

Les réciproques

Notre collègue POCHARD soulève, à propos d'une phrase de H. LEBESGUE, une question posée souvent par les élèves : Ayant établi une propriété, « faut-il faire la réciproque ? ».

Déjà, cet état d'esprit est fâcheux : on la fait, semble-t-il, quand on a le temps, quand le professeur est réputé grincheux ! Mais l'élève n'a-t-il pas eu parfois l'impression que son professeur lui faisait des réciproques parfaitement inutiles, et comme pour satisfaire à un rite ?

Les choses iraient mieux, je crois, si l'on cultivait un peu mieux la notion d'équivalence. Je profite de l'occasion pour défendre un point de vue qui m'est cher.

Bien que cette notion soit d'un commerce utile dans tous les domaines, on n'ose pas l'employer. Voici, par exemple, deux questions où se tient la cause de cette abstention :

- 1) $x - 1 = 0$ et $x^3 - 1 = 0$ sont-elles des équations équivalentes ?
- 2) Les diverses définitions des coniques sont-elles équivalentes ?

Si la réponse : « tantôt oui, tantôt non » reste évasive, on juge la notion impraticable. Mais c'est la condamner pour ce qui est au contraire une immense qualité : sa souplesse !

Que ne dit-on : « équivalence dans un domaine donné » ?

Si vous refusez que les deux équations signalées soient équivalentes jusqu'en Mathématiques Élémentaires, n'étudiez jamais avant les Spéciales l'intersection de deux cercles, car vous ne pouvez dire à vos élèves que deux cercles se coupent toujours en quatre points ! Et dans le même ordre d'idée, est-il choquant de dire : $3x - 4 = 0$ n'a pas de solution dans le domaine des entiers ?

Lorsque le passage d'une propriété à une autre se fait avec le souci de regarder l'équivalence, la question de la réciproque ne se pose plus de façon artificielle, car il est de nombreux cas où l'équivalence est manifestement vraie, ou manifestement fausse ; hors ces cas extrêmes, la réciproque se pose comme pour satisfaire à la curiosité, à un besoin d'enquête complète.

On n'a pas voulu garder dans le libellé du programme de Mathématiques Élémentaires « équivalence des définitions des coniques ». Point de vue étroit, semble-t-il. Elles sont équivalentes dans un large domaine commun facile à préciser. Qu'un cercle n'ait pas de directrice, qu'une parabole n'ait pas de cercle directeur, sont des cas d'exception — mieux : cas limites — qui n'altèrent pas le résultat général.

L'équivalence se prête à un jeu de souplesse qui fait progresser les questions.

Equivalence *rétablie* : ex. : $y = \sqrt{ax + b}$ n'équivaut pas à $y^2 = ax + b$, mais à

$$\begin{cases} y^2 = ax + b, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Equivalence *rompue* : élargissement du domaine, méthode d'extension. Ex. : en Élémentaires : les deux définitions des points conjugués par rapport à un cercle, la deuxième non équivalente à la première est conservée.

La méfiance traditionnelle à l'égard de l'usage de cette notion est d'autant moins explicable qu'on lit au programme de Troisième : « Condition nécessaire et suffisante, propriété caractéristique... ». Introduire « notion d'équivalence » faciliterait le débrouillage des sens de « nécessaire » et « suffisant » (que de difficultés ici, dues à la maladresse grammaticale de l'emploi de ces termes !).

L'idée précise, exposée par H. LEBESGUE dans sa note, ne borne pas son application à la géométrie analytique (une transformation identique effectuée sur $f(x; y)$ donne deux définitions de la courbe $f(x, y) = 0$). Nous l'appliquons exactement dans l'enseignement élémentaire.

Ainsi les points définis par $MA^2 + MB^2 = k$ sont aussi les points définis par $2OM^2 + 2OA^2$, c'est-à-dire : sont les points d'un cercle, grâce à l'identité connue (la réciproque est absorbée dans l'équivalence évidente).

Autre exemple : les points communs à un plan P et à une sphère (O, R) sont définis par

$$\begin{cases} M \text{ dans } P, \\ OM = R, \end{cases}$$
 système qui équivaut à

$$\begin{cases} M \text{ dans } P, \\ HM^2 = R^2 - d^2, \end{cases}$$

(H projection de O sur P, $OH = d$); d'où un cercle grâce à l'identité : théorème de Pythagore.

Dans ces deux exemples, l'équivalence a lieu.

Autre exemple : milieux M des cordes d'un cercle O issues d'un point A , entraîne $\widehat{OMA} = 1$ droit, mais n'y équivaut pas si A est extérieur ; on rétablit l'équivalence par une *adjonction* :

M point du lieu équivaut à $\begin{cases} \widehat{OMA} = 1 \text{ droit,} \\ M \text{ intérieur,} \end{cases} \quad \text{d'où arc de cercle.}$

Tout passage d'une propriété à une autre, toute recherche d'un lieu, tout problème de construction doit être ainsi qualifié en spécifiant si l'équivalence a lieu.

L'idée de H. LEBESGUE s'applique en même temps à la définition des transformations : trace-t-on un cercle dans le plan ? Tout le plan acquiert aussitôt des qualités, des propriétés, une structure, par naissance d'une inversion par rapport à ce cercle. Y place-t-on deux vecteurs, une autre structure apparaît, qui est une similitude (directe ou inverse, il suffit qu'on le dise). En somme, le plan et l'espace n'existent que dès qu'on met quelque chose dedans (la comparaison « champ gravifique » est ingénieuse). Et cette idée est bonne pour nos élèves : habitués depuis l'enfance à manier un cercle ou quelques droites ils conçoivent difficilement en Mathématiques Élémentaires que l'on « transforme tout le plan ». Notons, pour terminer, que cette expression est d'ailleurs peu heureuse : tout d'abord on ne transforme rien, on donne une correspondance, on l'étudie, et c'est seulement là qu'on s'en sert pour transformer des objets du plan ou de l'espace.

J. SIROS,

professeur au Lycée Lakanal.