

Professorats de l'Enseignement Technique 1951

Section A1 : Sciences Industrielles

Mathématiques (4 heures).

I. — Intégrer l'équation différentielle : $y = x(y' + y'^2)$.

On donnera les équations paramétriques de chaque courbe intégrale en exprimant les coordonnées x , puis y , d'un point de cette courbe en fonction de la pente p de la tangente à la courbe en ce point.

II. — Combien y a-t-il de courbes intégrales passant en un point M de coordonnées α, β du plan ?

Partager le plan en régions suivant, d'une part, le nombre de courbes intégrales qui peuvent passer en un de leurs points, d'autre part, les signes des pentes des tangentes aux courbes intégrales en ces points.

Préciser la disposition des tangentes aux courbes intégrales sur les limites des régions précédentes.

Quel est le lieu des points P où les courbes intégrales qui y passent s'y coupent orthogonalement et quelles sont les pentes des tangentes en P ?

Quel est le lieu des points de contact des tangentes parallèles à la première ou à la deuxième bissectrice ?

III. — Dans la suite on posera $\frac{1}{p} = t$.

Déterminer en particulier les courbes intégrales C et C' qui passent en A de coordonnées $x = e$, $y = 2e$ ($e =$ base des Log. népériens). C étant celle dont la tangente en A a un coefficient angulaire positif, préciser comment la courbe C' se déduit de C .

Construire avec soin la courbe C ci-dessus définie et étudier toutes ses particularités. OA recoupe C en A' . Dire quel est le coefficient angulaire de la tangente à C en A' .

IV. — Calculer l'aire limitée par la courbe C et les axes ox , oy , ainsi que l'aire limitée par la courbe C et l'axe oy seul.

M étant un point tendant vers O sur la courbe C , la tangente en M à C coupe oy en T . Comparer les deux infiniment petits, mesures des deux aires en lesquelles l'arc OM partage le triangle OMT .

V. — Déterminer les centres de courbure de la courbe C aux points de C où les tangentes ont pour pente : 0 ; $-\frac{1}{2}$; $+1$; ∞ .

Calculer la longueur de l'arc de la développée Γ de la courbe C ayant pour extrémités les centres de courbure aux points de C où les tangentes ont pour pentes 1 et $+\infty$.

VI. — Former l'équation de la tangente à C en un point de paramètre t . Déterminer l'équation polaire, pôle en O de la podaire L de C par rapport à O . Montrer que le nombre de tangentes à C passant par un point donné K est au maximum de 3. Quel est le nombre maximum de points d'intersection, autres que O de la podaire L et d'un cercle donné passant par O ?

NOTA. — On rappelle que la podaire d'une courbe C par rapport à un point O est le lieu des projections du point O sur les tangentes à la courbe C .

Section A2 : Sciences appliquées

Mathématiques (4 heures).

1^{er} PROBLÈME. — 1^o Appelons triangle T tout triangle ABC tel que la différence des angles B et C soit égale à 1 droit ; montrer que, dans tout triangle T , la hauteur issue de A est tangente au cercle circonscrit et calculer les angles que font les bissectrices de l'angle $\hat{A}$ avec la droite BC .

Si dans un triangle ABC , les bissectrices de l'angle $\hat{A}$ font avec la droite BC des angles de 45° , montrer que ce triangle est un triangle T . Montrer que, si les sommets B et C d'un triangle T sont fixes, le lieu de A est une hyperbole dont on précisera les éléments.

2^o a. Soit, sur une hyperbole équilatère, deux points M et N fixes diamétralement opposés et un point P variable. Montrer que PN et PM sont également inclinés sur les asymptotes (on pourra se servir des parallèles à ces

droite obtenues en joignant le centre O de l'hyperbole au milieu I de PM et au milieu J de PN) ; en déduire que les bissectrices de l'angle $\widehat{MPN}$ gardent une direction fixe quand P varie.

b. Dans un triangle MNP, où M et N sont fixes, P varie de telle sorte que l'on ait $(MN, MP) + (MN, NP) = \alpha$. (Ces angles sont des angles de droites à π près et α est un angle donné). Montrer que les bissectrices de l'angle P du triangle MNP ont des directions fixes ; en déduire le lieu de P.

NOTA. — Le 2° peut être traité indépendamment du 1°.

2° PROBLÈME. — Dans tout le problème x désigne un angle compris entre 0 et 2π .

1° Etudier la variation de la fonction : (1) $y = \frac{2 - \cos x}{\cos 2x + \cos x - 1}$.

Tracer sa courbe représentative (C).

2° Résoudre l'équation : (2) $m \cos 2x + (m + 1) \cos x - m - 2 = 0$.
Discuter suivant les valeurs de m .

Vérifier les résultats de cette discussion en utilisant la courbe (C).

3° Résoudre l'équation : (3) $a \cos 2x + b \cos x - a - 4 = 0$.

Discussion. — a et b désignant respectivement l'abscisse et l'ordonnée d'un point M d'un plan rapporté à deux axes rectangulaires, indiquer, suivant la position de M dans ce plan, le nombre d'arcs compris entre 0 et 2π satisfaisant à l'équation (3).

Montrer que l'équation (2) est un cas particulier de l'équation (3) et retrouver graphiquement les résultats de la discussion de l'équation (2).

N.B. — On rappelle que l'équation du cercle de rayon R et dont le centre I a pour coordonnées $x_0 y_0$ est : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Section B : Dessin et Mécanique

Mathématiques (4 heures).

Etant donnés une droite D et un point P, tel que $AP = 3a$ (a positif), on considère les lieux Γ_K des points M du plan, situés par rapport à (D), du même côté que P et tels que les distances MH et MP, à la droite (D) et au point P soient liées par la relation $MH \cdot \overline{MP}^2 = K$ (K constante).

I. — 1° Former, relativement au système de coordonnées polaires de pôle P et d'axe polaire Px, l'équation $f(r, \theta) = 0$ d'une courbe Γ_K . En déduire qu'il existe en général, trois points M, M', M'', de Γ_K sur un axe Pz et trouver une relation simple entre $\overline{PM}$, $\overline{PM'}$ et $\overline{PM''}$.

2° Déduire de cette relation, le lieu géométrique du point Q conjugué harmonique de P par rapport à deux points M et M', et montrer que le lieu de Q est une courbe Γ' , qui peut être définie d'une manière analogue à Γ_K . Placer la droite (D') correspondante, et donner la valeur de la constante.

3° Former l'équation différentielle $\varphi(r, r', \theta) = 0$ des courbes Γ_K et intégrer l'équation des trajectoires orthogonales de cette famille $\varphi(r, -\frac{r^2}{r'}, \theta) = 0$.

II. — 1° Etudier selon les valeurs de K , le nombre de points réels de Γ_K situés sur l'axe $x'x$.

2° On considère la courbe Γ pour laquelle $K = 4a^3$, et le point O tel que $AO = a$. Former l'équation cartésienne de Γ relativement aux axes OX et OY , puis son équation polaire dans le système de pôle O et d'axe polaire OX . Coordonnées (ρ, ω) .

3° Construire la courbe Γ .

4° En interprétant géométriquement l'équation polaire, donner de Γ une génération à partir d'un cercle et d'une droite. En déduire la construction des tangentes au point O et la valeur de leur angle.

III. — 1° Déterminer les points de Γ pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe polaire OX .

2° Calculer les valeurs du rayon de courbure, au sommet S et au point O (points où la courbe rencontre l'axe Ox). Placer les centres de courbure correspondants.

3° Calculer l'aire de la boucle de la courbe, ainsi que l'aire comprise entre cette courbe et son asymptote.

4° On fait tourner Γ autour de OX . Calculer le volume engendré par la boucle.

Les paragraphes II et III peuvent être traités indépendamment du paragraphe I.

Géométrie descriptive (4 heures).

CÔNE ET PARABOLOÏDE. — I. Un réflecteur, en forme de parabolôïde de révolution, a pour axe la droite FB , de front, passant par le point F ($x = z = 100$, $y = 90$) et inclinée à 60° sur le plan horizontal.

La méridienne est une parabole de foyer F , de paramètre $2p = 100$ et dont la concavité est tournée vers le bas. Il est limité par un plan $u'u$ perpendiculaire à l'axe FB , situé à 50 de F .

Ce réflecteur est attaché au plafond, à la cote 165, par un support en forme de tronc de cône de révolution, dont l'axe vertical, passe par F et dont la base supérieure a pour diamètre 44. La génératrice de contour apparent la plus à gauche est tangente à une parabole méridienne du réflecteur.

On demande : 1° De tracer le contour apparent du solide formé par le réflecteur et son support ; 2° De déterminer l'intersection des deux surfaces.

II. — Le faisceau lumineux issu de F , se compose de deux parties :

a. Un faisceau de rayons directs issus de F ;

b. Un faisceau de rayons réfléchis.

Construire le contour de l'aire du plan horizontal de projection, et le contour de l'aire du plan frontal de projection, éclairées par ces deux faisceaux.

En supposant opaques les plans de projection ainsi que le réflecteur, on

indiquera, en les couvrant de hachures fines et espacées, les aires éclairées qui sont vues sur l'épure.

III. — En supposant la surface du projecteur et celle du support constituées par des tôles de 5/10, schématiser par un croquis à main levée, le ou les moyens d'assembler ces deux surfaces.

IV. — Exposer brièvement, dans un mémoire, la méthode suivie pour réaliser les constructions demandées.

N.B. — Feuille de 297×420 . Cadre de 287×410 .

Les courbes admettant un axe de symétrie, pourront n'être représentées que par une moitié.

N.D.L.R. — L'énoncé était complété par une figure facilitant la mise en place des données dans le cadre.

Mécanique (4 heures).

1^{er} PROBLEME. — Soit une barre de torsion, de diamètre d , de longueur $3l$, située dans un plan horizontal. L'extrémité A est fixée dans un support et ne peut par conséquent pas tourner, le tourillon B est mobile librement sans frottement dans un palier situé très près de l'extrémité B (fig. 1). De ce fait la flexion est négligeable pour la barre AB que l'on peut donc considérer comme une barre simplement tordue sur la longueur $3l$.

Dans l'extrémité B est encastrée une barre de section rectangulaire BCD perpendiculaire à AB, de hauteur h , de largeur b et de longueur $3l$. En l'absence de toute charge l'encastrement est horizontal et on négligera dans ce qui suit le diamètre du tourillon B devant la longueur $BD = 3l$.

Le fer plat BCD pèse p kgf par mètre. On suspend en C ($BC = 2l$) une charge P et on désigne par E et G les modules d'élasticité longitudinal et transversal du métal (barre de torsion et fer plat).

1^{re} question. — Calculer, dans l'hypothèse de déformations petites, l'abaissement de l'extrémité D (calcul littéral).

2^e question. — A l'aide d'un support que l'on vient placer sous l'extrémité D, on ramène cette extrémité (la charge P étant maintenue) au niveau de A et B. Calculer la réaction du support placé sous D (calcul littéral).

3^e question. — Déterminer la valeur numérique des deux quantités précédentes dans le cas où :

$$l = 200 \text{ mm}, d = 10 \text{ mm}, h = 6 \text{ mm}, b = 21 \text{ mm}.$$

$$E = 20.000 \text{ kgf/mm}^2, G = 8.000 \text{ kgf/mm}^2, P = 2 \text{ kgf}$$

$$p = 1 \text{ kgf par mètre}.$$

2^e PROBLEME. — On étudie un dispositif expérimental (fig. 2) formé d'un arbre vertical ZZ' qui peut être, soit maintenu fixe, soit entraîné en rotation par un moteur. (Les paliers et butée supportant l'arbre ainsi que le moteur ne sont pas représentés).

A la partie supérieure, un plateau coulisse librement sur l'arbre (frotte-

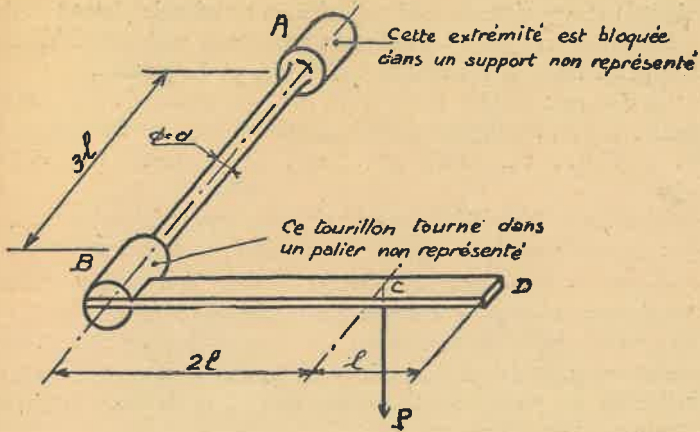
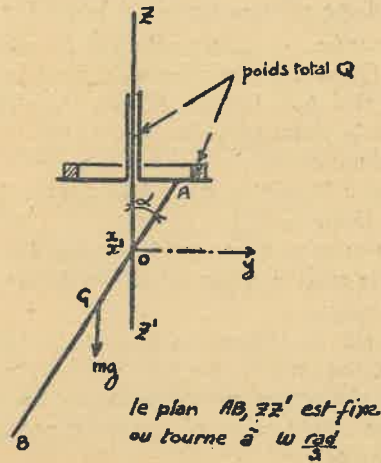
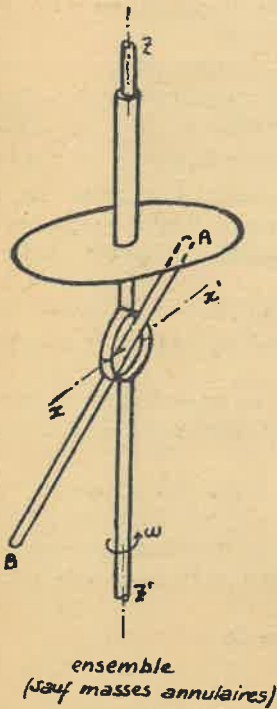


fig. 1



schéma

fig 2

ment négligé) et une clavette rend solidaire en rotation le plateau et l'arbre. Sur le plateau on peut placer des charges annulaires variables et on désigne par Q le poids total de ces masses annulaires et du plateau.

Une tige AB peut osciller (frottement négligé) autour de l'axe xx' perpendiculaire à ZZ' . La tige homogène, cylindrique, a des dimensions transversales négligées. On donne pour cette tige : masse : m , $AB = 4a$, $OA = a$.

Le contact entre l'extrémité arrondie A de la tige et le plateau est caractérisé par un frottement non négligeable et connu : coefficient $f = \operatorname{tg} \varphi$.

1^{re} question. — Le moteur étant arrêté (aucune rotation du système) on place les charges de façon à avoir un angle $\alpha = \alpha_0$ donné.

a) Déterminer entre quelles limites peut varier Q pour avoir l'équilibre strict (pour cet angle α_0) et, en particulier, donner la charge Q à appliquer, en fonction de α_0 , pour avoir l'équilibre strict à la descente du plateau, à partir de la position définie par α_0 .

b) Montrer qu'il peut y avoir arc-boutement, c'est-à-dire que, quel que soit Q , le mouvement de descente du plateau est impossible pour des valeurs de α à déterminer.

c) Montrer que l'équilibre strict à la montée du plateau est stable tandis que l'équilibre à la descente est instable.

2^e question. — Le système tourne à la vitesse constante ω .

a) Déterminer le système des forces d'inertie d'entraînement de la tige AB .

b) Déterminer en fonction de α et ω la valeur de Q correspondant, à partir d'une position donnée, à l'équilibre strict à la montée du plateau.

3^e question. — L'ensemble plateau masses annulaires ayant un poids donné Q_1 on diminue progressivement la vitesse ω jusqu'à ce que l'angle α soit égal à 60° . Soit ω_1 la vitesse correspondant à l'équilibre strict à la montée du plateau à partir de $\alpha = 60^\circ$.

On diminue ensuite ω jusqu'à ce que $\alpha = 30^\circ$. Soit ω_2 la vitesse correspondant à l'équilibre strict à la montée du plateau à partir de $\alpha = 30^\circ$ (Q valant toujours Q_1).

On pourra supposer que le passage de ω_1 à ω_2 est suffisamment lent pour admettre que l'on a une succession d'états d'équilibre, et on prendra $f = 0,4$, $Q_1 = mg/3$.

Calculer les vitesses ω_1 et ω_2 et le travail fourni par le moteur d'entraînement (on rappelle que tous les frottements sont négligés, sauf celui entre tige et plateau, et on désignera par des lettres les caractéristiques du système qui sembleraient nécessaires et non calculables en fonction des données précédentes).

Section Commerce

Mathématiques financières (4 heures).

1^{er} PROBLÈME. — Une société a emprunté le 1^{er} janvier 1945 une somme de 10.000.000 francs, remboursable du 1^{er} janvier 1951 au 1^{er} juillet 1970 par quarante semestrialités décroissantes en progression arithmétique, la

dernière semestrialité étant égale au double de la première. Le taux annuel d'intérêt de l'emprunt est de 4 %.

Calculer le montant de la première et de la deuxième semestrialité.

2° PROBLÈME. — On désigne par x le taux de rendement d'un emprunt-obligations, par i le taux nominal d'intérêt ; par C la valeur nominale d'une obligation (égale à sa valeur de remboursement), par E_n sa valeur moyenne n périodes avant le terme final de l'emprunt.

L'emprunt est amortissable par *annuités constantes* ; ses coupons sont annuels.

1° Calculer la valeur de la nue-propriété unitaire Q_n et de l'usufruit unitaire P_n en fonction de E_n , C , x , i . Etablir le rapport $h_n(x, i)$ de la nue-propriété unitaire à l'usufruit unitaire, en fonction de x , i , n .

2° Montrer que l'on peut calculer x au moyen de la formule :

$$(1) \quad x = \frac{Ci + (C - E_n) h_n(x, i)}{E_n}.$$

Comment se décompose d'après cette formule (1), le revenu de l'obligation ?

3° On peut, à l'aide de la formule (1), calculer x en remplaçant successivement $h_n(x, i)$ par des valeurs (dépendant évidemment de x) de plus en plus approchées. Les tables d'Izarn donnent d'ailleurs pour diverses valeurs de i , de x , de n , les valeurs correspondantes de $h_n(x, i)$. En voici un exemple :

PERIODES	TAUX $i = 0,04$.		
	$x = 0,06$	$x = 0,065$	$x = 0,07$
.....			
20	0,0681 861	0,0671 081	0,0660 705
.....			

Application numérique. — Une personne achète au prix de 8.000 francs une obligation de 10.000 francs, 4 %, amortissable au plus dans vingt ans par annuités constantes (coupons et amortissements annuels). Calculer le taux approximatif donné par la formule (1) lorsqu'on remplace $h_n(x, i)$ par $\frac{i}{n}$.

Le Gérant : L. PARAZINES.