vec{OA}, \vec{OB})_{2n\pi}$ est l'angle de deux $\frac{1}{n}$ axes.

Si l'on veut désigner l'une, choisie, des n sous-progressions, il pourra paraître naturel de donner le numéro 1 à celle qui contient la mesure de l'angle saillant, que l'on pourra supposer dans le feuillet n° 1 ; les n sous-progressions seront alors :

$$(\vec{OA}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi}, (\vec{OA}_1, \vec{OB})_{2n\pi} = (\vec{OA}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi} + 2\pi, \\ \dots, (\vec{OA}_1, \vec{OB}_n) = (\vec{OA}_1, \vec{OB}_1) + 2(n-1)\pi.$$

Revenons sur la notion de plan à n feuillets, nous voulons en donner une définition géométrique, indépendante du mouvement qui nous a aidé à l'imaginer. Tout d'abord, la « coupure » peut être pratiquée suivant une demi-droite quelconque, soit $\vec{OX}$, le premier feuillet commence à $\vec{OX}_1$, et finit à $\vec{OX}_2$, le n^{me} finit à $\vec{OX}_{n+1}$, $\vec{OX}_1$ et $\vec{OX}_{n+1}$ sont confondus. Tous les angles $(\vec{OA}_i, \vec{OA}_{i+j})_{2n\pi}$ j constant sont égaux. On doit considérer que, après n vient 1, en d'autres termes on peut faire une permutation circulaire sur les indices 1, 2, 3, ..., n . Par exemple :

$$(\vec{OA}_n, \vec{OB}_1) = (\vec{OA}_1, \vec{OB}_2) ;$$

un $\frac{1}{n}$ axe origine $\vec{OA}_i$ étant choisi, un $\frac{1}{n}$ axe est déterminé par sa mesure et à un n -axe $\vec{OB}_j$ du feuillet correspond une mesure (progression de raison $2n\pi$).

La formule de Chasles définit aussi la somme géométrique de deux angles orientés de $1/n$ -axes, elle s'écrit :

$$(\vec{OA}_i, \vec{OC}_j)_{2n\pi} + (\vec{OC}_j, \vec{OB}_k)_{2n\pi} = (\vec{OA}_i, \vec{OB}_k)_{2n\pi}.$$

A titre d'application étudions la formule de Chasles pour des déterminations précisées (à $2n\pi$). Nous prendrons les sous-angles correspondant à l'angle saillant.

Nous pouvons toujours écrire :

$$(\vec{OA}_1, \vec{OC}_1)_{2n\pi} + (\vec{OC}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi} = (\vec{OA}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi}.$$

Si $(\vec{OA}_1, \vec{OC}_1)_{2n\pi}$ et $(\vec{OC}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi}$ sont supposés correspondre aux angles saillants, A_1 , B_1 et C_1 , avec une coupure convenablement choisie, peuvent être supposés dans le premier feuillet. Reste à déterminer si l'angle $(\vec{OA}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi}$, ou plutôt, si le point B_1 , déterminé par notre égalité, coïncide avec le point B_i défini par l'égalité $(\vec{OA}_1, \vec{OB}_i)_{2n\pi} = \text{angle saillant} + (O)_{2n\pi}$.

S'il existe une droite OX telle que les trois demi-droites $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ soient dans un même demi-plan limité par OX , nous prenons comme coupure l'une des demi-droites $\vec{OX}$, alors $i = 1$.

Si toute droite passant par O laisse deux demi-droites $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ dans un demi-plan et la troisième dans l'autre, nous prenons comme coupure une demi-droite $\vec{OX}$ telle que OX laisse $\vec{OA}$ et $\vec{OC}$ d'un côté et $\vec{OB}$ de l'autre, et, de plus, $\vec{OX}$ dans l'angle saillant $(\vec{OA}, \vec{OB})$. $\vec{OA}_1$, $\vec{OC}_1$, $\vec{OB}_1$ sont dans le premier feuillet, mais celui-ci s'arrêtant à $\vec{OX}_1$, le point B

correspondant à l'angle saillant $(\vec{OA}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi}$ est dans le feuillet n . Donc
 $(\vec{OA}_1, \vec{OC}_1)_{2n\pi} + (\vec{OC}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi} = (\vec{OA}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi} + (\vec{AB}_n, \vec{OB}_1)_{2n\pi}$
 $(\vec{OB}_n, \vec{OB}_1)_{2n\pi} = (\vec{OB}_1, \vec{OB}_2)_{2n\pi}.$

D'où finalement $(\vec{OA}_1, \vec{OC}_1)_{2n\pi} + (\vec{OC}_1, \vec{OB}_1) = (\vec{OA}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi} \pm 2\pi$,
 suivant l'orientation positive choisie.

Nous allons maintenant donner quelques exemples : sur-angles et sous-angles peuvent être obtenus par multiplication ou division homothétiques :

$$(n. \vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{\Delta}, \vec{\Delta}')_{2n\pi} \quad \left(\frac{\vec{OA}, \vec{OB}}{n} \right) = (\vec{\Delta}, \vec{\Delta}')_{\frac{2\pi}{n}}; \text{ notons en particulier}$$

$$(2. \vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{\Delta}, \vec{\Delta}').$$

Premier exemple ; Nous allons traiter le problème proposé au début :

Soit P'' le symétrique de P par rapport à Δ , l'égalité $PP'' = PO$ permet
 d'écrire $(\vec{CO}, \vec{CP}) = (\vec{CP}, \vec{CP}'')$; soit $\vec{\Delta}$ un axe porté par Δ

$$(\vec{CP}, \vec{CP}'') = 2(\vec{CP}, \vec{\Delta}) \text{ (multiplication naturelle)}$$

appliquons la formule de Chasles $(\vec{CP}, \vec{\Delta}) = (\vec{CP}, \vec{CO}) + (\vec{CO}, \vec{\Delta})$, multi-
 plions par 2 (produit naturel) les deux membres de cette égalité

$$2(\vec{CP}, \vec{\Delta}) = 2(\vec{CP}, \vec{CO}) + 2(\vec{CO}, \vec{\Delta}).$$

Nous avons donc

$$(\vec{CO}, \vec{CP}) = (\vec{CP}, \vec{CP}'') = 2(\vec{CP}, \vec{\Delta}) = 2(\vec{CP}, \vec{CO}) + 2(\vec{CO}, \vec{\Delta}).$$

D'où $(\vec{CO}, \vec{CP}) + 2(\vec{CO}, \vec{CP}) = 2(\vec{CO}, \vec{\Delta})$ et l'égalité demandée
 $3(\vec{CO}, \vec{CP}) = 2(\vec{CO}, \vec{\Delta})$ (1), égalité où les produits indiqués sont des
 produits naturels, et égalité équivalente à $PP'' = PO$. Notons que
 $2(\vec{CO}, \vec{\Delta}) = (2. \vec{CO}, \vec{\Delta})$, produit homothétique au second membre.

Divisons l'égalité (1) homothétiquement par 3 $(\vec{CO}, \vec{CP})_{\frac{2\pi}{3}} = \left(\frac{2. \vec{CO}, \vec{\Delta}}{3} \right)$

ce qu'on peut traduire ainsi, pour qu'un point P de (C) soit sur (H) , il faut
 et il suffit que le 3-axe $\vec{CP}$ soit tel que le sur-angle d'ordre 3 : $(\vec{CO}, \vec{CP})_{\frac{2\pi}{3}}$

ait pour mesure $\left(\frac{2. \vec{CO}, \vec{\Delta}}{3} \right).$

Deuxième exemple : Détermination des bissectrices d'un angle.

$2(\vec{OA}, \vec{OX}) = (\vec{OA}, \vec{OB})$. Divisons homothétiquement par 2 :

$$(\vec{OA}, \vec{OX})_{\pi} \text{ ou } (OA, OX) = \left(\frac{\vec{OA}, \vec{OB}}{2} \right)$$

ce qui donne bien entendu deux solutions.

Mais nous savons aussi que le produit homothétique par 2 de chacun des
 angles $(\vec{OA}, \vec{OX})$ est une sous-progression d'ordre 2 de $(\vec{OA}, \vec{OB})$

$$(2. \vec{OA}, \vec{OX}_1) = (OA, OB)_{4\pi} \quad (2. \vec{OA}, \vec{OX}_2) = (\vec{OA}, \vec{OB})_{4\pi} + 2\pi,$$

$(\vec{OA}, \vec{OB})_{4\pi}$ désignant la sous-progression correspondant à l'angle saillant.

Application à une propriété du cercle : Etant donné un cercle de centre O et deux points A et M de ce cercle, M' le point diamétralement opposé à M, $\vec{MA}$ est bissectrice intérieure de $(\vec{OA}, \vec{OM'})$. Nous avons donc :

$$(2. \vec{MA}, \vec{OM'}) = (\vec{OA}, \vec{OM'})_{4\pi}, \quad (1)$$

et si B est aussi sur le cercle : $(2. \vec{OM'}, \vec{MB}) = (\vec{OM'} \vec{OB})_{4\pi}$. (2)

$(\vec{MA}, \vec{OM'}) + (\vec{OM'}, \vec{MB}) = (\vec{MA}, \vec{MB})$. Multiplions homothétiquement par 2 les deux membres de cette égalité :

$$(2. \vec{MA}, \vec{OM'}) + (2. \vec{OM'}, \vec{MB}) = (2. \vec{MA}, \vec{MB}).$$

D'autre part $(\vec{OA}, \vec{OM'})_{4\pi} + (\vec{OM'} \vec{OB})_{4\pi} = (\vec{OA}, \vec{OB})_{4\pi}$, si M' n'est pas dans l'angle opposé par le sommet à l'angle saillant $(\vec{OA}, \vec{OB})$.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si M est dans l'angle saillant $(\vec{OA}, \vec{OB})$, on a $(\vec{OA}, \vec{OM'})_{4\pi} + (\vec{OM'} \vec{OB})_{4\pi} = (\vec{OA}, \vec{OB})_{4\pi} + 2\pi$.

Si $\vec{OI}$ est la bissectrice intérieure de $(\vec{OA}, \vec{OB})$

$$(2. \vec{OA}, \vec{OI}) = (\vec{OA}, \vec{OB})_{4\pi}.$$

Ajoutons membre à membre les égalités (1) et (2). Nous obtenons :

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } (2. \vec{MA}, \vec{MB}) = (2. \vec{OA}, \vec{OI}) ;$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas : } (2. \vec{MA}, \vec{MB}) = (2. \vec{OA}, \vec{OI}) + 2\pi.$$

Divisons homothétiquement par 2.

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } (\vec{MA}, \vec{MB}) = (\vec{OA}, \vec{OI}) ; \quad 2^{\text{e}} \text{ cas : } (\vec{MA}, \vec{MB}) = (\vec{OA}, \vec{OI}) + \pi.$$