

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Publication trimestrielle

Administration : 7, rue Pasteur, Saint-Cloud (S.-et-O.)

SOMMAIRE

PREMIÈRE PARTIE

I. Avis du trésorier	1
II. Réunion de Comité : 25 janvier 1951	1
III. Conseils d'Enseignement : <i>Réunions de septembre 1951</i> , par M. C. CANONGE	2
IV. Documents officiels : <i>Concours de l'Enseignement public en 1951</i>	3
<i>Rapport de M. l'Inspecteur général ROBERT sur la composition de Mathématiques au Concours général de 1951 (classe de Mathématiques).</i>	5

DEUXIÈME PARTIE

R. ZETWOO : <i>La question de Cours au Baccalauréat</i>	17
L. FÉLIX : <i>Sur le premier enseignement de la Géométrie</i>	19
J. SIROS : <i>Les réciproques</i>	34
R. ESTÈVE : <i>Quadrilatère circonscrit et inscrit à un cercle</i>	36
G. DELPLA : <i>A propos d'un problème de Baccalauréat</i>	37
E. EHRHART : <i>Sur la géométrie du cycle</i>	48
P. LANGLAMET : <i>Sur la puissance réduite</i>	51
Histoire des Mathématiques :	
J. ITARD : <i>Monge et Desargues</i>	52
R. ROSTOLLAND : <i>Sur un point de l'histoire des Coniques</i>	54
Bibliographie :	
Paul COUDERC : <i>Tables numériques</i> , par A. DANJON	54
A. HEUSMAN : <i>Publications diverses</i>	55
Mlle BARBIER : <i>Le triangle orienté</i> , par E. EHRHART	59

Cotisations : 400 fr.

Abonnements : 600 fr.

3 bis, Avenue R.-Polnecaré, Margny-les-Complègne (Oise)

Expédition des Bulletins : 29, rue d'Ulm, Paris 5^e

Abonnement d'un an au *Bulletin* (prix net) : France 600 fr.

Prix d'un numéro du *Bulletin* ou d'un *Supplément* (prix net) : France. 80 fr.

Les membres de l'Association (cotisation : 400 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés*.

Régler par chèque postal en utilisant l'adresse suivante :

Paris, Cc. 5708-21

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5^e)

Couverture page II

Présidents d'Honneur

M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

Président : M. POCHARD, 7, rue Pasteur, Saint-Cloud (S.-et-O.).
Vice-Présidents : Mlle PROTIN, 8, square du Champ-de-Mars, Paris (15°).
M. BIGUENET, 41, rue Mad.-Michelis, Neuilly (Seine).
M. CAGNAC, 53, rue de Babylone, Paris (7°).
M. EDDE, 51, rue des Rosiers, Saint-Ouen (Seine).
M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris (5°).
Secrétaires : M. BENOIST, Collège Diderot, 60, bd de La Villette, Paris (19°).
M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16°).
M. HUISMAN, 11, rue Jacques-Cœur, Paris (4°).
M. ROSTOLLAND, professeur au Lycée Marcel-Roby, St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).
Trésorier : M. LEGRAND, 3 bis, av. R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).

Comité :

Membres élus

En 1948 : M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; M. EDDE (E.N. Auteuil) ; M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; M. POCHARD (*Condorcet*) ; Mlle PROTIN (*Jules-Ferry*).

En 1949 : Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (E.N.P. St-Ouen) ; M. CHAZAL (*Saint-Louis*) ; M. GIRARD (*Arago*) ; M. GUITTON (*Saint-Louis*).

En 1950 : Mlle BARBIER (*Victor-Duruy*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. GIRAULT (J.-B. Say) ; M. JACQUEMART (*Pasteur*) ; M. MINOIS (*Lakanal*) ; M. RUFF (*Voltaire*).

En 1951 : M. CAGNAC (*Louis-le-Grand*) ; M. DURRANDE (*St-Louis*) ; M. HUISMAN (*Montaigne*) ; M. LEGRAND (Compiègne) ; M. MARVILLET (Strasbourg, *Kléber*) ; M. MONJALLON (*St-Louis*) ; M. SINGIER (*St-Louis*) ; M. ROSTOLLAND (*Marcel-Roby*).

Membres de droit

Mme NICOU (Lyon, *Marie-Vidalenc*) ; M. CANONGE (Castres) ; M. DUVAL (*Dorian*) ; M. POUX (*Saint-Cloud*).

Rapporteurs

Classes Nouvelles : Mlle MASSON ; *Enseignement moderne court :* MM. EDDE et GIRAULT ; *Enseignement technique :* M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, M. MINOIS, Mlle PROTIN (S.Ex.) ; *Mathématiques Supérieures :* M. DURRANDE ; *Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques :* *Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — Concours général : M. SINGIER ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Mathématiques et Psychologie scolaire :* M. MONAVON ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* MM. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (Besançon) ; *Dijon :* M. EUVRARD (Dijon) ; *Lille :* M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (Lyon, *Ampère*) ; *Montpellier :* M. DUSSOL (Montpellier) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (Nancy, *Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAUULT (Rennes) ; *Strasbourg :* M. EHRHART (Strasbourg, *Kléber*) ; *Maroc :* M. QUEYSANNE (Casablanca, *Lyautey*) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (Tunis, *Carnot*).

N.-B. — Adresser, soit au Président, soit à M. HUISMAN, 11, rue Jacques-Cœur, Paris, 4°, toute communication destinée à la Deuxième Partie du *Bulletin*.

ÉDITIONS LANGLOIS -- PARIS

VIENNENT DE PARAÎTRE :

Henri MAS & Jean AUTHIER

(Professeurs au Lycée Janson-de-Sailly)

" GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE "

CLASSES DE PREMIÈRE

1 vol. 13,5 x 21 - 268 p. - 309 fig.

Prix : 490 frs

" ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE "

CLASSES DE PREMIÈRE

1 vol. 13,5 x 21 - 268 p. - 105 fig.

Prix : 560 frs

VENTE EXCLUSIVE AUX ÉDITIONS DU COUDRIER

20, Rue Delambre -- PARIS XIV^e

FERNAND NATHAN ÉDITEUR

LEBOSSÉ et HÉMERY

MATHÉMATIQUES

**ENSEIGNEMENT
DES LYCÉES ET COLLÈGES**

**ENSEIGNEMENT DES
COURS COMPLÉMENTAIRES**

Classe de 6^e gris 295. »

Classe de 5^e gris 335. »

Classe de 4^e gris 375. »

Classe de 3^e gris 395. »

Algèbre, cl. de 2^e gris. 360. »

Géométrie plane,
classe de 2^e gris 440. »

Algèbre et Trigonomé-
trie, cl. de 1^{re} gris... 445. »

Géométrie dans l'es-
pace, cl. de 1^{re} gris.. 395. »

Classe de 5^e brique... 380. »

Corrigés cl. de 5^e... 190. »

Classe de 4^e brique... 415. »

Corrigés cl. de 4^e... 280. »

Classe de 3^e brique... 425. »

Corrigés cl. de 3^e... 280. »

~~~~~  
Envoi de spécimens  
et de notre catalogue  
sur simple demande

**18, Rue Monsieur-le-Prince, PARIS**

**Roland MAILLARD** et

Professeur de Mathématiques spéciales  
au Lycée Charlemagne,  
Chargé d'un cours  
à l'École Normale Supérieure

**Albert MILLET**

Professeur agrégé  
au Lycée Janson-de-Sailly  
et à l'École Normale Supérieure  
de l'Enseignement Techn'que

# COURS DE MATHÉMATIQUES

**Enseignement du Second Degré**

EN VENTE :

**Classe de Sixième Classique et Moderne**  
**Mathématiques.** Un vol. in-16, broché  
ou cartonné de 192 p., avec 900 exercices  
et problèmes, un complément de dessin  
géométrique et de dessin décoratif, des  
planches hors texte en couleurs.

**Classe de Cinquième Classique et Moderne**  
**Mathématiques.** Un vol. in-16, broché  
ou cartonné, de 272 p., avec 900 exercices  
et problèmes, un complément de dessin  
géométrique et décoratif, des planches  
hors texte en couleurs.

**Classe de Troisième et Brevet d'études**  
**Mathématiques.** Un vol. in-16, broché  
de 304 pages, avec 1185 exercices et  
problèmes.

**Classe de Seconde Classique A et B**  
**Mathématiques.** Un vol. in-8, broché, de  
320 p., avec 714 exercices et problèmes.

**Classe de Seconde Classique C et Moderne**  
**Algèbre.** Un vol. in-8, broché, de 256 p.,  
avec 633 exercices et problèmes.  
**Géométrie.** Un vol. in-8, broché, de  
440 p., avec 724 exercices et problèmes.

**Classe de Première Classique C et Moderne**  
**Algèbre et Trigonométrie.** Un vol in-8,  
broché, de 288 p., avec 634 exercices  
et problèmes.  
**Géométrie.** Un vol. in-8, broché, de  
336 p., avec 528 exercices et problèmes.

**Classe de Mathématiques**  
**Algèbre.** Un vol. in-8, broché, de 368 p.,  
avec 890 exercices et problèmes.  
**Géométrie.** Un vol. in-8, broché ou cart.,  
480 p., avec 693 exercices ou problèmes.

**Classe de Mathématiques (Technique)**  
**Géométrie.** Un vol. in-8, broché ou cart.,  
496 p., avec 711 exercices et problèmes.

**Livre du Maître de Sixième**  
(Corrigés).

*Une méthode  
efficace*

*Une culture  
mathématique*



*Une  
nouvelle  
présentation  
typographique*

A PARAÎTRE :

**Classe de Quatrième**  
**Mathématiques..** (Sous presse)

**Classe de Première A et B**  
**Mathématiques...** (Déc. 1951)

**Livre du Maître de Troisième**  
(Corrigés)..... (Sous presse)

**HACHETTE**

**Bulletin de l'Association**  
*des*  
**Professeurs de Mathématiques**  
*de l'Enseignement public*

---

**PREMIÈRE PARTIE**

---

**I. Avis du Trésorier**

---

Le Trésorier demande aux collègues qui n'ont pas encore payé leur cotisation de le faire, *dès que possible*, par un versement au compte chèque de l'Association.

**Association des Professeurs de Mathématiques**  
**29, rue d'Ulm, Paris, 5<sup>e</sup>**  
**C.c. Paris 5708-21**

Le service du *Bulletin* sera suspendu à ceux des collègues qui n'auraient pas réglé leur cotisation le 1<sup>er</sup> février 1952.

---

**II. Réunion du Comité**

---

**25 Janvier 1951**

*Présents* : Mlles MASSON et PROTIN ; MM. RAY, BENOIST, BIGUENET, CARALP, CHAZAL, CROZES, EDDE, FAVRELLE, GIRARD, GIRAULT, GUITTON, JACQUEMART, MINOIS, POCHARD, POUX, ainsi que MM. MONJALLON et SINGIER, invités.

*Excusés* : Mlles AFFRE, DIONOT, BARBIER ; MM. BERTRAND, DELCOURT, RUFF, CANONGE, ainsi que M. ELUECQUE, invité.

Cette séance a été employée à la préparation de l'Assemblée générale du 18 mars 1951, dont l'ordre du jour a été publié dans le *Bulletin* n° 139, de mars 1951.

### **Une retraite regrettée de tous**

*Au moment où Mlle DIONOT arrive au terme d'une belle carrière, le Comité et tous les membres de l'Association la remercient de son dévouement inlassable et de son action constante et efficace pour la défense de l'Enseignement des Mathématiques.*

*Qu'elle veuille trouver ici, avec les hommages respectueux de ses collègues leurs souhaits de longue et heureuse retraite.*

## **III. Conseils d'Enseignement**

### **Section permanente du Conseil de l'Enseignement du Second Degré (21 Septembre) et Conseil Supérieur de l'Education Nationale (25 Septembre 1951).**

*Rapport de M. CANONGE, représentant l'Association  
au Conseil Supérieur de l'Education Nationale*

1. *Projet de création d'une option lettres au Concours de Saint-Cyr.* — L'exposé des motifs ne cachait pas la raison profonde du projet : insuffisance du nombre des candidats.

J'ai exprimé nettement la conviction que m'avaient fait connaître un certain nombre de collègues préparant au Concours sur l'« inopportunité, l'absence d'intérêt et l'inefficacité » de la nouvelle formule.

Devant le vote positif de la quasi-unanimité des assemblées, je me suis cantonné dans l'abstention. Mais j'ai néanmoins contribué fortement à obtenir, à la quasi-unanimité, le vote d'un vœu demandant deux classements absolument distincts de l'option lettres et de l'option sciences.

Les programmes de la nouvelle option avaient été proposés par nos collègues eux-mêmes.

2. *Nouvelles sections du second cycle.* — Un certain flottement a eu lieu au Conseil Supérieur, l'Enseignement Supérieur ayant cédé avec beaucoup de peine aux désirs du Second Degré et pour la classe de Seconde seulement, et avec beaucoup de précautions.

Le problème que pose l'état actuel du Baccalauréat va être abordé au fond ; une Commission doit formuler les questions avant même la prochaine session.

J'ai voté, avec la majorité du Conseil, le projet pour la classe de Seconde.

C. CANONGE.

## IV. Documents officiels

### Concours de l'Enseignement Public en 1951

#### 1. Agrégation des Sciences Mathématiques

| MM.                                   | MM.                                      |
|---------------------------------------|------------------------------------------|
| 1. BRUHAT (E.N.S.).                   | 16. FRAISSE.                             |
| 1 <sup>bis</sup> SOULE (aud. E.N.S.). | 17. ROGER.                               |
| 3. BOREL.                             | 18. TOURNASSOUD (E.N.S.).                |
| 4. MOREL.                             | 19. ROBY (E.N.S.).                       |
| 5. LÉVY-LATTÈS (E.N.S.).              | 20. EZRA.                                |
| 6. BERNARD (Daniel) (E.N.S.).         | 21. MAUMUS (aud. E.N.S.).                |
| 7. DENISE.                            | 22. ANGELI.                              |
| 8. GONTARD (E.N.S.).                  | 22 <sup>bis</sup> BESINEAU.              |
| 9. CRUMEYROLLES.                      | 22 <sup>ter</sup> MERCIER (aud. E.N.S.). |
| 9 <sup>bis</sup> PERRIN (St-Cloud).   | 25. BOUILLOC.                            |
| 11. BANTÉGNIE.                        | 26. FRABOUL.                             |
| 11 <sup>bis</sup> BLOCH.              | 27. FRAYSSE (E.N.S.).                    |
| 11 <sup>ter</sup> MASCART (E.N.S.).   | 27 <sup>bis</sup> JAY (E.N.S.).          |
| 14. POULIQUEN (St-Cloud).             | <i>France d'Outre-Mer :</i>              |
| 15. BERGER (E.N.S.).                  | M. DE SAINT-WAAST.                       |

#### 2. Agrégation féminine de Mathématiques

| Mmes et Mlles                   | Mmes et Mlles            |
|---------------------------------|--------------------------|
| 1. ECKHOOUT (E.N.S.).           | 9. MARCHAND.             |
| 1 <sup>bis</sup> WAHL (E.N.S.). | 10. CHAMPIER (Fontenay). |
| 3. RENAUDIE (E.N.S.).           | 11. MARGAILLAN.          |
| 4. BOIRON.                      | 12. MICHEL.              |
| 5. PALOUS (E.N.S.).             | 13. MILLIAT (E.N.S.).    |
| 6. DULIBINE.                    | 14. POLLE (E.N.S.).      |
| 7. GOUBÉ (E.N.S.).              | 14 <sup>bis</sup> WIART. |
| 8. MARIS.                       |                          |

#### 3. Certificat d'aptitude à l'Enseignement dans les Collèges Section E : Mathématiques et Sciences Physiques

##### Candidats

| MM.                      | MM.                      |
|--------------------------|--------------------------|
| 1. DAUDÉ.                | 6. BOUCHON.              |
| 2. FORT.                 | 7. LAMAURT (St-Cloud).   |
| 3. BONVALLET (St-Cloud). | 8. BLANCHET (St-Cloud).  |
| 4. PIERNOT.              | » BOSSARD.               |
| 5. ROCH (St-Cloud).      | 10. BERTHOIN (St-Cloud). |

| MM.                        | MM.                     |
|----------------------------|-------------------------|
| 11. LAUVIN.                | 37. PAYOL.              |
| 12. VORREUX.               | 38. DEJUS.              |
| 13. DUMAS.                 | 39. MAURIN (St-Cloud)   |
| 14. HELLER.                | 40. LOUPIAS.            |
| » SILVESTRE (St-Cloud).    | 41. LAUZET.             |
| 16. LARRIBAU.              | 42. CHAPRON (St-Cloud). |
| 17. AUPOIX.                | 43. CUNY.               |
| 18. FAUVERGUE (St-Cloud).  | » JUHEL.                |
| 19. BROCHET.               | 45. GALLAND.            |
| 20. EYMARD.                | 46. LEMARÉCHAL.         |
| » NICOLAS (St-Cloud).      | 47. MAULIK.             |
| 22. TISSEYRE.              | » BUNEL.                |
| 23. PECH (St-Cloud).       | 49. FRAIKIN.            |
| 24. GOURDIOLLE (St-Cloud). | 50. DUPERROIS.          |
| 25. JAOUEN (St-Cloud).     | 51. AUDEBERT.           |
| » VANNIER.                 | 52. ANTHONY.            |
| 27. ENCLOS.                | 53. LONGE.              |
| 28. DUREL.                 | 54. RECOULÈS.           |
| 29. ANDRIEU.               | » SAYAG (St-Cloud).     |
| 30. MANSOUX (St-Cloud).    | 56. WAGNER.             |
| 31. DEMONT.                | 57. KATZ.               |
| 32. VISTICOT (St-Cloud).   | 58. TORNEY.             |
| 33. BÉRA.                  | 59. ROSSIGNOL.          |
| 34. BOUSSOIS.              | 60. FOURNIER.           |
| » FOURNIER.                | » FRANCO.               |
| » PAULIN.                  | 62. LEVER.              |

*Candidates*

| Mines et Mlles         | Mmes et Mlles            |
|------------------------|--------------------------|
| 1. RENAULT.            | 10. TOLY (Fontenay).     |
| 2. POYET.              | 11. LAMBERT (Fontenay).  |
| 3. MICHEL.             | 12. JOURDREN.            |
| 4. BERLAND.            | 13. DIEU (Fontenay).     |
| 5. VORREUX.            | 14. CARESMEL (Fontenay). |
| 6. MEYNADIER.          | 15. VIAL (Fontenay).     |
| 7. COLLET.             | 16. DARCISSAC.           |
| » GODIGNON (Fontenay). | 17. OYALLON.             |
| 9. PRINGUET.           |                          |

**4. Certificat d'aptitude au Professorat  
de l'Enseignement du Second Degré (Mathématiques)**

*Admis*

M. VANDENBROUCQUE (adj. ens. Calais).  
Mlle SOUBIELE (adj. ens. Nîmes).

**Rapport sur la composition de mathématiques**  
**(classe de Mathématiques)**  
**au Concours général des Lycées et Collèges en 1951 (1)**

Le jury était composé de M. ROBERT, Inspecteur général, Président ; de Mme AYRAULT, Professeur (Fontenay) au Lycée Jules-Ferry ; de MM. CHAZAL, Professeur (Normale Supérieure) au Lycée Saint-Louis ; MAGNIER, Professeur (Navale) au Lycée Saint-Louis ; RAMIS, Professeur (Ingénieurs de la Marine) au Collège Jean-Baptiste-Say ; RICHE, Professeur (Saint-Cloud) au Lycée Saint-Louis.

ANALYSE DU SUJET

I. ETUDE D'UNE TRANSFORMATION T, DANS UN PLAN (II). — 1° On donne deux segments distincts FF', GG' de (II) ayant même milieu O. T fait correspondre à un point n de (II) le point m de (II), tel que les triangles nFm et nGF' soient directement semblables.

Il faut entendre ici le mot triangle au sens large ; trois points distincts, mais alignés, constituent un triangle aplati.

L'hypothèse de similitude s'interprète par une égalité d'angles orientés (1) et une proportion entre longueurs (2) :

$$(1) \quad (\vec{nF}, \vec{nm}) = (\vec{nG}, \vec{nF'}) \quad (\text{à } 2k\pi \text{ près}).$$

$$(2) \quad \frac{nm}{nF} = \frac{nF'}{nG} \quad \text{d'où } nm = \frac{nF'}{nG} \cdot nF.$$

Elles déterminent sans ambiguïté le vecteur  $\vec{nm}$  quand n diffère de F, F', G. Examinons le cas où n tend vers un de ces points :

a — n tend vers F ;  $\frac{nF'}{nG}$  a une limite finie, car FG est  $\neq 0$ . nF tend vers zéro, donc nm tend vers zéro et m tend vers F.

b — n tend vers F' :  $\frac{nF'}{nG}$  tend vers zéro, car F'G est  $\neq 0$ . nF tend vers la limite finie F'F, donc nm tend vers zéro et m tend vers F'.

On étendra donc la possibilité de T en stipulant qu'à chaque point F ou F' la transformation T fait correspondre ce même point.

c — n tend vers G. nF' a la limite GF'  $\neq 0$ ,  $\frac{nF'}{nG}$  a la limite  $+\infty$  ; il en est de même de nm, car nF a la limite GF  $\neq 0$ . Conclusion : m est rejeté à l'infini.

*m et n peuvent-ils être confondus ?*

Cette éventualité est impossible quand n est pris distinct de F, F' (et, bien entendu de G), car  $nm = 0$  équivaut, d'après (2), à  $nF' \times nF = 0$ .  
 Donc : les points F et F' sont les seuls points invariants dans T.

(1) L'énoncé du problème a été publié dans le *Bulletin* n° 142, de juillet 1951, pages 279 à 281.

2° En écartant les positions F, F', G de n, les relations (1) et (2) se mettent sous les formes équivalentes

$$(1') \quad (\overrightarrow{nF}, \overrightarrow{nm}) = (\overrightarrow{nG}, \overrightarrow{nF}) \quad (\text{à } 2k\pi \text{ près})$$

$$(2') \quad \frac{nm}{nF} = \frac{nF}{nG}$$

qui se traduisent par le fait que les triangles nF'm et nGF sont directement semblables. C'est aussi dire que T ne change pas, quand, dans sa définition, on échange les rôles de F et F', sans changer celui de G.

Ce résultat s'applique aussi aux positions F, F', G de n, par les passages à la limite considérés dans (I, 1°).

3° De nouvelles conséquences vont résulter de ce que le quadrilatère FGF'G' est un parallélogramme, d'où

$$(3) \quad \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{G'F'}$$

La similitude directe des triangles nF'm et nGF se traduit par

$$(\overrightarrow{mn}, \overrightarrow{mF'}) = (\overrightarrow{Fn}, \overrightarrow{FG}) \quad (\text{à } 2k\pi \text{ près})$$

$$\frac{mF'}{mn} = \frac{FG}{Fn} \text{ sous les mêmes restrictions qu'au début des (2°).}$$

Ces relations deviennent en utilisant (3) :

$$(\overrightarrow{mn}, \overrightarrow{mF'}) = (\overrightarrow{Fn}, \overrightarrow{G'F'})$$

$$\frac{mF'}{mn} = \frac{G'F'}{Fn} \text{ ou, sous des formes équivalentes.}$$

$$(4) \quad (\overrightarrow{nm}, \overrightarrow{nF}) = (\overrightarrow{F'm}, \overrightarrow{F'G'}) \quad (\text{à } 2k\pi \text{ près})$$

$$(5) \quad \frac{nF}{nm} = \frac{F'G'}{F'm}$$

(4) et (5) expriment que les triangles (au sens large) mFn et mG'F' sont directement semblables.

Si, dans la définition de T, sans changer les rôles respectifs de F, F', on substitue à G le point G', la transformation T est remplacée par celle qui fait passer de m à n, c'est-à-dire par sa transformation inverse.

On peut en déduire, sans étude directe, qu'à tout point m de (II) correspond un point unique n ; à priori les cas à réserver sont ceux où m est en F, F' ou G', mais l'analogie de T avec son inverse dispense d'étudier les positions limites de n lorsque m tend vers F, F', ou G : auxquels cas respectifs n tend vers F, F' ou est rejeté à l'infini.

4° L'inventaire des similitudes (directes) de triangles de la figure donne le résumé suivant :

nFm est semblable à nGF' et à F'G'm ; et (par permutation des rôles de F, F') : nF'm est semblable à nGF et à FG'm.

La similitude directe de nGF' et F'G'm, qui résulte de là, s'interprète par

$$(6) \quad (\overrightarrow{GF'}, \overrightarrow{G'm}) = (\overrightarrow{Gn}, \overrightarrow{GF'}) \quad (\text{à } 2k\pi \text{ près}).$$

$$(7) \quad \frac{G'm}{GF'} = \frac{GF'}{Gn}.$$

Pour interpréter (6), considérons la droite X'OX parallèle à la bissec-

trice intérieure des vecteurs  $\vec{F'G}$ ,  $\vec{F'G'}$  (ou aussi de  $\vec{G'F}$  et  $\vec{GF'}$ ). Par symétrie :  $(\vec{OX}, \vec{G'F'}) = -(\vec{OX}, \vec{GF'}) = (\vec{GF'}, \vec{OX})$  (à  $2k\pi$  près).

Ajoutons membre à membre (6) et cette relation ; en tenant compte de la relation de Chasles pour les angles orientés, il vient :

$$(\vec{OX}, \vec{G'm}) = (\vec{G'n}, \vec{OX}) \text{ ou } (8) (\vec{OX}, \vec{G'm}) + (\vec{OX}, \vec{G'n}) = 2k\pi \text{ (} k \text{ entier).}$$

Quant à (7), on peut l'écrire (7')  $G'm \times G'n = F'G \cdot F'G'$ .

Le second membre de (7') n'est pas nul ( $F'$  distinct de  $G$  et  $G'$ ). Nous poserons :  $l^2 = F'G \cdot F'G'$  ( $l > 0$ ) (7') devient  $G'm \times G'n = l^2$ .

La transformation  $T$  s'exprime par un double lien, angulaire et métrique, entre les vecteurs libres  $\vec{G'm}$  et  $\vec{G'n}$  : ils sont inclinés d'angles opposés sur  $\vec{OX}$  (ou  $\vec{OX'}$ ) et le produit de leurs longueurs est constant.

Comme contrôle des définitions de  $l^2$  et de  $X'OX$ , on peut particulariser ces résultats en considérant que lorsque  $m$  vient en  $F'$ ,  $n$  vient aussi en  $F'$ .

Pour la suite, nous retiendrons que  $l$  est moyenne proportionnelle entre les longueurs de deux côtés consécutifs du parallélogramme  $F'GF'G'$  et que  $X'OX$  est parallèle à la bissectrice intérieure des angles intérieurs en  $F'$ , ou aussi en  $F$ , de ce parallélogramme.

5° Il en résulte qu'on peut passer de  $m$  à  $n$  par la suite des transformations simples suivantes (dont les deux dernières sont permutables) : Translation de vecteur  $\vec{G'G}$  ; symétrie par rapport à la parallèle à  $X'OX$  issue de  $G$  ; inversion de pôle  $G$  et de puissance  $l^2$ , toutes opérations indépendantes, par leurs éléments, du point  $m$  considéré.

On retrouve, comme résultat acquis dans (I, 3°), que : Quand  $m$  est rejeté à l'infini,  $n$  vient en  $G$  ; et la suite, inversée, des opérations inverses des précédentes montre que lorsque  $n$  est rejeté à l'infini,  $m$  vient en  $G$  [acquis dans (I, 1°)].

Quand  $m$  décrit un cercle, la même considération des opérations intermédiaires montre que  $n$  décrit un cercle ou une droite, puisque l'inversion change un cercle en un cercle ou une droite.

Le lieu de  $n$  est une droite dans le cas où le cercle décrit par  $m$  passe par  $G'$ .

II. APPLICATION A DES CONIQUES A CENTRE. — 1° Lorsque  $m$  décrit une droite (M) passant par  $G'$ , la correspondance établie entre les vecteurs  $\vec{G'm}$ ,  $\vec{G'n}$  fait voir aussitôt que  $n$  décrit une droite (N) passant par  $G$  : les directions de (M) et de (N) sont symétriques par rapport à celle de  $X'OX$ , ce qui définit (N) connaissant (M) et vice-versa.

Supposons d'abord (cas général) que (M) ne passe ni par  $F$ , ni par  $F'$ . Il existe alors une conique ( $\Gamma$ ) et une seule de foyers  $F$ ,  $F'$  tangente (ou asymptote) à (M) : c'est une ellipse ou une hyperbole selon que  $F$  et  $F'$  sont du même côté, ou de part et d'autre de (M).

Considérons les triangles  $F'mG'$  et  $nmF$ , directement semblables (I, 4°) : cela comporte que

$$(\vec{mF'}, \vec{mG'}) = (\vec{mn}, \vec{mF}) = -(\vec{mF}, \vec{mn}), \quad (\text{à } 2k\pi \text{ près}),$$

et que  $\overrightarrow{mF}$ ,  $\overrightarrow{mF'}$  ont même bissectrice intérieure que  $\overrightarrow{mn}$ ,  $\overrightarrow{mG'}$ . Les tangentes à  $(\Gamma)$ , issues du point  $m$ , dont l'une est  $(M)$ , satisfont au théorème de Poncelet : elles ont mêmes bissectrices que  $mF$ ,  $mF'$ . On voit donc que la seconde tangente est portée par la droite  $mn$ .

Quand  $m$  décrit entièrement  $(M)$ , la droite  $mn$  vient successivement en coïncidence avec toutes les tangentes à  $(\Gamma)$ , y compris  $(M)$  elle-même [lorsque  $m$  atteint le point de contact de  $(M)$  avec  $(\Gamma)$ ] et sa symétrique  $(M')$  par rapport au centre  $O$  de  $(\Gamma)$ , lorsque  $m$  s'éloigne à l'infini. L'enveloppe de la droite  $mn$ , dans ces conditions, est donc la conique  $(\Gamma)$ .

Les triangles  $nFm$  et  $nGF'$  sont directement semblables (I, 1°) : le théorème de Poncelet appliqué aux tangentes à  $(\Gamma)$  issues du point  $n$ , dont une est  $mn$ , montre, comme précédemment, que la seconde tangente est  $nG$ , soit  $(N)$ . En résumé, la conique  $(\Gamma)$  est tangente aux droites  $(M)$ ,  $(N)$ .

Supposons, maintenant (cas particulier) que  $M$  passe par  $F$  ou par  $F'$ , par exemple que  $(M)$  soit la droite  $G'F$  : il n'y a plus, à proprement parler, de conique  $(\Gamma)$ . Lorsque  $m$  est en  $F$ ,  $n$  étant aussi en  $F$ , on doit considérer que la droite  $mn$  est indéterminée parmi toutes celles issues de  $F$ . Si  $m$  est distinct de  $F$ , les triangles semblables  $mFG'$ ,  $mnF'$  sont aplatis puisque  $(\overrightarrow{mF}, \overrightarrow{mG'}) = k\pi$  ;  $(\overrightarrow{mn}, \overrightarrow{mF'}) = k\pi$  ;  $mn$  coïncide avec  $mF'$ , donc passe par  $F'$ . L'enveloppe de  $mn$  est le point  $F'$ , plus le point  $F$  (enveloppe singulière).

Même résultat si  $(M)$  passe par  $F'$  : l'enveloppe de  $mn$  est le système des points  $F$ ,  $F'$  et c'est alors l'enveloppe point  $F'$  qui est singulière.

2° Dans la figure constituée par  $F$ ,  $F'$ ,  $G$ ,  $G'$ ,  $m$ ,  $n$ , est-il possible que les vecteurs  $\overrightarrow{G'm}$  et  $\overrightarrow{G'n}$  soient équipollents ?

D'après (I, 4°), il faut et il suffit que  $\overrightarrow{G'm}$  soit parallèle à  $X'OX$  et que  $G'm = l$ .

On est ainsi conduit à prendre pour  $(M)$  la parallèle à  $X'OX$  menée par  $G'$  et à prendre sur cette droite, de part et d'autre de  $G'$ , les longueurs  $G'm_1 = G'm_2 = l$ .

Les points  $n_1$ ,  $n_2$  homologues de  $m_1$  et  $m_2$  sont sur la parallèle à  $X'OX$  menée par  $G$  et

$\overrightarrow{Gn_1} = \overrightarrow{G'm_1}$  ;  $\overrightarrow{Gn_2} = \overrightarrow{G'm_2}$ .  $m_1n_1n_2m_2$  est un parallélogramme de centre  $O$ .

D'après la définition de  $X'OX$  la droite  $m_1G'm_2$  est bissectrice extérieure de l'angle de  $\overrightarrow{G'F}$  avec  $\overrightarrow{G'F'}$ . Supposons (cas général) que  $G'$  (ou  $G$ ) ne soit pas intérieur au segment  $FF'$  : il existe alors une ellipse  $(E)$  de foyers  $F$ ,  $F'$  passant par  $G'$  (et  $G$ ) et sa tangente en  $G'$  est  $m_1G'm_2$  ; c'est la conique  $(\Gamma)$  obtenue en prenant pour  $(M)$  cette droite  $m_1G'm_2$  :  $m_1n_1$  et  $m_2n_2$  lui sont tangentes (II, 1°) : le parallélogramme  $m_1n_1n_2m_2$  est circonscrit à  $(E)$  : appelons  $H$  et  $H'$  les points de contact avec  $(E)$  de  $m_1n_1$  et  $m_2n_2$ .

Les tangentes  $m_1G'm_2$  et  $n_1Gn_2$  sont parallèles au diamètre conjugué du diamètre  $GG'$  dans l'ellipse  $(E)$ , donc ce diamètre conjugué est sur la droite  $X'OX$ . Les tangentes  $m_1Hn_1$  et  $m_2Hn_2$  sont de même parallèles au diamètre conjugué de  $HH'$ , et comme elles ont la direction de  $GG'$ ,  $GG'$  est ce

diamètre conjugué.  $OH = G'm_1 = l$ , d'où  $HH' = 2l$ . On voit que le diamètre conjugué  $HH'$  de  $GG'$  a comme support  $X'OX$  et pour longueur  $2l$ .

Dans le cas particulier où  $G'$ , et par suite  $G$ , sont intérieurs au segment  $FF'$ , l'ellipse (E) s'aplatit sur le segment  $FF'$ ; d'ailleurs  $X'OX$  coïncide avec la droite  $FF'$ .

3° Dans ce paragraphe, les données sont deux points  $F, F'$  distincts et une droite  $X'OX$ , distincte de  $FF'$ , passant par le milieu  $O$  de  $FF'$ ; et de plus la longueur  $l$  ( $l \neq 0$ ).

Le problème à résoudre est la détermination d'un couple inconnu de points  $G, G'$  symétriques par rapport à  $O$ , et tel que la transformation ponctuelle  $T$  qui fait l'objet de (I), définie à l'aide des couples  $(FF')$  et  $(GG')$ , ait des éléments  $X'OX, l$  (I, 4°) confondus respectivement avec la droite et la longueur données.

*Analyse.* S'il existe de tels points  $G, G'$ , on a vu dans (II, 2°) que l'ellipse (E) (inconnue *a priori*) de foyers  $F, F'$  et passant par  $G, G'$ , a comme diamètre conjugué de  $GG'$ , le diamètre  $HH'$  porté par  $X'OX$  et de longueur  $2l$ . Cette ellipse est proprement dite, car  $G'$  ne peut être sur le segment  $FF'$ , sans quoi  $X'OX$  serait confondue avec  $FF'$  (fin de II, 2°).

$H$  et  $H'$  sont connus sur  $X'OX$  (à la symétrie près de centre  $O$ ), puisque  $OH = OH' = l$ . L'ellipse (E) est déterminée; on connaît ses foyers  $F, F'$  et un point  $H$  de l'ellipse, non situé sur le segment  $FF'$ .  $G$  et  $G'$  sont nécessairement les extrémités du diamètre conjugué de  $HH'$  dans cette ellipse.

Le problème n'est donc susceptible, à la symétrie près de centre  $O$ , que d'une solution.

*Synthèse.* Inversement,  $G, G'$  étant ainsi obtenus, il existe une transformation  $T_1(FF'GG')$  [où les rôles de  $FF'$  sont permutables, et l'échange de  $G, G'$  la mène en son inverse]; l'ellipse  $(E_1)$ , définie à l'aide de  $T_1$  comme  $E$  le fut à l'aide de  $T$  dans (II, 2°), est confondue avec (E) et la droite  $X'OX_1$ , la longueur  $l_1$  caractéristiques de  $T_1$  sont respectivement la droite  $X'OX$  et la longueur  $l$ .

*Conclusion.* Le problème est possible et admet deux solutions [une seule en ne distinguant pas les points du couple  $(G, G')$ ].

On aurait pu envisager le problème posé, d'après (I, 4°) comme consistant à achever la détermination du parallélogramme  $FGF'G'$  de manière que  $X'OX$  soit parallèle à la bissectrice intérieure de  $\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{F'G'}$  et que l'on ait

$$FG \times F'G = l^2,$$

mais la méthode naturelle, consistant à déterminer  $G$  par l'intersection de deux « lieux géométriques » exprimant les conditions précédentes, n'eût pas été élémentaire.

Examinons directement les cas particuliers qui ont été écartés.

*F et F' confondus :*  $G$  et  $G'$  différents de  $F$  : la bissectrice de  $\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GF'}$ , vecteurs confondus est sur  $GF$  et doit être perpendiculaire à  $OX$ , donc  $G$  et  $G'$  sont sur la perpendiculaire à  $X'OX$  en  $O$ , à une distance de  $O$  égale à  $l$ . Le problème a encore une solution unique : d'ailleurs (E), de considération superflue ici, est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $l$ .

$X'OX$  confondu avec  $FF'$  ( $F, F'$  distincts) : si, pour une solution éventuelle, le triangle  $FGG'$  est véritable,  $FO$  est à la fois bissectrice et médiane de l'angle en  $F$  du triangle, donc  $FG = FG'$  et la valeur commune de ces longueurs est  $l$ , le parallélogramme doit être un losange de côté  $l$ . Ce n'est possible que si  $l > OF$ . Mais il est *a priori* possible que  $G$  soit sur  $X'OX$ , auquel cas  $G$  (et  $G'$ ) sont intérieurs au segment  $FF'$  : on voit que

$$\begin{cases} GF + GF' = FF' = 2 OF, \\ GF \cdot GF' = l^2. \end{cases}$$

Comme il est connu, cette éventualité ne peut se produire que si  $l \leq OF$ . Il en résulte la discussion suivante :

1°  $l > OF$  : le cercle de centre  $F$  et de rayon  $l$  coupe la médiatrice de  $FF'$  aux points  $G, G'$  ; c'est l'unique solution du problème.

2°  $l \leq OF$  : le cercle de diamètre  $FF'$  rencontre la parallèle à  $FF'$  distante de cette droite de la longueur  $l$  en des points dont les projections orthogonales sur  $X'OX$  fournissent les points  $G, G'$  cherchés.

Le problème, dans tous les cas, a pour solution un couple unique de points  $G, G'$  (confondus si  $l = OF$ ).

4° Les données sont ici les points  $G, G'$  (milieu  $O$ ), la droite  $X'X$  passant par  $O$  et la longueur  $l$  ( $l \neq 0$ ). Soit à trouver  $F, F'$ .

Pour que  $G, G'$  soient solutions, il faut et il suffit que  $X'OX$  soit parallèle à la bissectrice extérieure de  $GF, GF'$  et que l'on ait  $GF \times GF' = l^2$ . La première condition équivaut à la suivante : la bissectrice intérieure de  $GF, GF'$  doit être parallèle à une droite connue  $Y'OY$  qui n'est autre que la perpendiculaire à  $X'OX$  en  $O$ . Le problème se ramène donc à un problème du même type que celui qui fait l'objet de (II, 3°) : il n'est pas nécessaire de reprendre les détails de la construction de  $F, F'$ , dans les différents cas possibles. Bornons-nous à la conclusion :

La connaissance de  $GG'$ ,  $X'OX$  ( $O$  milieu de  $GG'$ ) et de  $l \neq 0$  détermine l'existence d'un couple de points  $F, F'$  et d'un seul.

5° On donne dans (II) deux droites  $(N)$  et  $(M)$  orientées, un point  $G$  sur  $(N)$ , un point  $G'$  sur  $(M)$  et une constante non nulle  $K$ . Trouver l'enveloppe des droites  $mn$  coupant  $(M)$  et  $(N)$  aux points respectifs  $m, n$ , variables et tels que  $\overline{G'm} \times \overline{Gn} = K$ .

Le changement de l'orientation positive d'une seule des droites  $(M)$  et  $(N)$  a pour effet le changement de  $K$  en  $-K$ . Il est loisible ainsi de disposer les orientations de ces droites de manière que  $K$  soit positif. Posons alors  $K = l^2$  ( $l > 0$ ) et soit  $X'OX$  la droite passant par le milieu  $O$  de  $GG'$  et parallèle à la bissectrice intérieure des deux orientations de ces droites.

Nous venons d'établir qu'il existe un couple de points  $(F, F')$  symétriques par rapport à  $O$  et tel que la transformation  $T(FF', G, G')$  se traduise, entre deux points homologues  $n, m$ , par les relations

$$\begin{aligned} (\vec{OX}, \vec{G'm}) + (\vec{OX}, \vec{Gn}) &= 2k\pi, \\ \vec{G'm} \times \vec{Gn} &= l^2. \end{aligned}$$

D'après les choix effectués pour  $X'OX$  et  $l^2$ , les points  $n$  [sur  $(N)$ ] et

$mn$  [sur (M)], dont il s'agit dans le texte de (II, 5°), sont homologues par T.

Le problème posé se ramène à celui qui fait l'objet de (II, 1°) : l'enveloppe des droites  $mn$  de (II, 5°) est généralement une ellipse ou hyperbole  $(\Gamma)$ , de foyers F, F', tangente à (M), (N) et à leurs symétriques (M'), (N') par rapport à O.

Quand K varie,  $(\Gamma)$  conserve ces quatre tangentes fixes.

Toutefois, l'enveloppe peut être dégénérée en un système de deux points qui sont alors F, F', et on a vu (fin de II, 1°) que ce cas se présente si (M) et (N) ont en commun un des points F, F'. Peut-on caractériser ce cas, *a priori*, c'est-à-dire d'après les données  $[G', G, (M), (N) \text{ et } K]$  ?

Il est nécessaire, à cet effet, que le point de rencontre  $f$  de (M) et (N) soit à distance finie et tel que  $\overline{G'f} \times \overline{Gf} = K$ .

Cette condition imposée à K est suffisante : si elle est remplie,  $f$  est en effet point double de T et nécessairement confondu avec F ou F'.

6° Réciproquement, soit donnée dans (II) une ellipse ou hyperbole  $(\Gamma)$  et deux tangentes fixes, distinctes, (M) et (N) à  $(\Gamma)$  ; considérons une tangente arbitraire à  $(\Gamma)$  qui coupe (M) en  $m$ , (N) en  $n$ .

Appelons F, F', O, les foyers et le centre de  $(\Gamma)$  et supposons d'abord (M) et (N) non parallèles. Appelons  $G'$  le point de rencontre, déterminé, de (M) avec la symétrique (N') de (N) par rapport à O, et G le symétrique de  $G'$  par rapport à O. G est sur (N).

Les couples (F, F') et (G, G'), de même milieu O, sont distincts et déterminent une transformation T. D'après (II, 1°), quand  $n$  décrit (N), son homologue  $m_1$  dans (T) décrit une droite  $(M_1)$  passant par  $G'$  et l'enveloppe de la droite  $m_1n$  est une conique  $(\Gamma_1)$  de foyers F, F' tangente à  $(M_1)$ , (N), (N'). Or, il n'y a qu'une conique  $(\Gamma)$  de foyers (F, F'), tangente à (N) ; donc  $(\Gamma_1)$  coïncide avec  $(\Gamma)$ .

De plus, la droite  $(M_1)$ , tangente à  $(\Gamma)$  et passant par  $G'$ , coïncide avec (M) ou (N'). Si  $(M_1)$  était confondue avec (N'), elle représenterait deux tangentes confondues à  $(\Gamma_1)$  issues de  $G'$ , et  $G'$  serait sur  $(\Gamma_1)$  : ce qui n'est pas puisque  $G'$  est extérieur à  $(\Gamma) = (\Gamma_1)$ . Donc  $(M_1)$  n'est autre que (M) :  $m_1n$  et  $mn$  étant par hypothèse deux tangentes à  $(\Gamma)$  issues de  $n$  ( $n \neq G$ ) sont confondues et  $m_1$  n'est autre que  $m$ .

Toujours d'après (II, 1°), quand  $n$  varie sur (N),  $\overline{G'm_1} \times \overline{Gn} = C^{te}$ .

Donc, il est possible de trouver les points G [sur (N)] et  $G'$  [sur (M)] de manière que  $\overline{G'm} \times \overline{Gn} = C^{te}$ .

Dans le cas particulier où (M) et (N) sont parallèles, donc symétriques par rapport à O, il suffit de prendre pour  $G'$  et G les points de contact respectifs de (M) et (N) avec  $(\Gamma)$  et le raisonnement de synthèse, utilisant la transformation T, est tout semblable au précédent :  $(\Gamma_1)$  coïncide avec  $(\Gamma)$  et  $(M_1)$ , tangente à  $(\Gamma_1)$ , donc à  $(\Gamma)$ , coïncide nécessairement avec (M). Les conclusions obtenues subsistent.

III. Revenons aux données de (II, 1°), la conique ( $\Gamma$ ) étant supposée non dégénérée. Adjoignons à ces données une droite ( $\Phi$ ) du plan (II) qui ne passe, ni par  $G$ , ni par  $G'$  et qui coupe ( $M$ ) et ( $N$ ) en les points respectifs  $u$  et  $v$  qui ne sont, ni rejetés à l'infini, ni sur ( $\Gamma$ ).

1° En général ( $\Phi$ ) n'est pas tangente à ( $\Gamma$ ) ; par  $u$  passe une tangente à ( $\Gamma$ ) distincte de ( $M$ ), et de ( $\Phi$ ) ; elle n'est pas parallèle à ( $N$ ), sinon  $u$  serait le point  $G'$ , ce qui est exclu par les restrictions stipulées ; cette tangente coupe ( $N$ ) en un point  $r$  à distance finie. De même par  $v$  passe une tangente à ( $\Gamma$ ), distincte de ( $N$ ) et de ( $\Phi$ ) qui coupe ( $M$ ) en un point  $q$  à distance finie.

Les orientations positives de ( $M$ ) et ( $N$ ) étant choisies symétriquement par rapport à la direction  $X'OX$ , exprimons que  $ur$  et  $vq$  sont tangentes à ( $\Gamma$ ) par les relations :

$$\overline{G'u} \cdot \overline{Gr} = l^2, \quad \overline{G'q} \cdot \overline{Gv} = l^2,$$

puis que  $mn$  (conditions de II, 1°) est tangente à ( $\Gamma$ ) :

$$\overline{G'm} \cdot \overline{Gn} = l^2,$$

$$\text{d'où } \overline{nr} = \overline{Gr} - \overline{Gn} = l^2 \left( \frac{1}{\overline{G'u}} - \frac{1}{\overline{G'm}} \right) = -l^2 \frac{\overline{mu}}{\overline{G'u} \cdot \overline{G'm}}$$

$$\text{et de même } \overline{nv} = -l^2 \frac{\overline{mq}}{\overline{G'q} \cdot \overline{G'm}}$$

On en déduit  $\frac{\overline{nr}}{\overline{nv}} = \frac{\overline{mu}}{\overline{mq}} : \frac{\overline{G'u}}{\overline{G'q}}$  relation qui s'écrit aussi :

$$(8) \quad \frac{\overline{mq}}{\overline{mu}} \times \frac{\overline{nr}}{\overline{nv}} = \frac{\overline{G'q}}{\overline{G'u}} = C^{\text{te}}.$$

2° Si ( $\Phi$ ) est tangente à ( $\Gamma$ ), les points  $u$  et  $v$  sont liés par :

$$\overline{G'u} \cdot \overline{Gv} = l^2.$$

Transformons la relation  $\overline{G'm} \cdot \overline{Gn} = l^2$  en introduisant comme variables

$$X = \overline{um} \quad Y = \overline{vn}$$

$$(\overline{G'u} + X) (\overline{Gv} + Y) = l^2 \text{ devient } Y \cdot \overline{G'u} + X \cdot \overline{Gv} + XY = 0.$$

Pour  $mn$  distincte de ( $\Phi$ ),  $X$  et  $Y$  sont non nuls et cette relation s'écrit :

$$(9) \quad \frac{A}{X} + \frac{B}{Y} = 1 \quad \text{en posant } A = -\overline{G'u} \quad B = -\overline{Gv}$$

$A$  et  $B$  sont des constantes non nulles.

*Remarque.* La relation (8) dans le premier cas, la relation (9) dans le second cas sont caractéristiques du fait que la droite  $mn$  est tangente à ( $\Gamma$ ) : car il résulte des formes (8) ou (9) qu'à un point  $m$  elles font correspondre un point unique  $n$ .

IV. APPLICATION A LA PROJECTION CONIQUE. — Soit  $S$  un point non situé dans (II) ; soit ( $\Pi_1$ ) un plan parallèle au plan passant par  $S$  et ( $\Phi$ ).

On va effectuer une projection conique du plan ( $\Pi$ ) sur le plan ( $\Pi_1$ ), le centre de projection étant S.

Les points, simultanément variables,  $m$  et  $n$  de (M) et (N) ont comme « projections » respectives  $m_1$  et  $n_1$  les points de rencontre avec ( $\Pi_1$ ) des droites  $Sm$  et  $Sn$ .

( $\Phi$ ) et (M) étant des droites distinctes, le plan SM n'est pas parallèle à ( $\Pi_1$ ), et le lieu de  $m_1$  est la trace sur ( $\Pi_1$ ) de ce plan SM. Appelons cette droite ( $M_1$ ). De même le lieu de  $n_1$  est une droite ( $N_1$ ). Etudions la correspondance entre  $m_1$  et  $n_1$  sur ces droites.

Cas (III, 1°) : ( $\Phi$ ) non tangente à ( $\Gamma$ ). Les droites  $Sq$ ,  $Sr$  coupent ( $\Pi_1$ ), à distance finie, en des points fixes respectifs  $q_1$ ,  $r_1$ , situés respectivement sur (M) et (N). ( $M_1$ ) et ( $N_1$ ) sont respectivement parallèles aux droites  $Su$  et  $Sv$ .

Dans le plan  $SMM_1$  contenant les droites  $Su$ ,  $Sqq_1$ ,  $Smm_1$ , menons par  $q$  la parallèle à  $Su$  qui coupe  $Sm$  en  $\mu$  ; par homothétie :

$$\frac{\overline{mq}}{\overline{mu}} = \frac{\overline{\mu q}}{\overline{Su}}$$

et aussi

$$\frac{\overline{\mu q}}{\overline{m_1 q_1}} = \frac{\overline{Sq}}{\overline{Sq_1}} = \alpha \quad (\text{constante}),$$

d'où

$$\frac{\overline{mq}}{\overline{mu}} = \overline{m_1 q_1} \times \frac{\alpha}{\overline{Su}}.$$

De même on voit que,  $\beta$  étant  $\frac{\overline{Sr}}{\overline{Sr_1}}$  (constante),  $\frac{\overline{nr}}{\overline{nv}} = \overline{n_1 r_1} \times \frac{\beta}{\overline{Sv}}$ .

La relation (8) devient donc :  $\overline{m_1 q_1} \times \overline{n_1 r_1} = C''$ .

Dans le plan ( $\Pi_1$ ), d'après (II, 5°), où les rôles des points fixes  $G'$  et  $G$  sont joués par les points fixes  $q_1$  et  $r_1$ , l'enveloppe de la droite  $m_1 n_1$  est une conique ( $\Gamma_1$ ) tangente à ( $M_1$ ) et ( $N_1$ ).

Cas (III, 2°) : ( $\Phi$ ) tangente à ( $\Gamma$ ). Il convient de modifier comme suit la démarche du raisonnement : La parallèle à (M) menée par S n'est pas parallèle à ( $\Pi_1$ ), sinon (M) serait confondue avec ( $\Phi$ ) : elle coupe ( $\Pi_1$ ) en un point  $a$  situé sur ( $M_1$ ) ; de même la parallèle à (N), menée par S, coupe ( $\Pi_1$ ) en un point  $b$  situé sur ( $N_1$ ).

Dans le plan  $SMM_1$  les triangles  $uSm$ ,  $am_1S$  ont leurs côtés homologues parallèles, ils sont homothétiques et il en résulte :

$$\frac{\overline{uS}}{\overline{am_1}} = \frac{\overline{um}}{\overline{aS}}$$

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{um} = \frac{\overline{am_1}}{\overline{uS} \cdot \overline{aS}} = \alpha' \cdot \overline{am_1} \quad (\alpha' \text{ constante} \neq 0).$$

De même, dans le plan  $SNN_1$  on obtient :

$$\frac{1}{Y} = \beta' \cdot \overline{bn_1} \quad (\beta' \text{ constante} \neq 0).$$

La relation (9) devient une relation de la forme

$$A_1 \overline{am_1} + B_1 \overline{bn_1} = 1 \quad A_1, B_1 \text{ constante} \neq 0.$$

Soient  $\mu_1$  et  $\nu_1$  des positions *correspondantes* de  $m_1$  et  $n_1$  sur  $M_1$  et  $N_1$  :

$$A_1 \overline{a\mu_1} + B_1 \overline{b\nu_1} = 1.$$

Par soustraction, il en résulte :

$$A_1 \overline{\mu_1 m_1} + B_1 \overline{\nu_1 n_1} = 0 \text{ ou } \frac{\overline{\mu_1 m_1}}{\overline{\nu_1 n_1}} = C^{\text{te}}.$$

Donc sur  $(M_1)$  et  $(N_1)$ ,  $m_1$  et  $n_1$  engendrent des divisions semblables : on sait que  $m_1 n_1$  enveloppe alors une *parabole*, soit  $(\Gamma_1)$ .

*Remarque.* Dans ces deux cas (III, 1°) (III, 2°) on ne risque pas de rencontrer pour l'enveloppe de  $m_1 n_1$  une dégénérescence en points fixes, à distance finie ou à l'infini, puisque cela comporterait une dégénérescence correspondante de l'enveloppe de  $mn$  dans le plan  $(\Pi)$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Soit  $p$  un point de  $(\Gamma)$ , sa projection conique  $p_1$  sur  $(\Pi_1)$  est telle que par  $p_1$  passent deux tangentes *confondues* à  $(\Gamma_1)$ , projections des tangentes *confondues* à  $(\Gamma)$  issues de  $p$  ; et les points de  $(\Gamma_1)$  sont, inversement, les seuls à posséder cette propriété.  $p_1$  est sur  $(\Gamma_1)$ , condition *équivalente* à «  $p$  sur  $(\Gamma)$  ».  $(\Gamma_1)$  est donc la *projection conique* de  $(\Gamma)$ .

*Conclusion.* On pourrait dans  $(\Pi)$  se donner une conique  $(\Gamma)$  à *centre quelconque* et d'après (II, 6°),  $(M')$  et  $(N)$  étant deux tangentes *arbitraires* à  $(\Gamma)$ ,  $(\Gamma)$  peut être considérée comme enveloppe des droites  $mn$  dans les conditions de (II, 1°). La projection conique, dans le système de projections  $[S, (\Pi), (\Pi_1)]$  de  $(\Gamma)$  sur  $(\Pi_1)$  est une conique  $(\Gamma_1)$ , *qui n'est pas nécessairement une conique à centre*.

On est tenté d'affirmer la proposition suivante : « Toute projection conique d'une conique est une autre conique. »

Cependant sa démonstration n'est pas encore assurée dans le cas où la conique projetée est une parabole. On ne demandait pas d'étudier ce cas, qui peut cependant être ramené aux considérations précédentes.

L'idée d'une telle méthode, pour établir cette importante propriété des coniques, nous paraît remonter à un travail de G. ILIOVICI et E. WEILL, en 1927.

*Appréciations de l'épreuve.* — Le guidage étroit des candidats, qui était assuré par les paragraphes du texte, semble procéder d'un certain scepticisme du jury quant à l'éventualité d'un candidat faisant preuve de génie. On reproche souvent à ces épreuves, abondamment « jalonnées », la contrainte inutile qu'elles feraient peser sur ce candidat (s'il s'en trouvait), comme si des questions précises, se succédant d'après un plan rationnel, devaient apporter une entrave à la manifestation de la personnalité de l'élève. Ces appréhensions nous paraissent chimériques.

En fait, un lot de candidats très intéressant, devançant une troupe dont les notes s'échelonnent régulièrement, a été mis en valeur par l'étude des copies. La sélection s'opère, en pareil cas, par l'appréciation des réactions des concurrents sur certains points délicats, que très peu dominent entièrement, et qui jouent ainsi un rôle crucial.

Ainsi, l'emploi des méthodes de la géométrie orientée n'a pas donné lieu, dans ces copies, à des critiques trop graves. On a relevé que la notion de « similitude directe » est interprétée de manière fort diverse, et que cela indique sans doute que cette question est définie et enseignée différemment dans nos classes : le jury s'est montré tout à fait impartial à cet égard, tenant compte du libre choix des méthodes adoptées par les maîtres.

Une faute technique, qui a cours fréquemment, consiste à croire qu'en remplaçant un vecteur par son opposé, on remplace aussi par son opposé l'angle qu'il fait avec une direction fixe.

La manière de caractériser par une congruence angulaire la bissectrice de l'angle de deux vecteurs a donné lieu à des erreurs, d'un type moins grossier, qui prouvent de l'inattention, et ne sont guère évitables par l'observation de règles rigides. Toutefois, on devrait savoir qu'en divisant les deux membres d'une congruence (mod.  $2\pi$ ) par 2, on n'obtient plus qu'une congruence (mod.  $\pi$ ), et avoir réfléchi aux faits de ce genre.

Le manque d'esprit critique s'est manifesté sous deux formes chez les concurrents : en premier lieu, une certaine passivité devant l'énoncé, dont on ne discute pas les affirmations : il fallait expliquer, par une analyse rigoureuse, une phrase comme «  $m$  n'est défini que si  $n$  est différent de  $F'$  et de  $G$  (I, 1°) ». Le manque de commentaire de la phrase du texte où il est question d'une conique déterminée par ses foyers et une tangente est un peu inquiétant aussi ; ce mutisme a été presque général : nulle allusion au cercle principal, au cas exceptionnel, à la nature de la conique.

En second lieu, on ne se préoccupe que fort peu d'effectuer des contrôles des résultats acquis. Ainsi la question « que devient  $m$  quand  $n$  tend vers  $G$  ? » intervenait deux fois : rares sont les candidats qui indiquent qu'ils l'ont remarqué. Que dire de ceux qui trouvent, à des reprises différentes, des résultats se contredisant, en réponse à cette question, et ne s'en inquiètent pas !

L'hypothèse du texte : « Les couples  $F_1F'$  et  $G_1G'$  sont distincts », n'a joué presque aucun rôle. On aurait aimé tenir compte de la rigueur des déductions où cette hypothèse apparaît.

Une figure, jointe au texte, qui s'est trouvée être utile aux candidats, et à leurs correcteurs, représentait un parallélogramme  $FGF'G'$  non aplati. Nous inclinons à penser que maint élève, de ce fait, n'a pas imaginé que les deux segments  $FF'$  et  $GG'$  peuvent appartenir à une même droite. La tendance des élèves à sous-estimer les hypothèses, à surestimer les figures est à combattre, avec mesure, car elle est naturelle et d'ordre esthétique.

La part faite à l'érudition, dans les copies, ne donne pas lieu à l'unanimité des critiques : on signale qu'elle a conduit des concurrents à réciter certaines constructions des foyers d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués. Nous ne nous scandalisons pas du fait que des notions plus ou moins hors-programme, soient connues des élèves, mais elles risquent de ne l'être pas profondément.

Les élèves qui étalent leurs connaissances (sur le fait précité pour fixer les idées) soupçonnent-ils qu'il y a certaines difficultés à démontrer l'exis-

tence effective d'une ellipse dont deux diamètres conjugués sont arbitrairement donnés, en grandeur et position ?

L'homographie a-t-elle été employée ? Bien rarement, semble-t-il, et ç'eût été enlever au problème sa saveur. Une copie, émanant d'un élève de Mathématiques (Technique) et qui, pour des raisons de règlement n'a pas été classée, a utilisé correctement la notion de rapport anharmonique. Ces constatations n'appellent aucun reproche pour personne.

Beaucoup de candidats, même estimables, conçoivent les problèmes de construction comme simple affaire de tracés : c'est compréhensible, car ils ont entre les mains, règle, équerre et compas. Il se trouvait que, dans le problème, c'était l'*existence* (et l'unicité) des solutions qui jouaient un rôle essentiel. Il y a là une éducation de l'esprit (et non de la main) à développer, et ceux de nos collègues, justement séduits par le rôle de l'axiomatique en mathématiques, ne devront pas méconnaître les résistances de leurs élèves venant d'un attachement exclusif au concret ; il y a là beaucoup de doigté encore à employer.

La méthode des lieux géométriques, pour traiter de problèmes de construction, est éminente, mais ce n'est pas une panacée. Ainsi, elle conduisait, à propos de (II, 3°) à déterminer G par l'intersection d'un ovale de Cassini et d'une hyperbole équilatère (homofocales). Un candidat l'a signalé. Comme quoi les méthodes qu'on pourrait qualifier de primaires, ne sont pas (dans un cadre évidemment restreint) élémentaires...

Ce sont des considérations de cet ordre qui conduisent les auteurs de problèmes des concours, à diriger les élèves dans des sentiers parfois contournés.

Cette conduite des esprits est toujours délicate alors et nécessite l'appel au balancement nuancé de l'analyse et de la synthèse : nous préférons l'emploi de ces termes à ceux de « propositions directes et réciproques » qui semble entraîner une pédagogie dogmatique, et non de découverte, où les vérités à justifier seraient connues d'avance.

Dans de bonnes copies, les démonstrations des dites réciproques, de libellé fourni (fâcheusement, nous en convenons, mais comment faire autrement !), par le texte même de l'énoncé sont insuffisantes. « La réciproque se démontré par identification » affirme un lauréat. Nous n'en doutons pas, mais ne savons apprécier le contenu, obscur, de la valeur de cette affirmation. Sans doute, le rôle des mathématiques est la recherche du moindre effort : mais l'aptitude à raisonner directement sur des exemples, à exposer et développer une synthèse bien faite, est cependant d'un ordre plus élevé que l'application des mécanismes mathématiques, pour la formation de l'esprit.

*Présentation.* — On relève, comme par le passé, des lettres utilisées sans définitions, des entorses à l'orthographe, et une certaine hésitation des candidats à multiplier les figures partielles indispensables.

Un jury moins bienveillant pourrait sanctionner effectivement ces insuffisances : d'autant plus qu'il a parfois bien de la peine à faire crédit, géné-

reusement, à la manière peu explicite dont certains résultats sont obtenus dans les copies.

La partie II est certainement celle où les concurrents ont éprouvé des difficultés à comprendre le sujet, à le discuter en détail de manière satisfaisante. Cependant le (I, 5°), par sa facilité, aurait dû être mieux dominé. Le jury s'est étonné, par contre, de constater combien le III a peu arrêté les candidats qui ont eu le temps de l'aborder. Le IV n'a été qu'ébauché par les meilleurs.

*Classement.* — 21 copies sur 173 remises ont été retenues par le jury pour faire l'objet d'un examen attentif par tous les correcteurs.

Alors que la copie classée première, sans lacunes graves, a été unanimement estimée remarquable, les deux suivantes n'ont pu être départagées par le jury : les explications y sont parfois moins sobres et plus attachantes par là que dans la première. Ces deux copies ont été classées *ex-æquo*. Il a été proposé un premier prix (15,66 sur 20) ; deux seconds prix (14), et sept accessits (13,5 à 10). Ces propositions ont tenu compte de ce que l'épreuve de 1951 a semblé plus facile que sa devancière de 1950.

Dans le palmarès, il s'est trouvé que le premier prix du concours de Première de 1950 a obtenu cette année un premier accessit ; que l'un des seconds prix de 1950 a maintenu son rang et que le second accessit de Première a enlevé le premier prix en Mathématiques. Ces accidents inévitables sont minimes par rapport à la constatation, qui devient traditionnelle, que les résultats des deux concours sont d'une remarquable concordance.

Nous adressons aux membres du Jury nos remerciements et nos compliments pour la conscience, la compétence éclairée et le zèle ardent avec lesquels ils ont fait l'étude des compositions.

Nous sommes heureux de féliciter également les professeurs qui ont su développer une culture géométrique toujours en progrès ; sur eux rejaillit l'éclat des résultats de cette manifestation traditionnelle de la vitalité de notre enseignement.

*L'Inspecteur général, Président du Jury,*

P. ROBERT.

---

## DEUXIÈME PARTIE

---

### La question de Cours au Baccalauréat

J'ai été agréablement surpris à la lecture du *Bulletin* de l'A.P.M. en constatant que la question de cours au Baccalauréat était, enfin, sérieusement accrochée.

Cette question me tient à cœur. Depuis plus de cinquante sessions de

Baccalauréat auxquelles je participe, je conclus chaque fois de la même façon : la question de cours en Mathématiques doit être supprimée.

En effet, il n'est pas une seule fois où je n'ai assisté à la délibération avant la correction sans voir démolir au moins une sur trois, sinon les trois questions de cours.

J'entends par là que, pour ces questions :

a) ou bien on prouve qu'elles sont mal posées. Il est extrêmement difficile de donner un énoncé qui satisfasse tous les membres du jury ;

b) ou bien les membres du jury ne sont pas d'accord sur les parties qui sont du sujet, sur celles qui doivent nécessairement être traitées, s'il faut ou non admettre tel théorème préparatoire ;

c) ou bien on arrive à prouver que, suivant que le professeur de l'élève a commencé de telle ou telle façon son cours, le candidat peut escamoter la question, tout en ne pouvant rien lui reprocher ; ou enfin il ne peut traiter la question qui découle d'un ordre choisi par tel groupe de professeurs, mais peut-être pas de tous.

Les exemples fourmillent. En voici :

*Dérivée de  $y = \sqrt{x}$ .* Certains candidats ont traité en classe la dérivée de fonction de fonction, pourtant hors programme. Ils disent :

$$y^2 = x, \quad 2yy' = 1, \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Comment juger la copie ?

*Volumé du cône.* Si on admet le résultat du volume d'une pyramide, que reste-t-il à démontrer ?

*Signe du trinôme  $y = -2x^2 + x + 1$ .* Le candidat peut étudier les variations de la fonction et tracer la courbe représentative. Il en déduira immédiatement le signe de  $y$ . A-t-il le droit de le faire ainsi ?

*Inversion.* Comment se limiter ?

*Que savez-vous des étoiles ?* Comment coter une copie ?

J'en passe, et des meilleures.

A chaque session, le président de la commission doit user de toute son autorité pour faire accepter par les correcteurs les différentes façons de résoudre une question de cours, m'a dit un collègue à l'issue de l'une d'elles.

Par contre, la discussion relative au problème est fort courte et ne consiste qu'à établir un barème.

*Le « Bachotage ».* Il y a plus grave. Les candidats en Première (et un peu en Mathématiques) passent un an à faire un travail ridicule et inutile. Comptant sur la question de cours, ils en apprennent 25 par cœur, souvent sans chercher à en comprendre l'esprit. Ils s'estiment satisfaits ainsi.

Espérant avoir 8 sur 10 en cours, 2 sur 10 au problème, ils comptent sur la moyenne. C'est ainsi que font 80 % des élèves de Première. Que vaut cette façon de travailler ?

*Alors que faire ?* Il n'y a que deux façons de s'en tirer :

1° ou bien on maintient la question de cours. Mais, si on veut que tout

le monde soit d'accord sur les énoncés, le seul moyen est de donner une liste officielle de ces questions, avec le ou les plans détaillés officiels, possibles, pour les traiter. Tout autre procédé permettra de continuer indéfiniment leur démolition.

Ce procédé conduit au « Bachotage » officiel et il serait déplorable ;

2° ou bien on supprime la question de cours. « Alors, comment allons-nous réussir ? Nous comptons sur elle pour ne pas tous couler », diront les candidats.

Grosse erreur de psychologie ! Il est démontré que les candidats *ont toujours moins*, beaucoup moins quelquefois, qu'ils ne l'espéraient, pour le cours.

Pourquoi ? Parce que les correcteurs ne passent aucune erreur, aucune vétille sur le cours. Ils voudraient que le candidat l'exposât aussi bien que lui le ferait, sans rien omettre, avec un langage parfait.

Par contre, les barèmes ordinairement établis, permettent de donner des notes plus fortes en problème que le candidat ne l'escomptait. Ils ont facilement la moyenne sur les premières questions faciles, préparatoires, sans avoir compris de quoi l'ensemble traitait.

*Par quoi la remplacer ?*

1° ou bien par un deuxième problème *simple, court*, d'application immédiate et *sans astuce* du cours. Certaines façons de présenter les questions de cours ces dernières années ont cette tendance. On résout une équation, on étudie une variation. La seule différence serait qu'on n'établirait pas le théorème de cours, mais qu'on l'appliquerait ;

2° ou bien donner un problème plus long dans lequel les deux premières questions seraient des réponses directes, sans recherche, des résultats du cours. Le barème donnerait la moyenne à ceux qui auraient résolu ces questions.

Voici quelques suggestions. Elles ont peut-être été exposées à la réunion de Pâques, à laquelle je regrette de n'avoir assisté. Je suis d'ailleurs très heureux de l'effort de l'A.P.M. dans la question du Baccalauréat ces toutes dernières années.

R. ZETWOOG,

*Professeur au Lycée Buffon.*

### **Sur le premier enseignement de la Géométrie**

*Exposé fait à la rencontre internationale de Keerbergen (Belgique)  
par Mademoiselle FELIX, professeur au Lycée La Fontaine  
(Pâques 1951)*

Nous voudrions présenter quelques remarques au sujet d'un premier enseignement de la géométrie dans nos Lycées et Collèges, en tenant compte à la fois de l'état mental de l'enfant et des aperçus modernes sur la nature de la logique et les fondements de la géométrie.

M. GONSETH, dans son livre « Qu'est-ce que la logique ? », écrit, à pro-

pos de la forme intuitive relative à l'espace : « Nous ne sommes pas sans quelques renseignements sur son évolution dans la prime enfance. Mais nous pouvons renoncer à nous en servir. A partir d'un certain âge, elle peut être considérée comme fixée, de même que les connaissances qu'elle comporte : dès lors, celles-ci peuvent être dites à *priori*. »

A partir d'un certain âge ? C'est ce qui intéresse le professeur d'Enseignement du Second Degré chargé des débuts de la géométrie. Que possède l'enfant qui, vers douze ans, est en Cinquième ? Des souvenirs d'expériences déjà innombrables sur des objets matériels, une classification implicite de ces objets, qui sont fixes ou mobiles, déformables, articulés, indéformables, etc..., mais en même temps colorés, épais, etc... Il distingue certaines formes remarquables, le déplacement et le mouvement, la direction et le sens, la longueur, la surface, le volume, etc... En même temps, il possède un vocabulaire assez étendu, employant des mots usuels, d'autres plus savants dont l'aspect l'a séduit. Il en comprend d'autres qu'il emploie, mais pas spontanément. Et ces substantifs sont associés à des conjonctions, des adverbes, qui donnent à ses phrases un aspect plus ou moins logique.

Bref, il commence, pour suivre la description de M. Gonseth, à superposer à la réalité « un schéma descriptif, sommaire, symbolique et inachevé ». Mais ce schéma fragile n'est guère pourvu encore d'une structure intrinsèque rigide, et, en tout cas, l'enfant n'en a pas nettement conscience. Raisonner sur cette structure, c'est faire de la géométrie déductive. Enrichir le schéma, créer des représentations intuitives, c'est déjà abstraire. C'est faire de la géométrie expérimentale. C'est ce que M. Gonseth appelle « une préaxiomatisation inconsciente ». Par exemple, c'est la formation de l'idée de droite que suggère un fil tendu, avant toute axiomatisation explicite, stade précédant l'idée de droite géométrique qui résulte de « l'abstraction par axiomatisation ».

Et maintenant, quel est le but que nous nous proposons d'atteindre en trois ou quatre ans ? D'une part, nous voulons enseigner la géométrie élémentaire. Certainement, nous ne songeons pas à ces mathématiques formalisées dont discutent les savants dans les Congrès, où la phrase la plus souvent citée est la célèbre boutade de Bertrand Russel : « Les mathématiques sont une science où l'on ne sait jamais de quoi l'on parle, ni si ce que l'on dit est vrai. » Il ne s'agit même pas de ces géométries axiomatisées qu'il a bien fallu créer lorsque les résultats catastrophiques apparurent, tels que l'ensemble triadique de Cantor qui contredit la notion intuitive de la continuité d'une ligne, ou la courbe de Péano qui détruit la conception immédiate de la dimension. Tout au plus peut-on faire apercevoir cet effort dans la classe terminale des sections scientifiques. La géométrie que nous voulons enseigner est déductive à partir de bases intuitives, modérément euclidienne, légèrement teintée par les géométries non euclidiennes et finalement organisée autour des grandes distinctions de géométrie métrique, affine, projective.

En outre, et c'est très important, nous voulons concourir à l'éducation générale de l'esprit de l'enfant, et même de son caractère.

I. — Il me semble essentiel, avant tout enseignement déductif de la géométrie, d'assurer un état suffisant de la préaxiomatisation inconsciente et du vocabulaire correspondant. Nos élèves nous arrivent, à ce point de vue, dans des états si étrangement divers qu'il faut peut-être y voir une des difficultés de notre enseignement. Ne serait-ce pas par ce facteur qu'agirait l'influence bien connue du milieu familial ? Je pense qu'il serait indispensable d'assurer, au cours d'une année préparatoire qui serait par exemple notre Cinquième, la solidité et la richesse du schéma descriptif qui est le fruit de la géométrie expérimentale et en même temps de former et préciser le vocabulaire descriptif adéquat. Le professeur de mathématiques est certainement le seul qualifié pour cette tâche, surtout si l'on ne peut arriver à coordonner le vocabulaire mathématique avec ceux, si différents, des professeurs de dessin, de gymnastique, de travaux manuels, sans parler des professeurs de langues, française, anciennes ou étrangère vivantes.

Mais il serait illusoire de prétendre imposer un mot précis avant que la schématisation inconsciente n'ait agi pour former le concept, et c'est ce travail qu'il nous faut provoquer. Naturellement, les moyens sont : l'observation des objets physiques en vue de leur description, l'usage d'instruments de toutes sortes pour le dessin, le pliage, le découpage... En somme, le matériel du jardin d'enfants ? Peut-être, mais utilisé dans un but précis : achever la formation prélogique.

Les instruments les plus variés pourraient être étudiés : règles à un ou deux bords, équerres justes ou fausses, fixes ou glissantes ; pliages des différents types, appareils articulés, ficelles tendues, etc... Mépriserons-nous ces instruments et les rejeterons-nous hors de la géométrie, alors qu'ils ont été étudiés par tous les grands géomètres de Dinostrate et Nicomède à Poncelet et Hilbert ? (Cf. les « Leçons sur les constructions géométriques », de M. LEBESGUE, 1<sup>re</sup> partie). Ces instruments seront utilisés pour créer librement des figures, les copier, les déformer suivant certaines lois à découvrir, ou bien qui sont imposées d'avance ? La langue associée doit permettre de décrire, sans ambiguïté et correctement, la structure de la figure, le fonctionnement des instruments et les opérations à effectuer pour les constructions.

Quel travail à entreprendre ! Distinguer les mots voisins tels que : milieu, moitié, moyen, médiane ; les ronds et les cercles, les carreaux plus ou moins longs et les parallélogrammes, rectangles, carrés ; les figures pareilles, égales, semblables, etc...

Remarquons bien qu'il ne s'agit nullement ici de donner des définitions logiques des figures géométriques, puisque ceci n'a de sens que dans une axiomatisation, mais de donner une connaissance globale et distincte des figures et de leurs éléments. Par exemple, on ne définit pas, à ce stade, un rectangle, pas plus qu'arbre ou chien, mais on peut définir une diagonale d'un polygone.

Objectera-t-on qu'une telle étude préliminaire rendra plus difficile l'enseignement ultérieur ? Il faut voir la réalité sans hypocrisie : c'est un fait que l'enfant pense à des segments parallèles en découpant des bandes de papier

et qu'il construit des carrés pour faire des cocottes. Et c'est bien heureux ! Car qui croira qu'il nous suffirait plus tard de prononcer une phrase de définition pour que l'enfant puisse raisonner à partir d'elle sans y mettre un contenu intuitif ? Faisons l'expérience sur nous-même, en étudiant, par exemple, si nous ne connaissons pas ces questions, des chapitres pourtant bien simples d'algèbre, tels que les notions d'anneau ou d'idéal. Sans chercher un exemple si loin, après avoir donné une définition si particulière de la tangente, à quoi pensons-nous donc, étudiant la puissance d'un point par rapport à un cercle ou un théorème de Poncelet sur une conique, lorsque nous faisons tourner la droite autour d'un point extérieur ? Pensons aussi à la faute grossière commise dans certains manuels qui laissent croire que le fait d'avoir dénommé « aire » une certaine limite d'aires de polygones est suffisant pour que l'on puisse attribuer à cette limite les propriétés habituelles des aires (Voir « Sur la mesure des grandeurs », de M. LEBESGUE). Erreur ou hypocrisie ?

Je crois que la bonne méthode ne consiste pas à ignorer le continu intuitif de la pensée de nos élèves, ni à faire semblant de l'ignorer pour ne pas en tenir compte, ni à leur interdire d'y faire allusion. Au contraire, la franchise doit régner, et puisque, au stade logique, il faudra bâtir une construction déductive sur cette base intuitive, il faut assurer la solidité de celle-ci.

Seulement, quelques précautions, toutes particulières à ce stade, sont à prendre, que le professeur, averti des exigences de la logique, sentira sans peine. Par exemple, l'enfant a l'intuition des segments parallèles, mais cela ne signifie pas qu'il a la notion de droites indéfinies, parallèles, ou non : il s'agit d'une notion d'ordre pratique. De même, il peut arriver que l'enfant, par pliage par exemple, découvre que la somme des angles d'un triangle vaut à peu près un plat (et comment espérer qu'il n'ait jamais entendu formuler cette conclusion ?). Qu'importe ! Connaissance pratique ! Si le maître n'use pas du prestige de l'adulte pour lui imposer une affirmation générale prématurée, sera-t-il difficile, le moment venu, de faire comprendre à l'enfant la place de cette affirmation parmi les vérités démontrées ? En somme, il faudrait éviter toute affirmation générale qui dépasse l'expérience et que l'enfant croira sur parole, et cependant laisser se construire un schéma pratiquement et sommairement fidèle du monde des figures.

Pourrait-on maintenant préciser un peu les chapitres à explorer ? Sans essayer d'élaborer un programme, il me semble que l'on peut faire les suggestions suivantes : d'abord, faire acquérir la notion d'angle à partir de la notion de pointe, de coin. Qu'un nombre, mesure unique, suffise pour déterminer un angle, cela n'a rien d'évident. La mesure d'une longueur rectiligne est au contraire d'expérience courante, et celle des surfaces simples à l'aide des carrelages et découpages n'est pas difficile à préciser. Occasion naturellement de faire des exercices d'arithmétique.

Proche de la notion d'angle, est celle de direction d'une courbe et de tangente. Notre collègue Bouchat signalait récemment la découverte, par ses jeunes élèves, de la solution d'un problème de construction où une circonférence devait se raccorder à un segment de droite. L'enfant faisait

varier le cercle suivant une loi définie et ne découvrirait naturellement pas la définition moderne de la tangente, mais il élaborait une notion qui, en se précisant, deviendra la notion de limite. Que serait la belle phrase qu'il apprendra plus tard sans le sens intuitif de la tangente, sinon une définition toute gratuite ? Retenons que les constructions utilisant le raccordement seront fécondes en observations utiles.

La topologie combinatoire est aussi une source de remarques intéressantes et utiles. Combien d'élèves connaissent le nombre de régions déterminées par trois droites du plan, sans même parler de trois ou quatre plans ? Et les deux dispositions d'un quadrangle, figure à quatre sommets et six côtés ? (Les dénombrements sont naturellement aussi une mine d'exercices pour l'étude des nombres entiers).

Peut-être ne serait-il pas trop tôt pour parler un peu de l'infini. Les enfants s'en sont déjà inquiétés à cet âge. Le choc initial, resté en général secret, a été si soudain que l'enfant se souvient souvent de ce qui l'a provoqué : infini dénombrable, ou bien sentiment que le temps, est peut-être infini dans le passé. Le mot « infini », ou « illimité » est craint. On préfère « autant qu'on veut ».

En étudiant les conditions de détermination des dessins, on est amené à introduire les idées essentielles du nombre de paramètres dont dépend une figure, soit en position, soit à un déplacement près. On se rendra compte que la position d'une figure plane indéformable est déterminée par la position de deux de ses points (ce qui sera plus tard un axiome de la géométrie euclidienne). Toutes ces précisions sont un acheminement vers la distinction entre hypothèse et conclusion, et vers la notion que la liberté de définition d'une figure est assujettie à certaines limitations, qu'il y a un déterminisme imposé par la structure de l'espace. Quelle préparation pour l'étude ultérieure des lieux géométriques ! Enfin, par l'obligation de préciser les « demandes », l'enfant pourrait acquérir, non seulement la notion de la classification des formes, mais encore celle de discussion : cas particuliers, d'exception, d'impossibilité ; conditions suffisantes, surabondantes. incompatibles, incohérentes.

La relation du particulier et du général doit aussi être précisée. Le manie-ment d'un parallélogramme articulé montre bien qu'un rectangle devient un parallélogramme si un angle est libre de varier, et qu'un parallélogramme devient un rectangle si un angle devient droit. La question n'est pas de savoir lequel est antérieur, mais de mettre en évidence les classes d'extensions diverses, s'incluant les unes les autres. Ceci est acquis par l'étude du nombre de paramètres dont dépend la figure. La transivité de l'inclusion prépare à l'emploi des syllogismes.

Toute cette étude expérimentale est aussi un acheminement vers la conception d'un espace isotrope par opposition à un espace orienté autour de la verticale. Comme le fait observer notre collègue M. Fouché, la notion de verticale est remplacée en géométrie plane, par la trace, sur le plan du dessin, du plan de symétrie du corps humain ; concevoir l'espace comme isotrope, c'est donc affranchir de cette symétrie, ou du moins, concevoir cet affranchissement.

Avec la possibilité d'attacher des nombres aux longueurs, aux surfaces, s'introduit avec précision la notion de similitude. Le théorème de Thalès, dans les cas simples, est absolument clair pour des enfants de onze ans (je l'ai constaté en Sixième), si, naturellement, on n'essaye pas de le déduire d'une définition abstraite préalable des rapports ! Au contraire, plus tard, c'est le théorème de Thalès qui éclairera la notion du rapport.

Quoi encore ? Le théorème de Pythagore par les aires ? La trigonométrie des angles aigus. On arrive ainsi à la géométrie de l'apprenti, du travailleur manuel... Mais, professeur de Lycée ou de Collège français, nous sentons en général qu'il faut résolument s'arrêter dans cette direction. Retenons seulement, qu'un vaste champ est le domaine de la formation pré-géométrique, qu'il faut consacrer du temps et des soins éclairés au cours de séances de travaux pratiques sous la direction de maîtres particulièrement compétents, capables de diriger et d'utiliser les réactions des enfants.

Si l'acquisition d'un vaste ensemble de connaissances intuitives utilisables pratiquement n'est pas le but essentiel de l'enseignement dans les Lycées, il faut, sans plus tarder, changer de méthode.

II. — Le but réel de l'enseignement des mathématiques à des enfants qui, pour une grande part, n'en feront aucun usage plus tard, est de constituer les cadres d'une pensée logique et d'initier au vocabulaire correspondant. Les faits géométriques sont les plus simples qui peuvent constituer un matériel abstrait sur lequel une pensée formalisée travaille en se distinguant d'une pensée purement intuitive, ou partiellement sentimentale ou mystique. C'est donc vers une libération de l'esprit par un effort d'honnêteté que nous tendons. On peut aussi noter, d'un point de vue tout différent qui mériterait une étude spéciale, un aspect social de la question : le non spécialiste doit pouvoir comprendre, au moins partiellement, l'esprit de la vraie science, vivante et puissante, que le grand public ne peut plus ignorer entièrement ; faute de quoi la masse se sentirait esclave d'une petite caste d'initiés dangereux. C'est pourquoi, l'apport, quelque riche qu'il soit, de la géométrie expérimentale, nous semblerait de peu de valeur pour la culture générale, si elle n'était pas la meilleure préparation, la seule peut-être pour certains esprits, au raisonnement déductif.

Il serait déjà bien précieux, au moment où nous nous efforçons de progresser sur le plan logique, de ne pas être continuellement gênés par une insuffisance de connaissance de l'espace physique et du vocabulaire adéquat, mais l'utilité du travail préliminaire peut apparaître comme bien plus profond. Pour la mettre en évidence, suivons le début du livre de M. FAVARD, « Espace et dimension » : « Je vais d'abord essayer de dire rapidement quelles sont les données sensibles qui contribuent à la formation de la notion d'espace. Dans le reste du chapitre, nous développerons les différentes démarches de l'esprit qui, de là, ont conduit à la notion d'espace familière à tous ceux qui ont quelque connaissance de la géométrie. Il doit être entendu que toutes les remarques sont relatives à des faits d'expérience et que, nulle part, on ne doit y voir, ni un embryon de raisonnement, ni un essai de déduction... La mise en ordre de nos sensations et

leur intégration dans un schéma logique, fruit de notre esprit, nous a conduit à dégager, des résultats des expériences les plus familières, certains cadres : Le principe d'identité, principe de ma pensée dont l'affirmation est en dehors de cette expérience ; la notion d'ordre et de transivité. La notion de distances et leur addition commutative et associative, l'ensemble archimédique et infini de ces distances ; l'inégalité triangulaire impliquée dans la notion de distance ; l'axiome de Pasch (sur la disposition des points d'intersection de trois droites) ; la notion d'angle, invariant d'un système de deux droites... » N'est-ce pas le programme même que nous cherchions pour le stade prélogique ?

Mais, revenons au livre déjà cité de M. Gonseth : « Tout objet est identique à lui-même. C'est le principe d'identité. Tout objet est ou n'est pas. C'est le principe du tiers exclu. Un objet ne peut pas à la fois être et ne pas être. C'est le principe de contradiction. » Ces objets, dont nous parlons maintenant, quels sont-ils ? Ce sont déjà les objets abstraits, les objets logiques. En complément (et en réaction) du processus d'abstraction une phase nouvelle de l'élaboration des concepts introduits des symboles : « La pensée revient en arrière et se cherche une nouvelle réalisation concrète. » La lettre A, par exemple, est « une réalisation assez satisfaisante d'un objet quelconque ». Finalement, « de même que l'intuition de l'espace est le terme d'une abstraction préaxiomatique, les règles intuitives de la logique et du bon sens, ne sont, *pour une part*, que l'aboutissement d'une schématisation à partir du monde des objets concrets ». Nous voici donc en pleine phase de transition.

Et « *l'autre part* » des règles de la logique ? Elle est relative aux idées de jugement et de vérité. A la primitive idée de vérité « *conditionnée*, forte dans un certain domaine d'application », il faudra substituer l'idée de vérité « *inconditionnelle* », de vérité logique, concept « *abstrait par axiomatisation*, dont l'emploi n'est fixé, en définitive, que par une certaine pratique ». Et ce sera la tâche de l'étude de géométrie déductive.

Il est certain que les enfants aspireront tous plus ou moins à compléter la géométrie expérimentale par une géométrie plus théorique. D'une part, il y a un désir de règles infaillibles et mécaniques qui évitent des tâtonnements et qui constituent une économie de pensée. (L'arithmétique du calcul en a donné le modèle). D'autre part, les enfants d'une douzaine d'années ont un besoin de généralisation, un soupçon de la permanence de certaines lois, et les questions se multiplieront : « Est-on certain d'obtenir toujours la figure convenable en faisant... Obtient-on exactement la bissectrice en... Une ligne brisée régulière finira-t-elle toujours par se fermer ?... Les côtés sont-ils vraiment égaux ? » Ces mots : toujours, vraiment, exactement, sont révélateurs. D'autre part, de nombreux problèmes de construction que le travail soulèvera n'ont pas de solution immédiate et une étude théorique apparaît comme nécessaire. Certains enfants auront le désir de définitions verbales, d'autres, en conquérant progressivement tout le plan, introduisent l'infini. Le besoin de dépasser l'expérience devient impérieux : c'est le moment de commencer l'initiation à la géométrie déductive.

Il faut avouer que les différences apparaissent énormes d'un enfant à l'autre. Mieux sans doute que tous les tests un peu artificiels, les réactions des enfants à cette période de transition sont révélatrices de leur nature d'esprit et de leurs dons prédominants.

On pourrait peut-être caractériser les méthodes d'enseignement durant cette période, par le remplacement du travail pratique de dessin par le dessin mental, la construction de la figure par vision intérieure. L'expérience prouve que l'exercice permet d'atteindre, dans ce domaine, des résultats étonnants. Je crois qu'un tel entraînement est essentiel, car c'est sur une figure conçue d'après sa définition que l'on raisonne, et non pas sur une figure dessinée.

L'autre aspect du travail à ce moment sera la création d'un cahier personnel de géométrie expérimentale, où seront codifiés les résultats obtenus, rédigés selon les besoins de chacun. Du reste, cela ne signifie pas l'abandon irréalisable de l'enseignement en commun : les élèves sont intéressés par les idées de leurs camarades. Il est toujours instructif de voir la réaction de la classe lorsqu'on demande : « Trouvez-vous que ceci mérite d'être mis dans le cahier ? » Le rôle essentiel du professeur, plus encore qu'au premier stade, serait de contrôler la direction générale de l'étude tout en profitant des suggestions des élèves dans les périodes heureuses, de proposer les sujets d'étude dans les jours mornes où personne n'a d'idées, d'organiser la discussion générale dans la recherche, et surtout d'enseigner comment on rédige et comment on dispose un cahier de géométrie.

Il faut, du reste, je crois, considérer que cette période de transition n'est pas vraiment distincte chronologiquement de la précédente et de la suivante. Elle représente seulement les moments du travail le plus abstrait de la période pré-géométrique, et les moments du travail le plus concret de la période déductive dont nous allons maintenant dire quelques mots.

III. — Quel est le niveau de nos élèves au point de vue logique au moment où ils vont commencer la géométrie déductive ? Il ne faut pas trop compter sur nos collègues pour nous le dire, si j'en juge par les réponses recueillies. Le professeur d'histoire dit qu'ils ne savent pas raisonner. (Par exemple, on prend comme cause d'une guerre un événement que l'on vient de placer à une date postérieure). Le professeur de latin répond que le raisonnement n'intervient vraiment dans cette discipline que lorsqu'on fait de la syntaxe, ce qui ne se présente guère avant la Troisième. Ainsi, c'est bien nous, professeurs de mathématiques, qui sommes chargés de l'initiation.

Il ne faut pas sous-estimer le pouvoir logique de nos élèves. On observe parfois des réactions d'une finesse et d'une profondeur étonnantes qui nous remplissent d'admiration et, plus souvent, nous étonnent et nous révèlent ce qui, dans la mentalité de nos élèves diffère de la nôtre, surtout si l'on compare, devant ces remarques inattendues, notre attitude à celle de la classe. Ce sont précisément ces expériences qui nous apprennent notre métier de professeur. Il serait bien instructif de faire un recueil de mots d'élèves : non pas un sottisier, mais une carte d'échantillons (nous en donnons quelques exemples en note). Ce qui ressort le plus nettement, c'est qu'il y a des

jours où l'on peut raisonner et d'autres pas (instabilité bien connue de l'attention chez l'enfant) et qu'il faut le laisser réagir en gestes et paroles sans craintes de moquerie ou de sanctions en cas d'erreurs.

Parlons seulement des bons jours. Les autres seront consacrés à la géométrie concrète. Il serait bien intéressant de savoir si la différence entre les enfants et nous est uniquement une question de degrés ou si c'est une question de nature. Par exemple, l'étonnement inquiet devant les premières affirmations obtenues par raisonnement par l'absurde (par exemple pour prouver que trois droites sont concourantes) provient-il seulement de la nouveauté ou d'une répugnance à employer le tiers exclu ? Par contre, c'est un vrai plaisir pour tous de constater sur un exemple (points équidistants de deux points donnés, par exemple) que le théorème contraire résulte du réciproque et que le réciproque du contraire résulte du théorème direct. C'est pourtant bien aussi un raisonnement par l'absurde ! On constate que le raisonnement par récurrence plaît bien et peut même être découvert avec un peu d'aide (par exemple pour la somme des angles d'un polygone). Mais que dire de la méfiance dès que « cela ne tombe pas juste » ? Est-ce seulement un résidu d'habitudes enfantines, une crainte de voir les calculs se compliquer ? Ou bien faut-il y voir, jusqu'à un certain point, une conception granulaire, pythagoricienne, de l'espace ? Est-il certain que nos élèves ont une intuition du continu ? Il semble bien parfois que la réponse est *non*.

Quoi qu'il en soit, notre tâche va être de montrer la possibilité de raisonnements déductifs en géométrie. Cela ne signifie évidemment pas que l'on va faire un exposé déductif de la géométrie ! Un exposé qui partirait de quoi, puisque nous n'énonçons pas les axiomes, et qui s'adresserait à qui, puisque les enfants ne savent pas encore raisonner ?

Je vois diverses notions à révéler : l'équivalence logique de deux énoncés. La possibilité de chaînes déductives. La possibilité de convergence de deux chaînes qui concourent à la formation d'une conclusion : l'obligation, dans l'expression verbale, d'exposer l'une après l'autre ces deux chaînes qui sont pensées simultanément, introduit ce petit mot réservé au logicien et entièrement ignoré des élèves : *or*.

La confiance dans les conclusions d'un raisonnement ne peut provenir que de l'habitude de la discussion et la recherche des cas d'exception. On s'aperçoit qu'après avoir cru plus ou moins nettement à l'évidence des propriétés (d'un parallélogramme, par exemple) déjà pratiquement connues, les élèves, surtout les moins doués, restent assez longtemps au stade du doute. Ayant compris qu'ils possèdent une vérité « conditionnée », ils sont lents à concevoir la possibilité d'une vérité « logique ». Comment ne pas les comprendre puisque la sagesse des peuples a formulé des proverbes tels que « toute règle a ses exceptions », et même, « l'exception confirme la règle » ! Ce refus est déjà un progrès sur l'acquiescement superficiel et obéissant. Pour dépasser ce stade, après toute démonstration faite sur une figure, objet de l'étude, dans le but de démontrer une propriété de celle-ci, il faut prendre cette démonstration elle-même comme objet d'étude pour en déterminer la portée et faire la discussion de sa validité. Il nous faut être

très sévères pour nous-mêmes, très sincères dans cet examen, si nous voulons donner à l'enfant confiance dans la logique. Et, par conséquent, il ne faut pas prétendre démontrer trop de choses !

Une remarque encore : en précisant les relations entre hypothèses et conclusions, on s'aperçoit (ce que l'enfant sent avec évidence) que toute proposition exacte a des réciproques exactes. Il ne faut pas demander : « La réciproque de ce théorème est-elle exacte ? », mais : « Comment énoncer une réciproque pour qu'elle soit exacte ? ».

Mais que comprendra notre cahier de « géométrie déductive » (pour adopter l'heureuse distinction proposée par M. GLAESER (Conf. du 16 octobre 1950) si le cahier de géométrie expérimentale comprend, comme je le propose, l'étude des angles, les trois cas d'égalité (le troisième à propos de l'emploi du compas) et naturellement l'inégalité triangulaire contenue dans la notion de distance ?

Passons en revue les principaux points, ou, pour mieux dire, carrefours de la forêt touffue dont nous explorons certaines parties.

Naturellement, il n'y a pas de « début » au cours de géométrie déductive dont nous parlons (classe de Quatrième). Surtout pas de pseudo-définitions inutiles et purement verbales en géométrie intuitive, insuffisantes en géométrie déductive. Nous commençons le cahier lorsque les enfants sentent qu'un raisonnement mérite d'être rédigé et conservé.

Premier chapitre : *Les angles*. Equivalence du résultat concernant les angles adjacents supplémentaires et celui qui concerne les angles opposés par le sommet. Quant à savoir lequel précède l'autre, ce n'est pas moi qui puis le dire, faute d'une axiomatique ! Chaque enfant a une opinion, considérant en général comme plus primitif l'égalité des angles opposés par le sommet. Qu'importe ? L'essentiel est la réversibilité du raisonnement.

Au cours de la révision, insister sur le fait qu'on utilise continuellement ce que l'on voit sur l'ordre de succession des demi-droites. On doit donc préciser dans les « demandes » le sens dans lequel les angles doivent être portés (angles compris entre 0 et 2 plats, sauf rares exceptions).

Deuxième chapitre : *Les triangles*. On codifie en des énoncés les résultats de la géométrie expérimentale sur les cas d'égalité. Seulement, ce qui est nouveau, c'est de dégager que, de ces trois hypothèses indépendantes et posées simultanément, on déduit une infinité de conclusions, tout élément ayant un homologue et lui étant égal. Quelques essais de réciproques montreront l'importance du nombre trois des hypothèses à choisir parmi les anciennes conclusions et fourniront les premières applications des trois cas classiques (noter que le cas douteux est accessible, puisque l'usage du compas est normal).

Triangles isocèles. Le mot éveille un contenu intuitif très riche. N'avons pas l'air de l'ignorer. Nous voulons montrer l'équivalence de deux hypothèses qui pourraient bien sembler indépendantes : égalité de deux côtés, égalité de deux angles. La question est donc de faire comprendre qu'il y a là quelque chose à démontrer, car la première réaction de la classe est de s'écrier : « Bien sûr, puisque le triangle est isocèle ! ». Mais laissons le

mot (que le maître s'est bien gardé de prononcer, car il n'a pas eu la maladresse de commencer par une définition). Il s'agit de savoir si le triangle a bien toutes les propriétés que nous exigeons pour dire, en conclusion : Nous appellerons ce triangle « isocèle ». Il est nécessaire, et l'expérience le prouve, très facile, de faire douter l'enfant (au moins quelques instants) de tout énoncé général par un appel à l'honnêteté, car il doit bien avouer que ses connaissances proviennent d'expériences faites sur des triangles de dimensions moyennes, de formes assez analogues, et aussi de phrases qu'il a entendues : avouons-lui que tout cela est certain sur le plan pratique, « sommairement fidèle », suivant l'expression de M. Gonseth. Nous ambitionnons maintenant davantage. Bien peu nous suivront la première fois dans notre exigence. C'est en raisonnant que l'on devient logicien !

Ayant obtenu de nombreuses conclusions de notre hypothèse unique, nous essayons les réciproques à une seule hypothèse. La simplicité du schéma logique, nous permet de faire le tableau des quatre propositions associées : directe, réciproque, contraire, réciproque du contraire. A la grande surprise de l'enfant, mis en goût par ce jeu, le mécanisme s'arrête après le quatrième énoncé. Nous faisons pour la première fois des raisonnements par l'absurde, dans des cas bien acceptés. Ceci amène sur les lèvres un sourire spécial, un peu ironique et méprisant... Méprisant envers qui ? Envers ceux qui doutent du tiers exclu ! Ce sourire est un des meilleurs tests que je connaisse pour diagnostiquer la possession des exigences de la logique classique.

Le tableau des quatre énoncés est prolongé, dans l'étude de la médiatrice, par des énoncés complémentaires caractérisant les deux régions (nous utilisons l'inégalité triangulaire). Tout est ainsi prêt pour le premier aspect des lieux géométriques : la droite, ensemble de points, et frontière. Mais ne prononçons pas encore ce mot, du reste si mal choisi : un seul exemple ne peut donner une notion générale.

Dans cette étude nous faisons des chaînes de raisonnement. On s'aperçoit que l'élève, livré à lui-même pour faire des exercices comprenant plusieurs questions, n'a pas la même confiance dans les conclusions qu'il a obtenues par la première question, que dans les hypothèses de l'énoncé qu'il a utilisé pour construire la figure. Ceci est tout à fait compréhensible de la part d'enfants qui n'ont pas encore de fortes raisons de croire à la certitude logique : c'est le passage dont nous avons parlé, des vérités conditionnées par les conditions d'application, aux vérités inconditionnelles. Combien d'élèves penseront encore au fond d'eux-mêmes : « Quand même, on ne peut pas savoir... » C'est l'expression même de ceux qui refusent les conclusions de la logique. Si nous obtenons la confiance et acceptons les réactions sincères, là encore nous jugeons le stade logique atteint par l'auditoire.

Troisième chapitre : *Les parallèles*. Je crois qu'il est essentiel d'obtenir par voie déductive au moins un résultat qui, de façon évidente, dépasse l'expérience. C'est pourquoi je démontre en Quatrième l'existence des parallèles à partir des cas d'égalité des triangles et de remarques topologiques. Il suffit d'avoir bien étudié la figure formée en prolongeant une médiane

d'une longueur égale à elle-même (ce qui a été le sujet d'exercices d'application du deuxième cas d'égalité des triangles, et ce que nous avons aussi utilisé pour l'étude de l'hypothèse : médiane-bissectrice confondues). Avec quelques remarques topologiques sur les régions traversées par la médiane on prouve que tout angle extérieur d'un triangle est supérieur à chacun des angles intérieurs non adjacents. Tout va bien et c'est facile. On a de longue date préparé son effet en soulignant, chaque fois que les élèves prononcent le mot de parallèles (ce qui est inévitable en plusieurs semaines quand on laisse les enfants avouer ce qu'ils pensent), que cette notion est d'ordre pratique, car personne n'a prolongé bien loin des segments de droites. Lorsqu'on examine alors la figure dessinée au tableau constituée par deux angles égaux dans la position que nous appellerons plus tard alternes-internes, et que nous cherchons le triangle, c'est un vrai coup de théâtre ! Mais il ne faut pas croire que la conclusion est dégagée immédiatement et le dialogue se fait plus pressant. Après tout, peut-on savoir ? On n'a pas été voir à quelques kilomètres ! Le raisonnement est compris, mais il faut le peser pas à pas. Est-ce bien *toujours vrai* ? Et si l'on prend un tout petit angle ? ou un très obtus ? La grandeur du résultat inquiète et écrase. Ce jour-là aussi, nous jugeons les enfants d'après leur émotion : un triangle n'est pas libre d'avoir un angle, etc... Nous sommes bien loin de la géométrie expérimentale !

Et, au cours suivant, c'est la grande leçon d'honnêteté : le postulat d'Euclide ! Non, lorsqu'une quarantaine d'élèves construisent des parallèles issues d'un point au moyen de plusieurs sécantes, sur leur papier et au tableau, il n'est pas si évident que ces parallèles sont confondues ! Et, précisément, nous venons de prendre confiance dans le pouvoir de la logique ! Quelle déception ! Un petit historique s'impose et nous tirons la grande leçon : Oui, il faut parfois admettre, mais à condition de le savoir et de l'avouer.

Il me semble que l'essentiel est fait alors et la suite ne présente plus de vraies difficultés. Dans l'étude des parallélogrammes, on fait comprendre la différence entre une définition suffisante et non surabondante, et la simple dénomination d'une figure globalement connue avec de nombreuses propriétés. Les figures sont naturellement classées d'après le nombre de paramètres dont elles dépendent.

Dans un dernier chapitre, cette même année, on étudie avec plaisir la circonférence, continuellement employée grâce au compas, mais bien sacrifiée. Il n'y a de vraies démonstrations que pour les angles inscrits.

Ainsi le cours comprend quelques énoncés essentiels et de nombreuses conséquences. Celles-ci : applications, exercices, apparaissent au hasard des inquiétudes et de l'imagination des élèves. Il faut les énoncer, chercher la solution avec les enfants en essayant de bon cœur les voies qu'ils proposent. L'expérience seule permet de pressentir laquelle sera la meilleure. On choisit la ou les solutions qui méritent d'être rédigées, ainsi que les énoncés qui méritent d'être appris par cœur pour servir ultérieurement. Naturellement, certains énoncés, en petit nombre, sont jugés par le maître indispensables dès cette première année, et il les propose au bon moment.

Tout à fait différents sont les problèmes de construction. Suivant l'expression de M. FRÉCHET (Entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 1938) : « L'étude du monde réel a engendré la mathématique ; la mathématique, après lui avoir dû sa naissance, doit sans cesse justifier sa propre existence en confirmant son adéquation aux faits réels par la vérification expérimentale des prédictions auxquelles elle parvient. » Bien souvent, c'est à la fin d'un tel travail d'application concrète qu'un élève s'écrie : « Ah ! j'ai compris ! » Cela prouve que cet élève est, au moins à cet instant, au stade prégéométrique et qu'il n'a pas compris ce que nous désirons. Mais les bons élèves sentent cela aussi bien que nous, et s'offrent avec véhémence pour redonner, en particulier ou collectivement, la démonstration et les remarques utiles sur de nouvelles figures. Le but est atteint lorsque l'on peut faire la démonstration, soit avec des mots sur la figure conçue par dessin mental, soit au contraire sans mots, avec de simples gestes, sur la figure dessinée au tableau. Mais ceci ne retire rien au plaisir de voir le résultat sur une belle figure dessinée avec soin et précision.

Plus tard (classe de Troisième), on montrera la possibilité de calculer les longueurs constructibles (nous avons abandonné depuis longtemps les ficelles tendues). C'est tout un aspect nouveau de la géométrie qu'il faut étroitement associer à l'algèbre. Il serait bien plus indiqué de faire la résolution de systèmes simples du premier et deuxième degrés que tenter, avec un succès douteux, des exercices gratuits sur des fractions rationnelles plus ou moins bizarres ! Il faut noter que le théorème de Thalès et la similitude sont bien plus accessibles que la géométrie sur la droite et, à mon avis, doivent précéder celle-ci.

Je voudrais dire encore quelques mots sur l'étude des si mal nommés « lieux géométriques ». (Voir dans Littré les 24 sens du mot lieu, dont aucun n'est le nôtre). (Voir aussi comment dans son livre déjà cité, M. FAVARD est obligé de passer d'un sens à l'autre à la page 72). Ne pourrait-on pas, par pitié pour les débutants, donner un nom nouveau à une notion si nouvelle ? Dire un *locus*, par exemple ?

L'enfant, même lorsqu'il a déjà fait un peu de géométrie, a la conception de figures globales. Un segment de droite, un triangle, une circonférence, ce sont des figures ; on peut en extraire des éléments tels que, points, angles, etc..., éléments auxquels on peut parfois attacher des nombres. Dans un problème où l'un des nombres qui sert à la définition de la figure est susceptible de varier, ou bien, reste arbitraire, la figure dépend d'un paramètre, ou bien, a un degré de liberté. Que peut-on dire des points de cette figure ? Certains sont déterminés ; d'autres non, mais ceux-ci ne peuvent en général pas être pris au hasard. Si l'on a parlé de *paramètre variable*, un point, qui dépend de ce paramètre, décrit une *trajectoire*. Si l'on a parlé de *degré de liberté*, le point qui n'est pas déterminé entièrement est arbitraire dans un ensemble. Si l'on considère la condition à laquelle doit satisfaire le point comme complémentaire des conditions opposées (égalité complémentaire des inégalités contraires), l'ensemble apparaît comme *fron-*

tière des deux régions. Le fait qu'une même courbe peut être définie de ces trois manières n'a rien d'évident pour l'enfant, et il nous faut mettre en évidence ces points de vue, qui donnent lieu à des études d'esprits différents. Mais les points de vue se complètent, et je suis persuadée que l'enfant n'est rassuré que lorsqu'il a vu la concordance des résultats obtenus par les différentes voies. C'est grâce à cette concordance que la question est élémentaire et que l'étude ne nécessite pas les précisions axiomatiques sur la définition des courbes qui permettent de dissocier les divers points de vue que nous avons énumérés.

C'est peut-être comme ensemble que se présente le premier lieu que l'on rencontre (médiatrice), mais la notion de frontière est, je crois, plus primitive, de sorte que c'est le théorème contraire, plutôt que la réciproque qui s'impose. En tout cas, nous obtenons l'adhésion entière en ne concluant qu'après avoir écrit le tableau complet des quatre propositions dont nous avons parlé. La phrase de conclusion contenant le mot « lieu » est un résumé de ce tableau. La phrase globale a un sens bien net, sans qu'il soit utile (au contraire) de donner une définition verbale du mot lieu. Ce mot doit être employé lorsque le tableau complet est démontré, pas avant.

Mais, dans la plupart des exercices, il s'agit de figures dépendant d'un paramètre, longueur ou angle. On fera donc varier ce paramètre dans un sens arbitraire, mais choisi, dans tout l'intervalle permis et l'on étudiera la trajectoire du point mobile. Je ne crois pas que l'introduction de la notion de temps, non mesuré, mais qui s'écoule, soit mauvaise. Comment donner la notion d'un paramètre variable autrement ? (C'est bien plus tard que nous donnerons un sens relatif à la notion de croissance d'une fonction, en étudiant les fonctions de fonctions). Au lieu de construire quelques points convenables pour la réalisation concrète, on construira les polygones articulés. Il n'est pas alors logique d'exiger des réciproques ; il suffit de s'assurer de la façon continue dont le point décrit son lieu et du sens du mouvement. La conclusion doit indiquer, non seulement l'arc décrit, mais s'il y a des allers et retours, de sorte que deux valeurs du paramètre donnent le même point ; puis on étudiera les dispositions particulières (droites devenues tangentes, points qui se confondent). Un peu de couleur pour distinguer les parties fixes des parties mobiles, quelques flèches rappelant le sens des mouvements et facilitant la rédaction, et l'étude devient accessible. Ce point de vue paraît de beaucoup le plus aisé (même à un niveau bien supérieur, l'introduction d'un paramètre variable, de préférence angulaire, est presque toujours favorable dans la recherche d'un lieu ou d'une enveloppe) ; en somme, cette méthode revient à n'introduire que des ensembles ordonnés, ce qui paraît prudent pour des débutants qui ont à peine la notion de l'infini actuel. (Naturellement, les lieux envisagés à ce point de vue seront associés, dans les problèmes, à l'étude de la variation des nombres — longueurs ou angles — qui varient, et à leur représentation graphique en accord avec le cours d'algèbre).

Nous arrêtons ici ces remarques. Au stade suivant, l'enseignement doit proposer une étude systématique des principaux faits mathématiques à par-

tir, sinon encore d'axiomes, du moins d'une base intuitive plus restreinte et mieux délimitée. Il faut peut-être attendre les résultats de la géométrie dans l'espace pour faire comprendre la grande distinction des propriétés métriques, affines, projectives. Peut-être, cependant, ces préoccupations pourraient-elles avoir déjà quelque influence sur l'enseignement au deuxième stade (classe de Seconde et Première).

En conclusion, je pense que l'enseignement au premier stade doit être orienté de façon à être une initiation à la logique. Autour de quelques points essentiels, c'est une exploration en tous sens de quelques domaines fondamentaux de la géométrie.

*Remarques d'élèves et simples notes :*

1. Paroles étranges de fillettes, bonnes en « lettres », mais pas en géométrie !

a) La deuxième droite est plus douce et plus régulière que la première.

b) On ne peut pas élever de A la perpendiculaire sur AM à cause du cercle qui est devant.

2. Quantitatif et qualitatif. La règle de signes est à l'étude pour un produit de plus que deux facteurs : le produit sera positif s'il y a une majorité de facteurs positifs... Protestation générale du reste.

3. En faisant seul le premier long problème de géométrie : Les hypothèses de la deuxième question, ce sont bien les conclusions de la première ?

4. Un brusque scrupule chez une bonne élève de Troisième : « Dans la résolution d'un système, a-t-on encore le droit de remplacer  $\frac{3}{6}$  par  $\frac{1}{2}$  ? »

5. Un cas remarquable (12 ans  $\frac{1}{2}$ , classe de Quatrième : Ne sait rien de plus que les autres élèves de cette classe) : On a découvert (méthode de M. Lebesgue), qu'après un nombre premier il y en a au moins un autre, puis un autre encore, etc... et je propose de conclure : « Il y a une infinité de nombres premiers. » Acceptation. Mais après la classe il me demande : « Les deux conclusions que l'on a écrites, est-ce exactement la même chose ? »

On a défini, pour que la construction soit immédiate, le trapèze isocèle comme ayant deux angles formés par la même base, égaux, ou, pour mieux expliquer, le nom, comme formant, par prolongement, un triangle isocèle. Cet élève remarque immédiatement : « Ce n'est pas la même chose ! Dans la première définition, on accepte le rectangle, et pas dans la deuxième. » On vient de finir l'étude des angles d'un parallélogramme ; pour obtenir l'énoncé, je dois fournir le mot qui leur manque : consécutif. On décide alors d'écrire la conclusion. Ce même élève objecte : « On ne peut pas encore ! On n'a pas écrit la définition du mot " consécutif " ! »

6. Une autre bonne élève du même âge : On a utilisé, dans l'étude des nombres premiers le produit des nombres colorés (c'est-à-dire premiers et étudiés). P. D... a, la première, l'idée d'ajouter *un* (chaque année cette idée s'impose). Mais, ensuite, P. D... remarque : « On aurait aussi bien pu retrancher un pour avoir ce qu'on cherche. »

7. Quelques phrases extraites du premier devoir où, au lieu d'étudier seulement une figure imposée, l'énoncé demande : Comment choisir l'angle

pour que l'on ait  $BD = CD$  ? (La réponse est  $100^\circ$ ). L'élève (5), dont on a vu les réponses logiques, mais qui manque un peu d'intuition des formes et qui ne soigne pas les figures : « Au point de vue du dessin, j'ai pu voir que la valeur convenable était peut-être  $80^\circ$ , mais je reconnais que je ne trouve pas, au point de vue raisonnement, un théorème capable de le prouver. »

F. D... : « J'admets, pour la suite, que l'angle vaut  $100^\circ$ , mais je ne peux pas le démontrer. »

F. A... (qui admet une valeur fautive et étudie correctement la figure correspondante) : « Mais je n'ai nullement obtenu  $BD = CD$ , loin de là ! »

Une des plus faibles élèves de cette classe de 45 élèves : « Ce qui me gêne un peu, c'est la manière convenable de tracer les bissectrices. »

8. Première étude des côtés d'un parallélogramme. M. A... s'écrie immédiatement : « Les côtés opposés sont égaux. » Silence. Je demande : « Etes-vous satisfaites ? »... Enfin, est-ce bien ou mal ? Je ne suis pas mécontente, moi... « Est-ce bien ? » (Hésitant) : « Oui. » « Est-ce mal ? » (Convaincu) : « Oui. » « Enfin, qu'en pensez-vous ? » Cri presque général : « Il faut le démontrer. » L'élève qui a parlé baisse la tête et rougit. Mais, après la classe, une des élèves qui n'a encore jamais réagi, vient demander : « Mais, vraiment, est-ce bien vrai pour tous les parallélogrammes ? » Elle ne croit pas encore aux vérités inconditionnelles de la logique.

Mlle L. FÉLIX,

*professeur au Lycée La Fontaine.*

### Les réciproques

Notre collègue POCHARD soulève, à propos d'une phrase de H. LEBESGUE, une question posée souvent par les élèves : Ayant établi une propriété, « faut-il faire la réciproque ? ».

Déjà, cet état d'esprit est fâcheux : on la fait, semble-t-il, quand on a le temps, quand le professeur est réputé grincheux ! Mais l'élève n'a-t-il pas eu parfois l'impression que son professeur lui faisait des réciproques parfaitement inutiles, et comme pour satisfaire à un rite ?

Les choses iraient mieux, je crois, si l'on cultivait un peu mieux la notion d'équivalence. Je profite de l'occasion pour défendre un point de vue qui m'est cher.

Bien que cette notion soit d'un commerce utile dans tous les domaines, on n'ose pas l'employer. Voici, par exemple, deux questions où se tient la cause de cette abstention :

- 1)  $x - 1 = 0$  et  $x^3 - 1 = 0$  sont-elles des équations équivalentes ?
- 2) Les diverses définitions des coniques sont-elles équivalentes ?

Si la réponse : « tantôt oui, tantôt non » reste évasive, on juge la notion impraticable. Mais c'est la condamner pour ce qui est au contraire une immense qualité : sa souplesse !

Que ne dit-on : « équivalence dans un domaine donné » ?

Si vous refusez que les deux équations signalées soient équivalentes jusqu'en Mathématiques Élémentaires, n'étudiez jamais avant les Spéciales l'intersection de deux cercles, car vous ne pouvez dire à vos élèves que deux cercles se coupent toujours en quatre points ! Et dans le même ordre d'idée, est-il choquant de dire :  $3x - 4 = 0$  n'a pas de solution dans le domaine des entiers ?

Lorsque le passage d'une propriété à une autre se fait avec le souci de regarder l'équivalence, la question de la réciproque ne se pose plus de façon artificielle, car il est de nombreux cas où l'équivalence est manifestement vraie, ou manifestement fausse ; hors ces cas extrêmes, la réciproque se pose comme pour satisfaire à la curiosité, à un besoin d'enquête complète.

On n'a pas voulu garder dans le libellé du programme de Mathématiques Élémentaires « équivalence des définitions des coniques ». Point de vue étroit, semble-t-il. Elles sont équivalentes dans un large domaine commun facile à préciser. Qu'un cercle n'ait pas de directrice, qu'une parabole n'ait pas de cercle directeur, sont des cas d'exception — mieux : cas limites — qui n'altèrent pas le résultat général.

L'équivalence se prête à un jeu de souplesse qui fait progresser les questions.

Equivalence *rétablie* : ex. :  $y = \sqrt{ax + b}$  n'équivaut pas à  $y^2 = ax + b$ , mais à

$$\begin{cases} y^2 = ax + b, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Equivalence *rompue* : élargissement du domaine, méthode d'extension. Ex. : en Élémentaires : les deux définitions des points conjugués par rapport à un cercle, la deuxième non équivalente à la première est conservée.

La méfiance traditionnelle à l'égard de l'usage de cette notion est d'autant moins explicable qu'on lit au programme de Troisième : « Condition nécessaire et suffisante, propriété caractéristique... ». Introduire « notion d'équivalence » faciliterait le débrouillage des sens de « nécessaire » et « suffisant » (que de difficultés ici, dues à la maladresse grammaticale de l'emploi de ces termes !).

L'idée précise, exposée par H. LEBESGUE dans sa note, ne borne pas son application à la géométrie analytique (une transformation identique effectuée sur  $f(x; y)$  donne deux définitions de la courbe  $f(x, y) = 0$ ). Nous l'appliquons exactement dans l'enseignement élémentaire.

Ainsi les points définis par  $MA^2 + MB^2 = k$  sont aussi les points définis par  $2OM^2 + 2OA^2$ , c'est-à-dire : sont les points d'un cercle, grâce à l'identité connue (la réciproque est absorbée dans l'équivalence évidente).

Autre exemple : les points communs à un plan P et à une sphère (O, R) sont définis par

$$\begin{cases} M \text{ dans } P, \\ OM = R, \end{cases}$$
 système qui équivaut à
 
$$\begin{cases} M \text{ dans } P, \\ HM^2 = R^2 - d^2, \end{cases}$$

(H projection de O sur P,  $OH = d$ ); d'où un cercle grâce à l'identité : théorème de Pythagore.

Dans ces deux exemples, l'équivalence a lieu.

Autre exemple : milieux  $M$  des cordes d'un cercle  $O$  issues d'un point  $A$ , entraîne  $\widehat{OMA} = 1$  droit, mais n'y équivaut pas si  $A$  est extérieur ; on rétablit l'équivalence par une *adjonction* :

$M$  point du lieu équivaut à  $\begin{cases} \widehat{OMA} = 1 \text{ droit,} \\ M \text{ intérieur,} \end{cases} \quad \text{d'où arc de cercle.}$

Tout passage d'une propriété à une autre, toute recherche d'un lieu, tout problème de construction doit être ainsi qualifié en spécifiant si l'équivalence a lieu.

L'idée de H. LEBESGUE s'applique en même temps à la définition des transformations : trace-t-on un cercle dans le plan ? Tout le plan acquiert aussitôt des qualités, des propriétés, une structure, par naissance d'une inversion par rapport à ce cercle. Y place-t-on deux vecteurs, une autre structure apparaît, qui est une similitude (directe ou inverse, il suffit qu'on le dise). En somme, le plan et l'espace n'existent que dès qu'on met quelque chose dedans (la comparaison « champ gravifique » est ingénieuse). Et cette idée est bonne pour nos élèves : habitués depuis l'enfance à manier un cercle ou quelques droites ils conçoivent difficilement en Mathématiques Élémentaires que l'on « transforme tout le plan ». Notons, pour terminer, que cette expression est d'ailleurs peu heureuse : tout d'abord on ne transforme rien, on donne une correspondance, on l'étudie, et c'est seulement là qu'on s'en sert pour transformer des objets du plan ou de l'espace.

J. SIROS,

*professeur au Lycée Lakanal.*

### **Sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère circonscrit à un cercle soit inscriptible**

Les problèmes donnés en 1950 à la deuxième partie du Baccalauréat à Strasbourg (juillet) et à Bordeaux (octobre) m'ont suggéré la démonstration suivante que je crois utile de signaler (elle n'est peut-être pas inédite), car nous ne saurions jamais trop insister, dans nos classes de Mathématiques, sur la notion d'angles orientés d'une droite avec une droite, ceci malgré les déboires — disons, plutôt, à cause des déboires — que nous éprouvons au début de l'année avec nos élèves.

Soit un quadrilatère  $ABCD$  circonscrit à un cercle,  $O$  le centre du cercle, et  $E, F, G, H$ , les points de contact respectifs des côtés  $AB, BC, CD, DA$  (ou plutôt de leurs supports). Pour que  $ABCD$  soit inscriptible, il faut et il suffit que l'on ait :

$(AB, AD) = (CB, CD) \pmod{\pi},$   
ou  $(OE, OH) = (OF, OG) \pmod{\pi}$  (perpendicularité),  
c'est-à-dire que les couples de droites  $OE, OG$  et  $OF, OH$ , soient antiparallèles. Comme les triangles  $OEG, OFH$  sont isocèles,  $EG$  donne, *en direction*, une bissectrice du premier couple et  $FH$  une bissectrice du second.

La condition cherchée devient donc le parallélisme ou la perpendicularité des droites EG et FH. D'où l'énoncé :

*Pour qu'un quadrilatère (convexe ou concave) circonscrit à un cercle soit inscriptible, il faut et il suffit que la droite qui joint les points de contact de deux côtés opposés (ou de leurs supports) soit parallèle ou perpendiculaire à la droite analogue concernant les deux autres côtés.*

R. ESTÈVE.

Au sujet de l'article *A propos des coordonnées célestes*, paru dans le n° 141, sous la signature de notre collègue DAUTREVAUX (Belfort), je ne saurais qu'approuver entièrement le point de vue de l'auteur, puisque c'est ainsi que nous l'entendons, mon collègue MITAULT et moi, dans l'ouvrage de *Cosmographie*, que nous avons fait paraître chez Istra en 1948.

R. ESTÈVE.

### A propos d'un problème de Baecalauréat

Il s'agit de l'hyperbole (H), d'excentricité 2, de foyer O, de directrice  $\Delta$ . On appelle A le sommet de (H) symétrique de O par rapport à  $\Delta$ . L'énoncé proposé aux candidats se terminait ainsi : « P étant un point quelconque de (H), on considère le cercle (C), de centre C, circonscrit au triangle OAP et on demande de démontrer l'égalité entre angles de droites  $(CO, CP) = \frac{2}{3}(CO, \Delta)$  et de déduire de cette égalité que (C) coupe (H), outre A, en trois points P, Q, R; sommets d'un triangle équilatéral. » On peut se demander :

1° le sens qu'il convient de donner au symbole  $\frac{2}{3}(CO, \Delta)$  ;

2° comment le fait que  $(CO, CQ)$  est connu fournira un seul point Q et non deux points diamétralement opposés ;

3° pourquoi, un calcul simple sur les angles de demi-droites permettant en fait d'obtenir le triangle équilatéral PQR, on a été amené à introduire dans l'égalité de l'énoncé des angles de droites.

Pour répondre à ces questions, on est conduit à reprendre la théorie de l'angle généralisé telle qu'elle est ordinairement présentée : définition, demi-droite mobile, différentes déterminations, orientation du plan et mesures algébriques de ces différentes déterminations. Symbole  $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \alpha + 2k\pi$  où  $\alpha$  est une détermination (1) quelconque, mais qui a été préalablement choisie et  $(\vec{OA}, \vec{OB})$  une détermination quelconque qui pourra être choisie ultérieurement.

Égalité :  $(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OC}, \vec{OD}) + 2k\pi$   $(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{OB}) + 2k\pi$ .

Ce sont des égalités algébriques qui contiennent chacune trois indétermi-

(1) Détermination est mis ici pour : mesure algébrique d'une détermination.

nés, le troisième est déterminé par le choix de deux autres, et cela, quel que soit le choix, parmi les valeurs *à priori* possibles, qui a été fait. Ces égalités ont aussi un sens géométrique : le déplacement plan qui fait correspondre  $\vec{OC}$  à  $\vec{OA}$  fait correspondre  $\vec{OD}$  à  $\vec{OB}$ , mais l'égalité géométrique s'écrirait  $(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OC}, \vec{OD})$ .

Formule de Chasles : Soient trois demi-droites  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  et  $\vec{OC}$ , on a établi, pour des déterminations choisies,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  de  $(\vec{OA}, \vec{OB})$ ,  $(\vec{OA}, \vec{OC})$  et  $(\vec{OC}, \vec{OB})$ , l'égalité algébrique  $\alpha = \beta + \gamma$ ,

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = \alpha + 2k_1\pi \quad (\vec{OA}, \vec{OC}) = \beta + 2k_2\pi \quad (\vec{OC}, \vec{OB}) = \gamma + 2k_3\pi.$$

Fixons  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  et soient  $(\vec{OA}, \vec{OB})_{k_1}$ ,  $(\vec{OA}, \vec{OC})_{k_2}$ ,  $(\vec{OC}, \vec{OB})_{k_3}$  les déterminations correspondantes, un calcul simple (et classique) permet d'écrire :

$$(1) \quad (\vec{OA}, \vec{OB})_{k_1} = (\vec{OA}, \vec{OC})_{k_2} + (\vec{OC}, \vec{OB})_{k_3} + 2k\pi$$

avec  $k = k_1 - k_2 - k_3$  (2).

L'égalité algébrique (1) est vérifiée si, et seulement si, l'égalité algébrique (2) l'est. Dans l'égalité algébrique (2), on peut choisir arbitrairement trois quelconques des quatre entiers indéterminés qui y figurent, le quatrième se trouve alors déterminé, comme dans les égalités précédentes. Nous écrivons aussi  $(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{OC}) + (\vec{OC}, \vec{OB}) + 2k\pi$ , égalité (1) bis.

Supposons maintenant que  $(\vec{OC}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{OC}) + 2k\pi$ , nous aurons :

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{OC}) + (\vec{OA}, \vec{OC}) + 2k\pi \quad (3) \text{ ter.}$$

Avec des déterminations choisies  $\alpha = 2\beta + n \cdot 2\pi$ ,  $n$  étant déterminé par le choix préalable de nos déterminations, un calcul analogue nous donne

$$(3) \quad (\vec{OA}, \vec{OB})_{k_1} = 2(\vec{OA}, \vec{OC})_{k_2} + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k = k_1 - 2k_2 + n \quad (4),$$

$n$  est fixé, il y a trois indéterminés  $k$ ,  $k_1$  et  $k_2$ , nous ne pouvons plus choisir arbitrairement les entiers  $k$  et  $k_1$  : il est nécessaire, et suffisant, que  $k - k_1 - n$  soit pair. Nous pourrions bien écrire

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{OA}, \vec{OC}) + 2k\pi \quad (3) \text{ bis}$$

avec les indéterminés, mais nous ne pourrions avoir l'égalité algébrique que si nous choisissons convenablement la détermination de  $(\vec{OA}, \vec{OB})$  et  $k$ . D'ailleurs ceci apparaît si nous écrivons  $2(\vec{OA}, \vec{OC}) = (\vec{OA}, \vec{OB}) + 2k\pi$ . Le premier membre, produit de nombres, est défini à  $4\pi$  près, le second, si  $(\vec{OA}, \vec{OB})$  et  $k$  sont arbitraires, donne un nombre algébrique défini à  $2\pi$  près, d'où la condition supplémentaire pour le choix simultané de la détermination de  $(\vec{OA}, \vec{OB})$  et de l'entier  $k$ . Au contraire, dans l'égalité (3) ter, qui, comme (1) bis, comporte quatre indéterminés, pas de restriction quant à leur choix.

On peut cependant, dans l'égalité (3) ter, remplacer

$$(\vec{OA}, \vec{OC}) + (\vec{OA}, \vec{OC}) \quad \text{par} \quad 2(\vec{OA}, \vec{OC})$$

(convention bien naturelle), mais alors

$2(\vec{OA}, \vec{OC}) = (\vec{OA}, \vec{OC}) + (\vec{OA}, \vec{OC}) = \beta + 2k_2\pi + \beta + 2k_3\pi = 2\beta + 2k\pi$   
 $2(\vec{OA}, \vec{OC})$  n'indique plus un produit de nombres.

Nous obtenons ainsi l'égalité (III)  $(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{OA}, \vec{OC}) + 2k\pi$ . Cette égalité ne diffère qu'en apparence de l'égalité (3) *ter*

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{OC}) + (\vec{OA}, \vec{OC}) + 2k\pi,$$

elle a ses quatre indéterminés, sans restriction ; au contraire, elle s'écrit exactement comme l'égalité (3) *bis*  $(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{CA}, \vec{OC}) + 2k\pi$ , mais ici il n'y a plus que trois indéterminés, avec restriction ; cette différence essentielle provient du fait que le symbole  $2(\vec{OA}, \vec{OC})$  désigne dans le premier cas le terme général d'une progression de raison  $2\pi$ , dans le second le terme général d'une progression de raison  $4\pi$ .

Recherche de la bissectrice : I. Soit un angle orienté  $(\vec{OA}, \vec{OB})$  donné. Considérons la demi-droite mobile qui balaye l'une quelconque, mais choisie, des déterminations de  $(\vec{OA}, \vec{OB})$ , de mesure algébrique  $\alpha + 2n\pi$ , si l'on arrête la demi-droite mobile à mi-parcours la mesure algébrique de l'angle balayé est  $\frac{\alpha + 2n\pi}{2} = \frac{\alpha}{2} + n\pi$  ; inversement, si une demi-droite, partie de  $\vec{OA}$ , est arrêtée après avoir balayé un angle de mesure algébrique  $\frac{\alpha}{2} + n\pi$  ( $n$  quelconque, mais choisi), puis qu'on lui fasse balayer encore un angle égal, elle aura balayé un angle de mesure algébrique  $(\frac{\alpha}{2} + n\pi) \times 2 = \alpha + 2n\pi$ , elle sera donc sur  $\vec{OB}$ .

Notre raisonnement suppose  $n$  choisi, à chaque détermination de  $(\vec{OA}, \vec{OB})$  il correspond une bissectrice  $\vec{OX}_n$  et nous connaissons une détermination particulière de  $(\vec{OA}, \vec{OX}_n)$ , nous pouvons donc écrire

$$(\vec{OA}, \vec{OX}_n) = \frac{\alpha}{2} + n\pi + 2k\pi.$$

Nous remarquons que  $(\vec{OA}, \vec{OX}_{n+2}) = (\vec{OA}, \vec{OX}_n) + 2k\pi$ , il ne subsiste en définitive que les bissectrices  $\vec{OX}_0$  et  $\vec{OX}_1$ .

II. Ce n'est point ainsi que l'on procède d'habitude. On dit : soit à déterminer une demi-droite qui fasse des angles égaux avec  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$ . Supposons qu'une telle demi-droite existe et soit  $\vec{OX}$  cette demi-droite, nous avons alors  $(\vec{OA}, \vec{OX}) = (\vec{OX}, \vec{OB}) + 2k\pi$ .

Or,  $(\vec{OX}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{OB}) - (\vec{OA}, \vec{OX}) + 2k\pi$ ,  
 par suite  $(\vec{OA}, \vec{OX}) + (\vec{OA}, \vec{OX}) = (\vec{OA}, \vec{OB}) + 2k\pi$ .

On remplace, ce qui paraît si naturel  $(\vec{OA}, \vec{OX}) + (\vec{OA}, \vec{OX})$ , par  $2(\vec{OA}, \vec{OX})$  où l'on entend (première erreur, d'après ce que nous avons

vu), produit par 2 d'une détermination quelconque de  $(\vec{OA}, \vec{OX})$ . On obtient ainsi, après division par 2 :  $(\vec{OA}, \vec{OX}) = \frac{\alpha}{2} + k\pi$  ( $\alpha$  choisi,  $k$  indéterminé), égalité qui, en vérité, n'a pas grand sens. On l'interprète en disant que cette égalité définit, non pas une demi-droite, mais deux demi-droites, suivant la parité de  $k$ , qui sont les bissectrices, si elles existent.

La deuxième erreur, qui se trouve rattraper la première, est que l'on applique à l'ensemble des deux demi-droites des conditions nécessaires qui sont vérifiées séparément par chacune d'elles. Je m'explique : on a cru établir que si une demi-droite  $\vec{OX}$  est bissectrice, on a nécessairement  $2(\vec{OA}, \vec{OX}) = \alpha + 2k\pi$ ,  $\alpha$  choisi,  $k$  indéterminé. On trouve deux solutions  $\vec{OX}_1$  et  $\vec{OX}_2$ , on devrait donc avoir :

$$2(\vec{OA}, \vec{OX}_1) \text{ et } 2(\vec{OA}, \vec{OX}_2) = \alpha + 2k\pi,$$

on se contente de :

$$2(\vec{OA}, \vec{OX}_1) \text{ ou } 2(\vec{OA}, \vec{OX}_2) = \alpha + 2k\pi.$$

Au contraire, nous avons bien, pour l'une et l'autre :

$$(\vec{OA}, \vec{OX}_1) + (\vec{OA}, \vec{OX}_1) = \alpha + 2k\pi \quad (\vec{OA}, \vec{OX}_2) + (\vec{OA}, \vec{OX}_2) = \alpha + 2k\pi.$$

On a remplacé le choix de deux déterminations d'une solution par le choix de l'une ou l'autre solution.

II *bis*. Le calcul est présenté quelquefois d'une façon légèrement différente. On part encore de l'égalité  $(\vec{OA}, \vec{OX}) = (\vec{OX}, \vec{OB}) + 2k\pi$ , mais on pose  $(\vec{OA}, \vec{OX}) = \varphi$ , on arrive à la condition  $2\varphi = \alpha + 2k\pi$ ,

ou bien  $\varphi$  est supposé être une détermination choisie de l'angle  $(\vec{OA}, \vec{OX})$  supposé exister et l'égalité indique alors qu'il existe une détermination de  $(\vec{OA}, \vec{OB})$  qui est égale à  $2\varphi$ , la condition est suffisante et on devrait terminer comme au I,

ou bien  $\varphi$  est une autre manière d'écrire  $(\vec{OA}, \vec{OX})$  et les critiques du II restent valables.

III. Le calcul peut, je crois, être mené correctement de la façon suivante :

1) Au sens de l'égalité (3) *bis* (produit de nombres).

On doit avoir (5)  $2(\vec{OA}, \vec{OX}) + 2h\pi = \alpha + 2k\pi$ , mais, restriction arithmétique :  $k - h$  doit avoir une parité déterminée, il doit donc être, soit pair, soit impair, on doit donc avoir :

$$\text{soit} \quad 2(\vec{OA}, \vec{OX}) = \alpha + 2\pi \cdot 2n = \alpha + 4n\pi,$$

$$\text{soit} \quad 2(\vec{OA}, \vec{OX}) = \alpha + 2\pi(2n + 1) = \alpha + 2\pi + 4n\pi.$$

D'où  $(\vec{OA}, \vec{OX}_1)$  et  $(\vec{OA}, \vec{OX}_2)$  et, pour les deux solutions l'égalité (5) est vérifiée.

2) Au sens de l'égalité III. Nous avons posé

$$2(\vec{OA}, \vec{OC}) = (\vec{OA}, \vec{OC}) + (\vec{OA}, \vec{OC}) = 2\beta + 2k\pi,$$

le quotient par 2 de  $2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$  n'est point ici  $(OA, OC)$ , c'est  $\beta + k\pi$ , c'est-à-dire le terme général de la progression obtenue en insérant un moyen entre chacun des termes de la progression  $\beta + 2k\pi$ .

La condition  $2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX}) = \alpha + 2k\pi$  signifie donc que la progression  $\frac{\alpha}{2} + k\pi$  est obtenue en insérant un moyen entre chaque terme de la progression  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX})$ , d'où les deux progressions nécessaires, d'où les deux solutions.

En résumé, nous avons vu apparaître de sérieuses difficultés dès que nous avons voulu définir un multiple d'un angle ; nous sommes devant l'alternative suivante : ou bien renoncer au produit dans le sens produit de deux nombres, ou bien adjoindre à nos égalités algébriques des conditions arithmétiques. Si nous songeons aussi aux difficultés impliquées par la seule égalité  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha + 2k\pi$  (où le nombre entier  $k$  ne figure pas au premier membre) et à la clarté apportée par la considération, non plus du terme général, mais de l'ensemble des termes de la progression, nous comprenons l'utilité, voire même la nécessité de définir et d'étudier ce que nous appellerons

### *Le calcul des progressions arithmétiques*

*Définitions.* — Dans tout ce qui suit nous appelons progression l'ensemble des termes d'une progression arithmétique indéfinie dans les deux sens. Symbole  $(a)$ , s'il y a lieu d'indiquer la raison  $r$ , nous écrirons  $(a)_r$ .

Nous supposons cet ensemble ordonné ; chaque terme se déduit du précédent en ajoutant  $r$ . Si on prend les termes de  $n$  en  $n$  on obtient un sous-ensemble qui est lui-même une progression que nous appellerons sous-progression d'ordre  $n$ . Symbole  $(a)_{nr}$ .

$(a)_r$  étant donné, il existe  $n$  sous-progressions  $(a)_{nr}$  ;  $(a)_r$  peut être regardé comme constitué par la réunion des  $n$  sous-progressions.

Inversement,  $(a)_r$  donné peut être considéré comme sous-progression d'ordre  $n$  de la progression obtenue en insérant  $(n-1)$  moyens entre deux termes consécutifs de  $(a)_r$ , nous appellerons sur-progression d'ordre  $n$  cette progression. Symbole  $(a)_{\frac{r}{n}}$ .

La progression initiale  $(a)_r$  est l'une des  $n$  sous-progressions d'ordre  $n$  de  $(a)_{\frac{r}{n}}$ , chacune d'elles admettant pour sur-progression d'ordre  $n$   $(a)_{\frac{r}{n}}$ .

De même  $(a)_r$  est la sur-progression d'ordre  $n$  de chacune des  $(a)_{nr}$ .

*Egalité.* — Nous dirons que deux progressions sont égales si elles sont constituées des mêmes termes et nous écrirons  $(a) = (b)$ .

Si deux progressions sont égales, leurs sous-progressions d'ordre  $n$  sont les mêmes, leurs sur-progressions d'ordre  $n$  sont égales.

*Addition.* — Etant donnés une progression  $(a)_r$  et un nombre  $\beta$ , si on ajoute le nombre  $\beta$  à chaque terme de  $(a)$ , on obtient tous les termes d'une

progression  $(c)$  et on n'obtient que cela. Nous dirons que la progression  $(c)$  est la somme de la progression  $(a)$  et du nombre  $\beta$ , nous écrirons

$$(c) = (a) + \beta ;$$

$(c)$  est, comme  $(a)$ , de raison  $r$ .

La progression  $(c)$  ne change pas si on remplace  $\beta$  par l'un quelconque des termes de la progression  $(b)$  admettant  $\beta$  pour l'un de ses termes et de raison  $r$ , nous dirons que  $(c)$  est la somme des progressions  $(a)$  et  $(b)$  et nous écrirons  $(c) = (a) + (b)$ , ce qui signifie que si  $\alpha$  est un terme de  $(a)$ ,  $\beta$  un terme de  $(b)$ ,  $\alpha + \beta$  est un terme de  $(c)$ , et que si  $\gamma$  est un terme de  $(c)$ , il existe un couple de termes  $\alpha, \beta$ , tel que  $\alpha + \beta = \gamma$  (il existe une infinité de tels couples). Nous pourrions écrire aussi :  $(c)_r = (a)_r + (b)_{nr}$ ,  $(b)_{nr}$  étant l'un des  $n$  sous-progressions d'ordre  $n$  de  $(b)_r$ .

Nous pourrions généraliser, définir la somme  $(a)_r + (b)_r + \dots + (l)_r$ , c'est une progression de raison  $r$  qui a pour terme  $\alpha + \beta + \dots + \lambda$ .

Tout ceci repose sur le lemme suivant : pour que deux nombres appartiennent à une même progression, il faut et il suffit qu'ils diffèrent d'un multiple entier de la raison.

*Multiplication naturelle.* — *Multiplication et division homothétiques :* Etant donnés une progression  $(a)_r$  et un nombre entier  $n$ , il est naturel d'appeler produit de la progression par l'entier la somme de  $n$  progressions égales à  $(a)$ . Symbole  $n(a)$ , raison  $r$ .

Si  $\alpha$  est un terme de  $(a)$ ,  $n\alpha$  est un terme de  $n(a)$ . Divisons par  $n$  chaque terme de  $n(a)$ , nous obtenons une progression qui contient tous les termes de  $(a)_r$  et qui a pour raison  $\frac{r}{n}$  ; c'est la sur-progression d'ordre  $n$  de  $(a)_r$ ,  $(a)_{\frac{r}{n}}$ . Nous appellerons division homothétique l'opération que nous venons de faire subir à  $n(a)$ . Etant donnés une progression  $(a)_r$  et un nombre entier  $n$ , nous appelons quotient homothétique de la progression par l'entier, la progression constituée par le quotient de chaque terme de  $(a)_r$  par l'entier  $n$  et produit homothétique, la progression constituée par le produit de chaque terme de  $(a)_r$  par l'entier  $n$ . Symboles  $\left(\frac{ar}{n}\right)$  ;  $(nar)$ .

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant : le quotient homothétique par  $n$  du produit naturel par  $n$  d'une progression donnée  $(a)_r$  est la sur-progression d'ordre  $n$  de  $(a)_r$  ; ou l'énoncé équivalent : le produit naturel par  $n$  d'une progression donnée  $(a)_r$  est le produit homothétique par  $n$  de la sur-progression d'ordre  $n$  de  $(a)_r$  ; et traduire ces deux énoncés

$$\text{par les deux identités : } \left[ \frac{n(a)_r}{n} \right] = (a)_{\frac{r}{n}} \quad n(a)_r = (na)_{\frac{r}{n}}.$$

*Division naturelle.* — C'est l'opération inverse de la multiplication naturelle. Etant donnés une progression  $(a)_r$  et un nombre entier  $n$ , s'il existe une progression  $(x)_r$ , telle que  $n(x)_r = (a)_r$ , nous dirons que  $(x)$  est le quotient naturel de la progression  $(a)$  par l'entier  $n$ . Symbole  $(x) = \frac{1}{n}(a)$ .

L'égalité  $n(x)_r = (a)_r$  peut s'écrire  $(n x \frac{r}{n}) = (a)_r$  ou  $(x) \frac{r}{n} = (\frac{ar}{n})$   
 $(\frac{ar}{n})$  est donc la sur-progression d'ordre  $n$  de  $(x)$ , autrement dit  $(x)$  est  
 une sous-progression d'ordre  $n$  de  $(\frac{ar}{n})$ .

**Théorème :** Etant donnés une progression  $(a)_r$  et un nombre entier  $n$ ,  
 il y a  $n$  progressions quotients naturels de  $(a)_r$  par  $n$  ; ces  $n$  progressions  
 sont les sous-progressions d'ordre  $n$  du quotient homothétique de  $(a)_r$  par  $n$ .

Si on remarque que les sous-progressions du quotient homothétique sont  
 les quotients homothétiques des sous-progressions, en d'autres termes que  
 « l'homothétie » conserve la relation progression, sous-progression, on  
 pourra donner à ce théorème la forme suivante : les  $n$  quotients naturels  
 d'une progression  $(a)_r$  par un entier  $n$  sont les quotients homothétiques  
 par  $n$  des  $n$  sous-progressions d'ordre  $n$  de  $(a)_r$ ,

ou encore : les produits homothétiques par  $n$  des  $n$  quotients naturels de  
 $(a)_r$  par  $n$  sont les sous-progressions d'ordre  $n$  de  $(a)_r$ .

*Propriétés des égalités.* — Nous appellerons progression nulle  $(O)_r$  une  
 progression qui contient le terme  $O$ . Deux progressions de même raison  
 seront dites opposées si leur somme est la progression nulle. Nous écrirons,  
 si  $(a)_r + (b)_r = (O)_r$ ,  $(b)_r = -(a)_r = (-a)_r$ . On pourra ajouter une  
 même progression ou un même nombre aux deux membres d'une égalité,  
 on pourra ajouter membre à membre deux ou plusieurs égalités, et par  
 conséquent multiplier naturellement par un même nombre entier. A noter  
 cette restriction : dans la suite de ces opérations, non seulement les deux  
 membres doivent rester des progressions de même raison, mais encore la  
 plus petite raison mise en jeu ne peut être modifiée par additions ou sous-  
 tractions. Ainsi, si on a  $(a)_r + (b)_{mr} = (a')_r + (b)_{mr}$ , on a  $(a)_r = (a')_r$  ;  
 mais si on a  $(b)_{mr} + (a)_r = (b')_{mr} + (a)_r$ , on n'a pas nécessairement  
 $(b)_{mr} = (b')_{mr}$ , mais seulement  $(b)_r = (b')_r$ . Notons ici que la somme de  
 deux progressions de raisons différentes n'est une progression que si les  
 deux raisons sont commensurables.

On pourra aussi multiplier ou diviser homothétiquement les deux mem-  
 bres d'une égalité par un même nombre entier. Notons ici que la multipli-  
 cation homothétique d'une progression par un entier peut être considérée  
 comme cas particulier d'une addition que nous qualifierons d'ordonnée (au  
 lieu d'ajouter un terme quelconque à un terme quelconque, on ajoute à un  
 terme quelconque un terme choisi : choisi de manière que la somme soit  
 définie à  $nr$  près).

Signalons, pour terminer, la distributivité du produit, naturel ou homo-  
 thétique, par rapport à l'addition. Par exemple, si l'on désigne par  
 $(x_1) \dots (x_n)$  le  $n$  quotients naturels de  $(a)_r$  donné par  $n$  entier donné. Si  
 $\alpha$  est un terme de  $(a)_r$ , on a  $(a)_r = \alpha + (O)_r$  ;

$$(x_1) = \frac{\alpha}{n} + (O)_r \quad (x_r) = \frac{\alpha}{n} + \frac{r}{n} + (O)_r \quad (x_n) = \frac{\alpha}{n} + \frac{(n-1)r}{n} + (O)_r$$

$$n(x_1) + n(x_2) = \dots = n(x_n) = \alpha + (O)_r = (a)_r ; \\ n(x_1) = \alpha + (O)_{nr}, \dots, (nx_n) = \alpha + (n-1)r + (O)_{nr}$$

ou encore, si l'on convient de représenter par  $\frac{1}{n}(a)$  la solution qui corres-

pond au terme  $\alpha$   $(x_1) = \frac{1}{n}(a)$ ,  $(x_2) = \frac{1}{n}(a) + \frac{r}{n}, \dots$ ,

$$(x_n) = \frac{1}{n}(a) + \frac{(n-1)r}{n} ; n(x_1) = n(x_2) = \dots = (a)_r$$

et  $(nx_1) = (a)_{nr}$ ,  $(nx_2) = (a)_{nr} + r, \dots$ ,  $(nx_n) = (a)_{nr} + (n-1)r$ .  
 $(a)_{nr}$  désignant la sous-progression d'ordre  $n$  de  $(a)_r$  qui contient le terme  $\alpha$ . On pourra éventuellement choisir pour  $\alpha$  le terme de  $(a)_r$  qui a la plus petite valeur absolue.

#### Application aux angles orientés

Angles de demi-droites :  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  représente symboliquement une progression de raison  $2\pi$ . Nous dirons que cette progression est la mesure de l'angle  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ .

L'égalité  $(OA, OB) = (\Delta, \Delta')$  est une égalité entre progressions, Comme il n'y a qu'un symbole pour l'angle et sa mesure, cette égalité est aussi une égalité géométrique, de même que  $AB = CD$  peut s'entendre aussi bien : ou superposabilité géométrique, ou égalité des mesures.

La formule de Chasles  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$  est égalité entre progressions, le second membre étant la progression somme de deux progressions (elle est établie dès que l'on a montré l'égalité algébrique pour des déterminations choisies). Elle peut aussi être considérée comme l'égalité de définition de la somme géométrique de deux angles orientés de demi-droites : la somme géométrique de deux angles orientés est un angle qui a comme côté origine le côté origine du premier angle et comme côté extrémité le côté extrémité d'un angle égal au second angle et dont le côté origine coïncide avec le côté extrémité du premier angle. Cas particulier, si  $\overrightarrow{OC}$  est la demi-droite opposée à  $\overrightarrow{OA}$   $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pi + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$ .

Angles de droites  $(OA, OB)$ , progression de raison  $\pi$ , mesure de l'angle orienté de droites non orientées  $(OA, OB)$ . L'égalité est aussi une égalité géométrique ; la formule de Chasles, égalité entre progressions, peut être aussi considérée comme une égalité géométrique définissant la somme géométrique de deux angles de droites.

*Sous-angles. Sur-angles.* — La mesure d'un angle de demi-droites est une progression de raison  $2\pi$ , pourrions-nous définir des angles ayant pour mesure une sous-progression d'ordre  $n$  ou la sur-progression d'ordre  $n$  ?

Soit un angle  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  donné, la sur-progression d'ordre 2 :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \frac{2\pi}{2} = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pi$$

est la mesure de l'angle  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  ou  $(OA, OB)$ . Nous dirons que l'angle

d'un axe et d'une droite, ou l'angle de deux droites est un sur-angle d'ordre 2.

Ceci peut être généralisé : nous appellerons  $n$ -axe un faisceau régulier de  $n$  axes. Soient deux demi-droites  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$  données ; le sur-angle d'ordre  $n$ , de mesure  $(\vec{OA}, \vec{OB}) \frac{2\pi}{n}$  est l'angle d'un axe et d'un  $n$ -axe :  $\vec{OB}_1, \vec{OB}_2, \dots, \vec{OB}_n$ , l'un des  $\vec{OB}_i$  étant confondu avec  $OB$ , ou l'angle de deux  $n$ -axes.

Soient une demi-droite  $\vec{OA}$  et un  $n$ -axe :  $\vec{OB}_1, \vec{OB}_2, \dots, \vec{OB}_n$ , donnés ; l'angle de cette demi-droite et du  $n$ -axe a pour mesure  $(\vec{OA}, \vec{OB})_{2n\pi}$ , les  $n$  sous-progressions d'ordre  $n$  correspondantes sont les mesures de  $n$  angles d'axes :  $(\vec{OA}, \vec{OB}_1)_{2\pi}, (\vec{OA}, \vec{OB}_2)_{2\pi}, \dots, (\vec{OA}, \vec{OB}_n)_{2\pi}$ . En définitive : angles de  $n$ -axes :  $(\vec{OA}, \vec{OB}) \frac{2\pi}{n}$ , progression de raison  $\frac{2\pi}{n}$ , mesure de l'an-

gle orienté qui amène l'un quelconque des  $\vec{OA}$  sur l'un quelconque des  $\vec{OB}_j$ . L'égalité est aussi une égalité géométrique et la formule de Chasles définit aussi la somme géométrique de deux angles orientés de  $n$ -axes.

Soit un angle  $(\vec{OA}, \vec{OB})$  donné, pour interpréter géométriquement  $(\vec{OA}, \vec{OB})_{2n\pi}$  ( $n$  entier donné), nous ferons appel à la signification concrète des différentes déterminations de l'angle  $(\vec{OA}, \vec{OB})_{2\pi}$ , à l'aide de la demi-droite mobile ; on peut imaginer que cette demi-droite engendre par son mouvement une infinité de feuillets plans superposés, de sorte que là où l'on ne voit qu'un point  $B$ , il y a en réalité une infinité de points  $B_1, B_2, \dots, B_k, \dots ; B_{-1}, B_{-2}, \dots, B_{-h}, \dots$ , chacun dans son feuillet. Une sous-progression  $(\vec{OA}, \vec{OB})_{2n\pi}$ , si on convient de donner le même indice à deux points  $B$  dont l'indice initial différerait de  $n$  est la mesure de l'un de ces  $n$  sous-angles  $(\vec{OA}, \vec{OB}_i)$ . On peut imaginer un dispositif où ces points  $B_i$  sont effectivement confondus : la demi-droite mobile « s'élève » à partir de  $\vec{OA}$  sur les  $n$  feuillets superposés, surface d'un seul tenant, elle coïncide ainsi successivement avec les  $n$  demi-droites  $OB_i$  (le point  $B_i$  dans le feuillet numéro  $i$ ), jusqu'à la demi-droite  $\vec{OA}$  du feuillet n°  $n$  ; là elle « retombe » dans le feuillet n° 1, puis elle balaye à nouveau les  $n$  feuillets dans le même sens et ainsi de suite. Voilà pour les déterminations, par exemple, positives. Pour les déterminations négatives, on partira, en « descendant » de la demi-droite  $\vec{OA}$  du feuillet  $n$ . La surdétermination de  $\vec{OB}$  peut être conférée à  $\vec{OA}$ , il suffit d'attribuer comme indices aux demi-droites  $\vec{OA}$  le numéro de leur feuillet. Une sous-progression  $(\vec{OA}, \vec{OB})_{2n\pi}$  est alors la mesure de l'un des angles  $(\vec{OA}_i, \vec{OB}_j)$  ainsi définis. Nous pourrions dire que  $\vec{OB}_i$  est un  $\frac{1}{n}$  axe et que un sous-angle d'ordre  $n$ , de mesure  $(\vec{OA}, \vec{OB})_{2n\pi}$  est l'angle de deux  $\frac{1}{n}$  axes.

Si l'on veut désigner l'une, choisie, des  $n$  sous-progressions, il pourra paraître naturel de donner le numéro 1 à celle qui contient la mesure de l'angle saillant, que l'on pourra supposer dans le feuillet n° 1 ; les  $n$  sous-progressions seront alors :

$$(\vec{OA}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi}, (\vec{OA}_1, \vec{OB})_{2n\pi} = (\vec{OA}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi} + 2\pi, \\ \dots, (\vec{OA}_1, \vec{OB}_n) = (\vec{OA}_1, \vec{OB}_1) + 2(n-1)\pi.$$

Revenons sur la notion de plan à  $n$  feuillets, nous voulons en donner une définition géométrique, indépendante du mouvement qui nous a aidé à l'imaginer. Tout d'abord, la « coupure » peut être pratiquée suivant une demi-droite quelconque, soit  $\vec{OX}$ , le premier feuillet commence à  $\vec{OX}_1$ , et finit à  $\vec{OX}_2$ , le  $n^{\text{me}}$  finit à  $\vec{OX}_{n+1}$ ,  $\vec{OX}_1$  et  $\vec{OX}_{n+1}$  sont confondus. Tous les angles  $(\vec{OA}_i, \vec{OA}_{i+j})_{2n\pi}$   $j$  constant sont égaux. On doit considérer que, après  $n$  vient 1, en d'autres termes on peut faire une permutation circulaire sur les indices 1, 2, 3, ...,  $n$ . Par exemple :

$$(\vec{OA}_n, \vec{OB}_1) = (\vec{OA}_1, \vec{OB}_2) ;$$

un  $\frac{1}{n}$  axe origine  $\vec{OA}_i$  étant choisi, un  $\frac{1}{n}$  axe est déterminé par sa mesure et à un  $n$ -axe  $\vec{OB}_j$  du feuillet correspond une mesure (progression de raison  $2n\pi$ ).

La formule de Chasles définit aussi la somme géométrique de deux angles orientés de  $1/n$ -axes, elle s'écrit :

$$(\vec{OA}_i, \vec{OC}_j)_{2n\pi} + (\vec{OC}_j, \vec{OB}_k)_{2n\pi} = (\vec{OA}_i, \vec{OB}_k)_{2n\pi}.$$

A titre d'application étudions la formule de Chasles pour des déterminations précisées (à  $2n\pi$ ). Nous prendrons les sous-angles correspondant à l'angle saillant.

Nous pouvons toujours écrire :

$$(\vec{OA}_1, \vec{OC}_1)_{2n\pi} + (\vec{OC}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi} = (\vec{OA}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi}.$$

Si  $(\vec{OA}_1, \vec{OC}_1)_{2n\pi}$  et  $(\vec{OC}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi}$  sont supposés correspondre aux angles saillants,  $A_1, B_1$  et  $C_1$ , avec une coupure convenablement choisie, peuvent être supposés dans le premier feuillet. Reste à déterminer si l'angle  $(\vec{OA}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi}$ , ou plutôt, si le point  $B_1$ , déterminé par notre égalité, coïncide avec le point  $B_i$  défini par l'égalité  $(\vec{OA}_1, \vec{OB}_i)_{2n\pi} = \text{angle saillant} + (O)_{2n\pi}$ .

S'il existe une droite  $OX$  telle que les trois demi-droites  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  soient dans un même demi-plan limité par  $OX$ , nous prenons comme coupure l'une des demi-droites  $\vec{OX}$ , alors  $i = 1$ .

Si toute droite passant par  $O$  laisse deux demi-droites  $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$  dans un demi-plan et la troisième dans l'autre, nous prenons comme coupure une demi-droite  $\vec{OX}$  telle que  $OX$  laisse  $\vec{OA}$  et  $\vec{OC}$  d'un côté et  $\vec{OB}$  de l'autre, et, de plus,  $\vec{OX}$  dans l'angle saillant  $(\vec{OA}, \vec{OB})$ .  $\vec{OA}_1, \vec{OC}_1, \vec{OB}_1$  sont dans le premier feuillet, mais celui-ci s'arrêtant à  $\vec{OX}_1$ , le point  $B$

correspondant à l'angle saillant  $(\vec{OA}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi}$  est dans le feuillet  $n$ . Donc  
 $(\vec{OA}_1, \vec{OC}_1)_{2n\pi} + (\vec{OC}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi} = (\vec{OA}_1, \vec{OB}_1)_{2n\pi} + (\vec{AB}_n, \vec{OB}_1)_{2n\pi}$   
 $(\vec{OB}_n, \vec{OB}_1)_{2n\pi} = (\vec{OB}_1, \vec{OB}_2)_{2n\pi}.$

D'où finalement  $(\vec{OA}_1, \vec{OC}_1)_{2n\pi} + (\vec{OC}_1, \vec{OB}_1) = (\vec{OA}_1, \vec{OB}_n)_{2n\pi} \pm 2\pi$ ,  
 suivant l'orientation positive choisie.

Nous allons maintenant donner quelques exemples : sur-angles et sous-angles peuvent être obtenus par multiplication ou division homothétiques :

$$(n. \vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{\Delta}, \vec{\Delta}')_{2n\pi} \quad \left( \frac{\vec{OA}, \vec{OB}}{n} \right) = (\vec{\Delta}, \vec{\Delta}')_{\frac{2\pi}{n}}; \text{ notons en particulier}$$

$$(2. OA, OB) = (\vec{\Delta}, \vec{\Delta}').$$

*Premier exemple :* Nous allons traiter le problème proposé au début :

Soit  $P''$  le symétrique de  $P$  par rapport à  $\Delta$ , l'égalité  $PP'' = PO$  permet  
 d'écrire  $(\vec{CO}, \vec{CP}) = (\vec{CP}, \vec{CP}'')$  ; soit  $\vec{\Delta}$  un axe porté par  $\Delta$

$$(\vec{CP}, \vec{CP}'') = 2(\vec{CP}, \vec{\Delta}) \text{ (multiplication naturelle)}$$

appliquons la formule de Chasles  $(\vec{CP}, \vec{\Delta}) = (\vec{CP}, \vec{CO}) + (\vec{CO}, \vec{\Delta})$ , multi-  
 plions par 2 (produit naturel) les deux membres de cette égalité

$$2(\vec{CP}, \vec{\Delta}) = 2(\vec{CP}, \vec{CO}) + 2(\vec{CO}, \vec{\Delta}).$$

Nous avons donc

$$(\vec{CO}, \vec{CP}) = (\vec{CP}, \vec{CP}'') = 2(\vec{CP}, \vec{\Delta}) = 2(\vec{CP}, \vec{CO}) + 2(\vec{CO}, \vec{\Delta}).$$

D'où  $(\vec{CO}, \vec{CP}) + 2(\vec{CO}, \vec{CP}) = 2(\vec{CO}, \vec{\Delta})$  et l'égalité demandée  
 $3(\vec{CO}, \vec{CP}) = 2(\vec{CO}, \vec{\Delta})$  (1), égalité où les produits indiqués sont des  
 produits naturels, et égalité équivalente à  $PP'' = PO$ . Notons que  
 $2(\vec{CO}, \vec{\Delta}) = (2. CO, \Delta)$ , produit homothétique au second membre.

$$\text{Divisons l'égalité (1) homothétiquement par 3 } (\vec{CO}, \vec{CP})_{\frac{2\pi}{3}} = \left( \frac{2. CO, \Delta}{3} \right)$$

ce qu'on peut traduire ainsi, pour qu'un point  $P$  de  $(C)$  soit sur  $(H)$ , il faut  
 et il suffit que le 3-axe  $\vec{CP}$  soit tel que le sur-angle d'ordre 3 :  $(\vec{CO}, \vec{CP})_{\frac{2\pi}{3}}$

$$\text{ait pour mesure } \left( \frac{2. CO, \Delta}{3} \right).$$

*Deuxième exemple :* Détermination des bissectrices d'un angle.

$2(\vec{OA}, \vec{OX}) = (\vec{OA}, \vec{OB})$ . Divisons homothétiquement par 2 :

$$(\vec{OA}, \vec{OX})_{\pi} \text{ ou } (OA, OX) = \left( \frac{\vec{OA}, \vec{OB}}{2} \right)$$

ce qui donne bien entendu deux solutions.

Mais nous savons aussi que le produit homothétique par 2 de chacun des  
 angles  $(\vec{OA}, \vec{OX})$  est une sous-progression d'ordre 2 de  $(\vec{OA}, \vec{OB})$

$$(2. \vec{OA}, \vec{OX}_1) = (OA, OB)_{4\pi} \quad (2. \vec{OA}, \vec{OX}_2) = (\vec{OA}, \vec{OB})_{4\pi} + 2\pi,$$

$$(\vec{OA}, \vec{OB})_{4\pi} \text{ désignant la sous-progression correspondant à l'angle saillant.}$$

*Application à une propriété du cercle :* Etant donné un cercle de centre O et deux points A et M de ce cercle, M' le point diamétralement opposé à M,  $\vec{MA}$  est bissectrice intérieure de  $(\vec{OA}, \vec{OM'})$ . Nous avons donc :

$$(2. \vec{MA}, \vec{OM'}) = (\vec{OA}, \vec{OM'})_{4\pi}, \quad (1)$$

et si B est aussi sur le cercle :  $(2. \vec{OM'}, \vec{MB}) = (\vec{OM'}, \vec{OB})_{4\pi}$ . (2)

$(\vec{MA}, \vec{OM'}) + (\vec{OM'}, \vec{MB}) = (\vec{MA}, \vec{MB})$ . Multiplions homothétiquement par 2 les deux membres de cette égalité :

$$(2. \vec{MA}, \vec{OM'}) + (2. \vec{OM'}, \vec{MB}) = (2. \vec{MA}, \vec{MB}).$$

D'autre part  $(\vec{OA}, \vec{OM'})_{4\pi} + (\vec{OM'}, \vec{OB})_{4\pi} = (\vec{OA}, \vec{OB})_{4\pi}$ , si M' n'est pas dans l'angle opposé par le sommet à l'angle saillant  $(\vec{OA}, \vec{OB})$ .

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si M est dans l'angle saillant  $(\vec{OA}, \vec{OB})$ , on a  $(\vec{OA}, \vec{OM'})_{4\pi} + (\vec{OM'}, \vec{OB})_{4\pi} = (\vec{OA}, \vec{OB})_{4\pi} + 2\pi$ .

Si  $\vec{OI}$  est la bissectrice intérieure de  $(\vec{OA}, \vec{OB})$

$$(2. \vec{OA}, \vec{OI}) = (\vec{OA}, \vec{OB})_{4\pi}.$$

Ajoutons membre à membre les égalités (1) et (2). Nous obtenons :

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } (2. \vec{MA}, \vec{MB}) = (2. \vec{OA}, \vec{OI}) ;$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas : } (2. \vec{MA}, \vec{MB}) = (2. \vec{OA}, \vec{OI}) + 2\pi.$$

Divisons homothétiquement par 2.

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } (\vec{MA}, \vec{MB}) = (\vec{OA}, \vec{OI}) ; \quad 2^{\text{e}} \text{ cas : } (\vec{MA}, \vec{MB}) = (\vec{OA}, \vec{OI}) + \pi.$$

G. DELPLA, professeur au Lycée de Foix.

### Sur la géométrie du cycle

par E. EHRHART, professeur agrégé au Lycée Kléber, Strasbourg

Il nous paraît utile de grouper quelques propriétés simples des cycles. Elles nous montreront, une fois de plus, le rôle de l'orientation : supprimer les difficultés provenant de l'existence de plusieurs cas de figure en ramenant la pluralité à l'unicité.

**DÉFINITIONS.** — En orientant un cercle on le transforme en *cycle*. Les tangentes orientées dans le sens du cycle sont ses *axes tangents*. Si le plan support est orienté, nous pouvons définir le *rayon algébrique* du cycle : c'est le nombre qui a pour valeur absolue la mesure du rayon du cercle, et qui est positif ou négatif suivant que le cycle et le plan orienté sont de même sens ou non.

**CYCLES TANGENTS.** — Deux cycles  $\vec{O}$ ,  $\vec{O}'$  sont dits tangents en un point commun A, s'ils ont en ce point même axe tangent. Nous dirons qu'ils sont tangents intérieurement, si leurs cercles supports le sont. La tangente est alors intérieure ou extérieure, suivant que les rayons sont de même signe ou non. On vérifie facilement que sur l'axe déduit de l'axe tangent commun par rotation de  $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$  autour de A, on a dans tous les cas

$\overline{OO'} = r' - r$ . Réciproquement, si, pour une orientation convenable de la ligne des centres  $\overline{OO'} = r' - r$ , les deux cycles sont tangents.

CYCLES HOMOTHÉTIQUES. — Par définition l'homothétique d'un axe est l'axe de même sens porté par l'homothétique de sa droite support. Si  $K$  est le rapport d'homothétie, à un vecteur  $\overrightarrow{AB}$  du premier axe correspond un vecteur  $\overrightarrow{A'B'}$  du second, tel que  $\overrightarrow{A'B'} = K\overrightarrow{AB}$ . L'homothétique d'un cycle donné  $\tilde{O}$  sera le cycle dont les axes tangents sont les homologues de ceux de  $\tilde{O}$ . Il résulte de cette définition, que ces cycles seront de même sens ou non, suivant que l'homothétie est directe ou inverse, et que l'on a toujours  $r' = Kr$  et  $\overrightarrow{A'B'} = K\overrightarrow{AB}$ , où  $\overline{AB}$  désigne la mesure algébrique sur  $\tilde{O}$  de l'arc orienté  $\overrightarrow{AB}$ . On remarquera que dans le cas de l'homothétie inverse, si un point décrit  $\tilde{O}$  dans son sens positif, son homologue décrit  $O'$  dans son sens négatif. On voit aussi que l'homothétie conserve aux points correspondants l'angle orienté de deux cycles ou d'un axe et d'un cycle.

Fait essentiel : deux cycles inégaux ( $r' \neq r$ ) sont toujours homothétiques d'une manière et d'une seule, puisqu'il existe sur la droite  $OO'$  un point et un seul, qui divise  $O'O$  dans le rapport  $\frac{r'}{r}$ . (Si les cycles ont même centre, c'est lui qui est le centre d'homothétie) (1).

Les centres d'homothétie de trois cycles pris deux à deux sont alignés, car des trois rapports  $\frac{r_1}{r_2}, \frac{r_2}{r_3}$  et  $\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3}$ , il y en a toujours zéro ou deux qui sont négatifs.

CYCLES INVERSES. — Etant donnés deux cycles de centre d'homothétie  $I$ , nous dirons qu'ils se correspondent dans l'inversion de centre  $I$  et de puissance  $K$  telle, que l'inversion  $(I, K)$  échange leurs cercles supports. Pour que cette inversion unique échangeant deux cycles donnés existe, il faut et il suffit qu'ils ne soient, ni tangents, ni égaux. Si  $K$  est positif, à un point  $M$  parcourant le cycle  $\tilde{C}$  dans son sens positif, correspond dans l'inversion un point  $M'$  parcourant le cycle  $\tilde{C'}$  dans son sens négatif, puisque le point homothétique  $M''$  le parcourt dans son sens positif.

Quel que soit le signe de  $K$ , les axes tangents en  $M$  et  $M''$  sont parallèles et de même sens. Donc les axes tangents en  $M$  et  $M'$  ont des directions symétriques par rapport à la droite  $IM$ . Il en résulte que l'inversion renverse le sens de l'angle orienté de deux cycles en des points homologues. En particulier l'inversion conserve la tangente de deux cycles. Une inversion qui conserve le cercle support d'un cycle conserve aussi son sens.

(1) Les sens de parcours dans le plan orienté de deux points homologues sur deux cercles homothétiques étant identiques, aussi bien dans l'homothétie directe que dans l'inverse, ils ne peuvent servir à définir l'homothétie unique de deux cycles donnés.

Si un cycle  $\tilde{\Gamma}$  est tangent à deux cycles  $\tilde{C}, \tilde{C}'$  donnés, la droite de contact passe par leur centre d'inversion (ou d'homothétie). On sait, en effet, que cette droite passe par l'un des centres I d'inversion des cercles C, C'. L'inversion de centre I, qui échange ces cercles, conserve le cercle  $\tilde{\Gamma}$  et donc  $\tilde{\Gamma}$ . Par suite, les cycles transformés de  $\tilde{C}$  et  $\tilde{C}'$  sont portés par C et C' et sont tangents à  $\tilde{\Gamma}$  : ce sont bien les cycles  $\tilde{C}', \tilde{C}$ . Remarquons que tout axe tangent commun à  $\tilde{C}, \tilde{C}'$  passe aussi par I.

Il résulte du précédent, que si deux cycles  $\tilde{\Gamma}, \tilde{\Gamma}'$  sont tangents à  $\tilde{C}, \tilde{C}'$ , leur axe radical passe par I, car ce point a même puissance par rapport à  $\tilde{\Gamma}$  et  $\tilde{\Gamma}'$ , égale à la puissance de l'inversion qui échange  $\tilde{C}, \tilde{C}'$ .

Orientons arbitrairement la droite passant par I et portant le diamètre AB de C. Sur cet axe nous avons

$$\overline{A'B'} = \overline{IB'} - \overline{IA'} = \frac{K}{\overline{IB}} - \frac{K}{\overline{IA}} = \frac{-K(\overline{IB} - \overline{IA})}{\overline{IA} \overline{IB}} = \frac{-K \cdot AB}{p},$$

où  $p$  désigne la puissance de I par rapport à C. D'où :  $|r'| = \left| \frac{rK}{p} \right|$ . Mais

on a aussi toujours  $r' = \frac{rK}{p}$ . En effet, si  $p$  et  $K$  sont positifs, cela est évident, et quand  $K$  ou  $p$  change de signe,  $r'$  en change également. Cette formule fournit en particulier aisément le sens du cycle inverse, sans recours à l'homothétie.

CYCLE INSCRIT A UN TRIAXE. — Le lieu des centres des cycles tangents à deux axes est la bissectrice extérieure de leur angle. Considérons trois axes quelconques  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ , se coupant en  $A(\vec{\beta}, \vec{\gamma}), B(\vec{\gamma}, \vec{\alpha}), C(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ . Il existe un cycle et un seul tangent aux trois axes. Son centre I est le point de concours des bissectrices extérieures des angles  $(\vec{\beta}, \vec{\gamma}), (\vec{\gamma}, \vec{\alpha}), (\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ . Nous l'appellerons « inscrit » au « triaxe  $\vec{\alpha}\vec{\beta}\vec{\gamma}$  ». Posons

$$\overline{BC} = a, \quad \overline{CA} = b, \quad \overline{AB} = c, \quad a + b + c = 2p.$$

Soient T, T', T'' les points de contact du cycle avec  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ . Nous allons montrer que, quelle que soit la disposition des axes donnés

$$\overline{AT''} = p - a, \quad \overline{BT} = p - b, \quad \overline{CT'} = p - c.$$

En effet, puisque I est sur la bissectrice extérieure de  $(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$ ,

$$\overline{AT''} = -\overline{AT'}; \text{ de même } \overline{BT} = -\overline{BT'}, \overline{CT'} = -\overline{CT''}.$$

$$\text{Donc } \overline{AT''} = \overline{BT''} - \overline{BA} = -\overline{BT'} + c,$$

$$-\overline{AT'} = -\overline{CT'} + \overline{CA} = \overline{CT''} + b,$$

$$\text{et par addition } 2\overline{AT''} = -\overline{BC} + b + c = -a + b + c.$$

On a bien  $\overline{AT''} = p - a$  et, par permutation circulaire,  $\overline{BT} = p - b$ ,  $\overline{CT'} = p - c$ .

Démontrons maintenant que l'on a *toujours*  $S = pr$ , où  $S$  désigne l'aire algébrique du triaxe, c'est-à-dire le nombre qui a pour valeur absolue la mesure de l'aire du triangle ABC, et qui est positif ou négatif suivant que le contour du triangle, décrit dans l'ordre ABC, est du sens du plan orienté ou non.

Posons  $\overline{HA} = h$ , la mesure algébrique de cette hauteur se faisant sur l'axe déduit de  $\vec{x}$  par rotation de  $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$  autour de son pied H. On a alors *toujours*  $S = \frac{ah}{2}$ , car cela est évident quand  $a$  et  $h$  sont positifs, et  $S$  change de signe quand  $a$  ou  $h$  en change. En appliquant cette formule au triangle IBC, on a  $S_{IBC} = \frac{ar}{2}$ , car  $\overline{TI}$ , mesuré sur l'axe déduit de  $\vec{x}$  par rotation de  $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$  autour de T, a le signe de  $r$  (positif si le sens du cycle est celui du plan orienté). On a de même  $S_{ICA} = \frac{br}{2}$ ,  $S_{IAB} = -\frac{cr}{2}$ . Comme d'après la formule de Moebius des aires algébriques on a toujours  $S_{IBC} + S_{ICA} + S_{IAB} = S_{ABC}$ , la relation  $S = pr$  est établie (1).

E. EHRLHART.

### Sur la puissance réduite

Les deux théorèmes suivants, relatifs à la puissance réduite, se démontrent aisément en utilisant une inversion de pôle O :

1) Soient une sphère  $\Sigma$  et un point O ; un cercle variable C passe en O et coupe  $\Sigma$  en deux points M et P sous un angle  $\varphi$ . Le nombre

$$P = \frac{OM \cdot OP \cdot \sin \varphi}{MP}$$

est indépendant du cercle C.

2) Soient un cercle  $\Gamma$  et un point O situé ou non dans le plan de  $\Gamma$  ; un cercle variable C passe en O et rencontre  $\Gamma$  en deux points M et P sous un angle  $\varphi$ .

Le nombre  $P = \frac{OM \cdot OP \cdot \sin \varphi}{MP}$  est indépendant du cercle C.

Ces deux théorèmes sont-ils connus ?

P. LANGLAMET,

professeur au Lycée Hoche.

(1) On reconnaît en  $BT = p - b$  et  $S = \frac{ah}{2} = pr$  des formules trigonométriques classiques. Dans *Le triangle orienté* (en vente chez l'auteur, prix : 150 fr.), nous démontrons que toute formule du triangle s'étend à un triaxe quelconque avec des conventions de signes convenables.

## Histoire des Mathématiques

### Monge et Desargues

Notre collègue, René TATON, après avoir publié, dans les suppléments à la Revue suisse de Mathématiques Élémentaires, une courte biographie de Gaspard Monge (Bâle, 1951), vient de faire paraître aux Presses Universitaires de France deux importants ouvrages : *L'Œuvre scientifique de Monge*, 441 pages, in-8°, et *L'Œuvre mathématique de G. Desargues*, textes publiés et commentés, avec une introduction biographique et historique, 229 pages, in-8°.

Par une anomalie de notre organisation universitaire, ces ouvrages qui demandaient, en plus de grandes qualités d'historien, un très solide bagage scientifique, ont valu à notre collègue, agrégé de Mathématiques, le grade de Docteur ès-Lettres.

Le XVII<sup>e</sup> siècle a vu la renaissance scientifique des deux siècles précédents aboutir à la constitution de la science moderne. Au point de vue plus purement mathématique sa première moitié est essentiellement occupée par une assimilation critique du savoir grec.

D'une part, inspirés par les progrès de l'Algèbre, et suivant les traces de Bombelli, Stevin et Viète, Fermat et Descartes repensent, en un style nouveau, l'analyse ancienne. Celle-ci, en géométrie, s'était construit tout un algorithme, portant directement sur les grandeurs géométriques, sans l'intermédiaire du nombre général, dont le concept n'était pas dégagé nettement dans l'antiquité. C'est à cette analyse que Zeuthen a donné le nom d'algèbre géométrique.

Les deux grands mathématiciens français traduisent cette analyse en une autre calquée sur les procédés algébriques du XVI<sup>e</sup> siècle, Fermat en suivant plus fidèlement Viète, Descartes plus influencé par Stevin, et, par l'intermédiaire de celui-ci, par Bombelli, ainsi d'ailleurs que par Kepler.

Le résultat est l'apparition, non pas précisément de notre géométrie analytique qui naît, comme le montre René Taton, dans l'entourage de Monge, mais d'une première « application de l'algèbre à la géométrie », cas particulier de ce grand phénomène de l'histoire de notre science : son arithmétisation progressive.

Alors que Descartes et Fermat traduisent dans une langue nouvelle les méthodes analytiques d'Apollonius, Girard Desargues leur fait subir une métamorphose différente et tout aussi importante. Il garde le langage technique des anciens, faisant d'ailleurs usage, non pas tant de l'algèbre géométrique d'Apollonius lui-même, que de celle utilisée par Ptolémée, fondée sur le théorème de Menelaos (I<sup>er</sup> siècle après J.-C.). Mais il aperçoit et met en relief le caractère projectif de ses méthodes. Il inaugure ainsi la méthode nouvelle de la géométrie : celle des transformations.

Bien plus, il déclare qu'il y a un point à l'infini sur toute droite, une

droite à l'infini pour tout plan, élargissant ainsi considérablement les concepts de la Géométrie Euclidienne, et créant l'espace projectif.

La lecture du « Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres du Cône avec un Plan », l'ouvrage principal de Desargues, paru en 1639, peut paraître difficile à premier abord. L'introduction et les notes de René Taton, qui, en sollicitant le hasard, a eu la bonne fortune de trouver à la Nationale le texte authentique, faciliteront cette lecture. Les difficultés sont de deux sortes. Elles proviennent, d'une part, de ce que Desargues parle le langage de l'analyse géométrique grecque. Il faut alors traduire en langage moderne : une raison composée de plusieurs autres, c'est pour nous le produit de plusieurs rapports; un rectangle de deux segments est pour nous leur produit, etc... D'autre part, nous parlons, dans notre langue technique, non pas français, mais latin ou grec. Desargues a la prétention de parler français. Avec cela, sa terminologie est aussi prolixue que celle d'un axiomatiste moderne. Mais si l'on fait l'effort de le comprendre, on tombe bientôt sous le charme.

La voie ouverte par ses deux amis, Fermat et Descartes, devait faire tomber ses travaux dans l'oubli. Il n'eut que deux disciples : le jeune Pascal, qui ne poursuivit malheureusement pas dans cette direction, et La Hire, mathématicien consciencieux, à qui manquaient des ailes.

Il faut attendre plus d'un siècle pour qu'apparaisse en géométrie un génie digne du sien. Ce successeur génial, qui ignore d'ailleurs l'œuvre de son devancier, ce sera Gaspard Monge. Les Français semblent avoir quelque ingratitude à son égard, et un de leurs plus grands penseurs attend encore la publication de ses œuvres complètes.

Du moins, un professeur de l'Enseignement Secondaire aura-t-il eu l'heureuse inspiration de consacrer à cette belle figure plusieurs années de laborieuses recherches.

Tout le monde sait que l'on doit à Gaspard Monge la Géométrie Descriptive. Mais là s'arrête le savoir de la grande majorité. Or, nous lui devons tous, je dis bien tous, les développements de la Géométrie, sous tous ses aspects, durant le XIX<sup>e</sup> siècle. Il est à la base, il préside à la naissance, de la Géométrie analytique, celle de nos taupins, de la Géométrie pure, celle de Poncelet, de Chasles ou de Steiner, des méthodes de Plücker qui le reconnaît comme son maître indirect (il utilise, il invente les coordonnées « Plückériennes » de la droite), il affecte, comme plus tard Möbius, les aires et les volumes d'un signe, il montre la voie pour l'étude des surfaces, etc., etc... Surtout, il est le professeur modèle, il forme à Mézières puis à Polytechnique plusieurs générations de savants, de techniciens, de professeurs.

René Taton a eu le triple mérite de retrouver sur Monge plusieurs documents oubliés, de mettre en relief la vie et l'œuvre du grand mathématicien, et d'écrire, par la même occasion, une histoire des Mathématiques à la fin du XVII<sup>e</sup> siècle qui se suffit à elle-même. Son ouvrage est à lire et à consulter. Avec son étude sur Desargues, il doit figurer dans les bibliothèques de nos Lycées et Collèges.

Jean ITARD.

### Sur un point de l'histoire des Coniques

Lorsqu'on étudie simultanément les trois coniques en les définissant comme lieu des points d'un plan dont le rapport des distances à un point F et à une droite D est égal à une constante  $e$ , on s'aperçoit vite du rôle prépondérant joué par les cercles dont la distance  $d$  du centre à D est liée au rayon R par la relation  $R = ed$ . Quelle est l'origine historique de ces cercles ?

H. Lebesgue les signale dès 1933 (*Enseignement Scientifique* d'octobre 1933), et M. Leconte les utilise à nouveau en 1935 (*Enseignement Scientifique* de mars 1935) en indiquant que H. Commissaire les avait utilisés, d'une manière assez limitée il est vrai, dans ses « Leçons de Géométrie » (p. 595, § 717, édition de 1932). Mais en 1891, Auguste Morel, professeur à l'Ecole Lavoisier, avait publié une « Etude sur la Géométrie Elémentaire des sections coniques », extraite du « Journal de Mathématiques Elémentaires » de 1890, utilisant déjà systématiquement les cercles en question, qu'il appelle « cercles excentriques ». On y trouve en particulier les renseignements historiques suivants : « Les propriétés de ce cercle forment la base du traité », de Boscovich, publié à Venise en 1757, dans ses « Elementa universæ Mathesos », sous le titre : « Sectionum conicarum elementa, nova quodam methodo concinnata ».

Ce cercle a été employé, à nouveau, par M. Ch. Taylor, dans un ouvrage publié, en 1881, à Cambridge, sous le titre : « An introduction to the ancient and modern geometry of conics ». C'est à cet auteur qu'est empruntée la dénomination de cercle excentrique.

R. ROSTOLLAND,

professeur au Lycée de St-Germain-en-Laye (S.-et-O.).

---

### Bibliographie

---

**Table des valeurs naturelles à six décimales des fonctions trigonométriques de centième en centième de degré** (avec une table de logarithmes des six nombres de 1 à 10.000 à six décimales), par André DANJON, *membre de l'Académie des Sciences, Directeur de l'Observatoire de Paris* (Hachette).

Comme unité d'angle, le *degré* a gagné la partie que le *grade* a jouée contre lui depuis 150 ans. Heures et angles sont liés par le mouvement diurne, dès l'origine et par principe : or, le grade s'accorde fort mal avec notre division du temps en heures, à laquelle il n'est pas question de renoncer.

Mais les raisons qui, en fait, imposent de conserver le degré, ne sont heureusement pas valables pour ses divisions, la minute et la seconde (aux

noms déjà ambigus !). La conversion fréquente de ces fractions sexagésimales en fractions décimales, suivies du retour inverse est fastidieuse : qui se réjouirait d'avoir à diviser par 7, par exemple, une liste d'angles tels que  $16^{\circ}38'54''$  ? Ces opérations allongent tous les calculs et y introduisent souvent des fautes.

La solution de ces difficultés réside dans l'emploi des divisions *décimales* du degré, dixièmes, centièmes, millièmes, etc... L'utilisation de machines à calculer, qui se généralise, hâtera la disparition des tables sexagésimales.

Encore faut-il posséder des tables de remplacement ! M. DANJON, Directeur de l'Observatoire de Paris, a voulu déclencher en France l'évolution et faire la preuve des avantages du système en offrant au public des tables établies avec grand soin, peu coûteuses, très maniables et cependant précises, plus précises que les tables courantes.

On y trouve les valeurs naturelles de sinus et cosinus, tangente et cotangente, sécante et cosécante, avec six décimales, de centième en centième de degré. Les différences tabulaires sont juxtaposées ; une table de parties proportionnelles, détachée du volume, rend l'interpolation aisée. (Avec une machine à calculer l'interpolation est immédiate).

Les tables Danjon assurent le dix-millième de degré ( $0''36$ ) où les tables à cinq décimales ne vont point. Leur format est commode, leur typographie claire.

Nous pensons que les bureaux de calcul et les calculateurs isolés, qui en feront l'essai, y trouveront grand avantage, seront acquis à la réforme. Puissent les candidats aux Grandes Ecoles être autorisés à leur tour à en faire l'usage aux examens.

Diverses tables auxiliaires complètent le volume : en particulier une *table des logarithmes des nombres jusqu'à 10.000*, avec six décimales et une liste copieuse de formules et de nombres usuels.

Paul COUDERC,

*Astronome à l'Observatoire de Paris.*

### **Tables d'intérêts et d'annuités** (Crédit Communal de Belgique).

A l'occasion du 90<sup>e</sup> anniversaire de sa fondation, le Crédit Communal de Belgique a publié, en un luxueux volume, des tables d'intérêts et d'annuités donnant la valeur des diverses fonctions à des taux variant de 0.05 % dans l'intervalle des taux de 2 % à 8 %, et pour des durées allant jusqu'à 60 ans. Il existait déjà des tables analogues très connues, comme celles de Violine, Arnaudéou ou Bosnjak. Mais celles du Crédit Communal s'en distinguent sur plusieurs points. L'intervalle 0.05 % des taux est plus petit, ce qui permet de supprimer la plupart du temps les interpolations. De plus, 8 décimales sont données uniformément, alors que les anciennes tables en donnaient de 6 à 10.

Signalons que ces tables ont été calculées pendant la dernière guerre par du personnel en surnombre, qui, de cette façon, a été soustrait au travail obligatoire imposé par l'armée d'occupation.

E. C. TITCHMARSH : **The Theory of the Riemann Zeta-Function**, Oxford, Clarendon Press, 1951, 346 p., 40 sh.

Ce livre succède à l'ouvrage du même auteur dans la série des monographies mathématiques de Cambridge (1930), maintenant épuisé. Depuis cette date, le sujet s'est notablement enrichi, et le cadre utilisé précédemment est devenu trop étroit. Dans le traité actuel, la fonction Zeta reste le thème principal ; la théorie générale des nombres premiers n'est pas traitée, bien qu'il y ait un chapitre sur le problème de Dirichlet (sur les diviseurs). Les résultats dus à Weyl, Littlewood, Van der Corput, sont utilisés, ainsi que les contributions récentes de Vinogradoff et Selberg.

La présentation est parfaite, comme il est d'usage à Oxford.

**L'Enseignement mathématique**, 39<sup>e</sup> année, n<sup>os</sup> 1, 2, 3, Genève, Librairie Georg et C<sup>ie</sup>.

La célèbre Revue avait suspendu sa publication en 1942, et le volume actuel correspond aux années 1942-1950. Regrettons que les circonstances difficiles, notamment en ce qui concerne les échanges internationaux, aient obligé la Revue à renoncer aux services de l'éditeur Gauthier-Villars. Tous les collègues verront avec plaisir renaître cette Revue qui, outre de nombreuses études intéressantes (comme la « Mesure des Grandeurs », de H. Lebesgue), a assuré la publication des travaux de la Commission Internationale de l'Enseignement mathématique. Souhaitons que de nombreux établissements soutiennent « L'Enseignement mathématique », en souscrivant un abonnement.

Au sommaire :

G. JULIA : La vie et l'œuvre de J.-L. Lagrange.

P. LÉVY : Sur l'emploi des méthodes d'interpolation dans les mathématiques appliquées.

T. BANACHIEWICZ : Résolution d'un système d'équations linéaires algébriques par division.

G. VIVANTI : Les courbes planes à normales doubles.

V. THÉBAULT : Sur le tétraèdre dont les arêtes opposées sont deux à deux égales.

D. MIRIMANOFF : Description d'une famille d'appareils pour diviser un angle en un nombre quelconque de parties égales.

**Bulletin de la Société Mathématique de France**, tome LXXVIII :

Fasc. II : J.-L. KOSZUL : Homologie et cohomologie des algèbres de Lie.

Fasc. III : P. VINCENSINI : Sur certaines correspondances ponctuelles et sur un mode de représentation des surfaces.

Cl. CHABAUTY : Limite d'ensembles et géométrie des nombres.

I. FARY : Sur la densité des réseaux de domaines convexes.

V. LALAN : Sur l'emploi d'un repère canonique dans l'étude des réseaux conjugués.

Fasc. IV : R. CAMPBELL : Contribution à l'étude des solutions de l'équation de Mathieu associée.

R. CAMPBELL : Equations intégrales des fonctions de Mathieu associées et applications.

V.-S. KRISHNOM : Les algèbres partiellement ordonnées et leurs extensions.

### Publications du C.N.R.S.

#### **Colloques internationaux, XXIV : Algèbre et théorie des nombres.**

En septembre 1949 s'est tenu à Paris (Institut H.-Poincaré) un colloque international d'algèbre et de théorie des nombres, organisé par le C.N.R.S., avec l'appui financier de la Fondation Rockefeller. Environ soixante spécialistes, parmi lesquels des mathématiciens étrangers aussi éminents que E. ARTIN, G. BIRKHOFF, J.-G. VAN DER CORPUT, H. DAVENPORT, K.-A. HIRSCH, W. KORINEK, Th. LEPAGE, K. MAHLER, L.-J. MORDELL, T. NAGELL, B. SÈGRE, B.-L. VAN DER WAERDEN, A. WEIL, O. ZARISKI, ont participé à cette manifestation. Le C.N.R.S. publie intégralement (un volume de 224 p., 2.500 francs) les communications faites au Colloque, et qui portaient sur la théorie des nombres algébriques, les équations diophantiennes, la théorie des Idéaux, la Géométrie algébrique, les Treillis, la Théorie de Galois, l'Algèbre extérieure et la Théorie des Groupes.

#### **Colloques internationaux, XXV : Constantes fondamentales de l'Astronomie** (un volume 900 francs).

Les valeurs des constantes fondamentales de l'astronomie ont fait pour la dernière fois l'objet d'une discussion générale en 1896. Depuis lors, de très nombreuses observations ont fourni la matière de déterminations plus précises, rendant nécessaire une révision d'ensemble. Le C.N.R.S. a donc jugé opportun l'organisation d'un Colloque international des Constantes fondamentales de l'Astronomie, qui a réuni 19 spécialistes à l'Observatoire de Paris (mars-avril 1950).

Les conclusions de ce Colloque sont rassemblées en plusieurs résolutions, dont une, au moins, est de nature à intéresser toutes les sciences physiques ; c'est celle qui propose de substituer comme étalon de temps l'année sidérale au jour moyen, lequel, selon les travaux les plus récents, n'a pas la constance qu'on lui attribuait naguère *a priori*.

#### **Centre d'Etudes mathématiques en vue des applications**

R. FORTET : **Eléments de calcul des probabilités** (1.200 francs).

M. Fortet a voulu mettre à la disposition des utilisateurs, de plus en plus nombreux, du calcul des probabilités, un exposé assez court qui, cependant, et sans complications mathématiques excessives, les mette au courant des résultats récents — principalement sur l'addition des variables aléatoires, la notion de fonction aléatoire, les processus stochastiques — qui s'avèrent de plus en plus importants pour les applications. Le texte en a été revu par une commission présidée par M. le Professeur Joliot, et rassemblant d'éminents représentants des disciplines utilisatrices.

Après un rappel des formules d'analyse combinatoire, l'ouvrage expose les premiers éléments du calcul des probabilités : axiome des probabilités totales, variables aléatoires, axiome des probabilités composées. Un chapitre est consacré à l'addition des variables aléatoires indépendantes, un autre

aux éléments d'une théorie du processus. L'ouvrage se termine par une introduction aux méthodes modernes de la statistique mathématique et le développement, à titre d'exemples, de quelques applications typiques.

N. BOURBAKI : **Eléments de mathématique**, XII, Première partie : Les structures fondamentales de l'analyse. Livre IV : Fonctions d'une variable réelle (Hermann et C<sup>ie</sup>, Paris). Actualités scientifiques et industrielles, 1132.

Il est inutile de rappeler l'importance du traité de Bourbaki, dont l'effort, en quelque sorte architectural, fera certainement date dans l'histoire des Mathématiques. Les premiers livres sont d'ailleurs épuisés, et actuellement en réimpression. Le livre actuel traite des équations différentielles, de l'étude locale des fonctions, des développements tayloriens généralisés, et de la fonction gamma.

Le livre se termine par un index des notations, fort précieux pour un ouvrage dont la lecture est un peu déconcertante pour qui a une formation déjà ancienne. Pour la même raison, on appréciera l'index terminologique (p. 187) et le dictionnaire (p. 191).

Le lecteur sera heureux aussi de trouver, comme dans les livres précédents, les notes historiques, l'une relative aux équations différentielles, l'autre aux infiniment petits (ou grands), aux séries et aux développements asymptotiques.

P. PASQUIER : **Initiation à l'étude du ciel** (Comment connaître les étoiles ?), Vuibert, 330 francs.

Le goût accru dont témoignent les professeurs pour la cosmographie, et qui sans doute ne tardera pas à se communiquer aux élèves, reçoit un aliment de choix avec l'ouvrage de M. Pasquier, de la Société Astronomique de France. C'est un guide pour ceux qui veulent apprendre à lire le ciel étoilé. La partie la plus précieuse est sans doute constituée par les sept planches qui forment un véritable atlas céleste donnant les 800 étoiles les plus lumineuses visibles sous nos latitudes. Ajoutons que la présentation du livre est des plus soignées et fait honneur à la Librairie Vuibert.

A. MAROGER : **Les trois étapes du Problème Pythagore-Fermat** (La récurrence, l'art des réciproques), Vuibert, 98 pages, 400 francs.

#### **Collection Que sais-je ? P.U.F.**

J. BOUTELOUP : **Vagues, marées, courants marins.**

A. DELACHET et J. TAILLÉ : **La balistique.**

Deux importants et classiques sujets où s'appliquent, inimmédiatement, et avec bonheur, les mathématiques pures.

A. DELACHET : **Calcul différentiel et intégral.**

Il peut paraître paradoxal à première vue de consacrer un opuscule aussi réduit que ceux de la collection « Que sais-je ? » à un sujet aussi grandiose que le calcul infinitésimal. Notre collègue (qui a déjà donné, dans la

même collection, l' « Analyse mathématique », « La Géométrie contemporaine » et le « Calcul vectoriel et calcul tensoriel ») a résolu la difficulté en écrivant une sorte d'ouvrage témoin, d'échantillon de ce que peut faire la rigueur du raisonnement. Il a choisi pour cela la théorie des fonctions de variables réelles et le problème de l'intégration. Peut-être cet essai — fort intéressant — donnera-t-il à quelques profanes le désir de pénétrer plus avant dans l'édifice analytique. En tout cas, plus d'un étudiant y trouvera l'occasion, et le plaisir, d'y revoir, sous un volume encourageant, des questions un peu perdues dans un ensemble plus vaste et peut-être mal assimilé. Et plus d'un professeur, que son métier ne place pas dans un commerce quotidien avec ces théories, pourra y chercher l'occasion d'un rajeunissement, en ravivant des souvenirs un peu lointains.

A. HUISMAN,

professeur au Lycée Montaigne.

**Le triangle orienté :** M. EHRHART, professeur au Lycée Kléber, Strasbourg, a récemment adressé à l'A.P.M. un exemplaire de la petite brochure qu'il vient de publier sous le titre : *Le triangle orienté*. Une nouvelle notion de géométrie élémentaire et ses applications (1).

Nous détachons de sa lettre d'envoi les passages suivants qui présenteront ce travail aux membres de notre Association :

« Mon étude était d'abord destinée seulement à la revue franco-belge *Mathésis*, et ce ne sont que les encouragements reçus après sa première parution (mars et avril 1951), qui m'ont décidé à la publier en fascicule. C'est ce qui explique que je n'ai développé mon sujet que sur une vingtaine de pages, sans m'étendre sur les cas pourtant bien intéressants du triangle sphérique, du tétraèdre et du quadrilatère.

Voici ce que je considère comme essentiel dans mon travail :

1) Le « théorème de permanence » établit, pour une figure variable, des formules et des théorèmes invariants.

2) Les « tableaux d'identités » associent, sans nouveau travail, à toute relation ou proposition relative au triangle une ou plusieurs formes parallèles.

3) Mais plus que ces résultats précis m'importe la méthode qui s'applique aussi bien à d'autres figures. Par l'exemple du triangle orienté, nous essayons de montrer la possibilité et la fécondité d'une « géométrie complètement dirigée », c'est-à-dire interdisant toute mesure non algébrique.

Ce but s'éclaire quand on se remémore l'histoire de la géométrie dirigée : 1798, Gilbert, *La Géométrie d'après Euclide et Legendre* : essai d'unification des énoncés (Exemple :  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AH$ . AH est valable dans tous les cas, à condition de considérer AH comme négatif si A est obtus).

1803, Lazare Carnot, *La Géométrie de Position* : essai d'unification des démonstrations. (Des « tableaux de corrélation » permettent de passer d'un

(1) En vente chez l'auteur, prix : 150 francs.

cas de figure à un autre, en remplaçant certains termes additifs par des termes soustractifs).

1827, Moebius, *Culcul barycentrique* : Théorème des mesures algébriques. (Dès la première page, on trouve  $AB = -BA$ ,  $AC = AB + BC$ ,  $AB = OB - OA$ , et dans la suite on donne les relations analogues pour les angles).

1852, Chasles, *Géométrie supérieure : Géométrie dirigée systématique*. On note, dans la préface — et on le prouve ensuite par l'exemple — que le principe des signes est indispensable pour l'exactitude des réciproques, et que par lui la géométrie « gagne en facilité et en force, en même temps qu'en brièveté et en généralité ». Néanmoins ce principe n'est pas poussé jusqu'à ses dernières conséquences. Ainsi l'auteur explique, que si la géométrie dirigée n'est pas encore assez connue et appréciée, « c'est que les propositions qui forment le plus ordinairement les éléments de démonstration dans la géométrie ancienne, ne comportent pas l'application du principe des signes. Telle est la proportionnalité, dans tout triangle, des côtés aux sinus des angles opposés. La règle des signes ne s'applique pas à ces propositions, puisque les segments que l'on y considère sont formés sur des lignes différentes et les angles autour de sommets différents. »...

Voici, d'autre part, quelques opinions autorisées exprimées à l'auteur, auxquelles se rallieront certainement tous ses lecteurs :

« L'idée que vous avez développée dans votre très intéressant travail sur le triangle orienté permet de clarifier et de mettre au point bien des résultats classiques, et aussi de découvrir de nouvelles propriétés. »

Julien DESFORGE, *Inspecteur général de l'Instruction Publique*.

« Nous avons très apprécié votre très intéressant travail sur la géométrie du triangle orienté, qui comble une lacune certaine. »

P. ROBERT, *Inspecteur général de l'Instruction Publique*.

« Votre intéressant mémoire est d'une lecture facile et très attrayante. »

R. DONTOT, *Inspecteur général de l'Instruction Publique*.

« Cette étude me paraît fort intéressante par l'unité de vue qu'elle apporte. »

R. DEAUX, *Professeur à la Faculté Polytechnique, Directeur de la revue Mathésis (franco-belge)*.

Nul doute donc que cette communication ne suscite les réflexions personnelles de nos collègues, au double point de vue mathématique et pédagogique, sur une géométrie complètement orientée. Le *Bulletin* les accueillera volontiers.

Mlle BARBIER, *Professeur au Lycée Victor-Duruy*.

---

Le Gérant : L. PARAZINES.

---

Cahors. Imp. A. Coueslant (*personnel intéressé*). 82.337 — 1951  
C.O.A.L. 31.2330. — Dépôt légal : IV-1951

**MASSON & C<sup>ie</sup>, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6<sup>e</sup>**

**Nouveauté :**

**COURS COMPLET**  
**DE**  
**MATHÉMATIQUES**

SOUS LA DIRECTION DE

**G. CAGNAC**

Professeur de Mathématiques spéciales  
au Lycée Louis-le-Grand

**L. THIBERGE**

Inspecteur général  
de l'Éducation Nationale

**Nouveauté :**

**Classes de 1<sup>re</sup> C et Moderne**

**Géométrie dans l'espace**

Un volume de 300 p. environ, par J. DOLLON et E. GILET, avec figures,  
exercices et problèmes ; cartonné..... **Décembre 1951**

**Précédemment parus :**

**Arithmétique**, cl. de 6<sup>e</sup>, par L. THIBERGE et E. GILET, avec la collabo-  
ration de J. SIROS. Un vol. de 244 p., avec fig., exercices et problèmes ;  
cartonné..... **360 fr.**

**Géométrie et Arithmétique**, cl. de 5<sup>e</sup>, par L. THIBERGE et E. GILET.  
Un vol. de 368 p., avec fig., exercices et problèmes ; cart. **490 fr.**

**Arithmétique, Algèbre et Géométrie**, cl. de 4<sup>e</sup>, par L. THIBERGE  
et E. GILET. Un vol. de 372 p., avec figures, exercices et problèmes ;  
cartonné..... **600 fr.**

**Géométrie plane**, cl. de 2<sup>e</sup> C et Mod., par J. DOLLON et E. GILET.  
Un volume de 388 p., environ, avec figures, exercices et problèmes ;  
cartonné..... **490 fr.**

**Algèbre**, cl. de 2<sup>e</sup> C et Mod., par J. DOLLON et J. SIROS. Un volume  
de 248 p., avec fig., exercices et problèmes ; cartonné.... **360 fr.**

# LAROUSSE

à l'usage de *l'Enseignement classique*  
*l'Enseignement moderne*

Un Cours vivant et complet

## MATHEMATIQUES

**M. FAUCHEUX — R. FRANCK**

*Agrégés de Mathématiques*

des volumes établis selon la lettre et l'esprit  
des plus récents programmes, officiels, qui  
assurent aux élèves, avec les connaissances  
nécessaires pour réussir aux divers examens,  
**une véritable culture mathématique**

Un cours objectif, un cours sobre, un cours  
gradué; avec de très nombreux exercices et  
figures, présenté dans le format 13 X 19 cm.

### CLASSE DE SIXIÈME

Elève et Maître ..... 2 vol.

### CLASSE DE CINQUIÈME

Elève et Maître ..... 2 vol.

### CLASSE DE QUATRIÈME

Elève et Maître ..... 2 vol.

### CLASSE DE TROISIÈME

et Tables Trigonométriques. 1 vol.

### CLASSE DE SECONDE

Géométrie plane ..... 1 vol.

### CLASSE DE PREMIÈRE

Géométrie dans l'espace .... 1 vol.

### A L G È B R E

et Trigonométrie ..... 1 vol.

Classes de Seconde et de Première

En vente chez tous les LIBRAIRES et à la LIBRAIRIE LAROUSSE

---

**13 à 21, RUE MONTPARNASSE - PARIS-6<sup>e</sup>**

---

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD  
GRENOBLE (Isère)

# COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU  
*Professeurs au Lycée de Grenoble*

Programmes du 18 avril 1947

Tarif juin 1951

|                                                                                                  |     |   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|---|
| Arithmétique 6° . . . . .                                                                        | 190 | » |
| Dessin Géométrie 6° et 5° . . . . .                                                              | 80  | » |
| Géométrie 5° et 4° . . . . .                                                                     | 280 | » |
| Arithmétique 5° . . . . .                                                                        | 200 | » |
| Arithmétique et Algèbre 4° . . . . .                                                             | 220 | » |
| Arithmétique et Algèbre 3° . . . . .                                                             | 260 | » |
| Géométrie 3° . . . . .                                                                           | 240 | » |
| Compléments d'Algèbre et de Géométrie<br>Géométrie 3° Moderne court . . . . .                    | 160 | » |
| Algèbre 2° A.B.C.M. . . . .                                                                      | 390 | » |
| Géométrie 2° A.B.C.M. . . . .                                                                    | 390 | » |
| Algèbre 1 <sup>re</sup> A.B. . . . .                                                             | 180 | » |
| Algèbre et Trigonométrie 1 <sup>re</sup> C.M. . . . .                                            | 390 | » |
| Géométrie 1 <sup>re</sup> A.B.C.M. . . . .                                                       | 390 | » |
| Questions de Cours de Mathématiques du<br>Baccalauréat, 1 <sup>re</sup> partie, A.B.C.M. . . . . | 225 | » |

Librairie DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, PARIS-V<sup>e</sup>

## COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES

par F. BRACHET et J. DUMARQUÉ

avec la collaboration de P. COUDERC pour la Cosmographie

**Signalé spécialement,** parmi les ouvrages nouveaux :

ARITHMÉTIQUE, classe de 6<sup>e</sup>. (*Recueil de solutions paru*)

**Classes de 5<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>**

|                                                                             |  |                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------|--|-----------------------------------|
| ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE.                                                    |  | Éléments de GÉOMÉTRIE.            |
| Un seul volume pour les 3 classes                                           |  | Un seul volume pour les 3 classes |
| permettant la recherche des références nécessaires et les révisions utiles. |  |                                   |

|                                      |  |                                      |
|--------------------------------------|--|--------------------------------------|
| 1000 PROBLÈMES RÉSOLUS.              |  | 600 PROBLÈMES RÉSOLUS.               |
| (Solutions pour le Livre de l'élève) |  | (Solutions pour le Livre de l'élève) |

PETITES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES NATURELLES.

(Dépliant à trois volets, sur papier fort.)

Modèle commode pour Cours et Examens (Bacc, B.E.P.C.), Mathématiques et Physique.

TABLES DE LOGARITHMES A 5 DÉCIMALES.

Nombres — Degrés — Grades.

**Sans astérisques ni chevauchements.**

Initiation facile — Utilisation rapide.

**Risques d'erreur réduits au minimum.**

Une grande commodité : corrections proportionnelles pour le calcul inverse.

|               |   |                           |   |                             |
|---------------|---|---------------------------|---|-----------------------------|
| MATHÉMATIQUES | { | I. Algèbre-Trigonométrie. | { | Classe de<br>Philo-lettres. |
|               |   | II. Cosmographie.         |   |                             |

COSMOGRAPHIE, classe de Sciences expérimentales.

COSMOGRAPHIE, classe de Mathématiques.

**Vient de paraître :**

AIDE-MÉMOIRE DE MATHÉMATIQUES, classes de Première.

*Tout le cours condensé dans un cahier illustré de 20 pages.*

Catalogué et Spécimens sur simple demande