

Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique

Section A1

Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie (4 heures).

Préambule. — Le plan est rapporté à deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$; il est orienté de façon que $(\vec{Ox}, \vec{Oy}) = +\frac{\pi}{2}$. On rappelle que, si deux courbes (C) et (S), du plan se coupent en un point M et admettent chacune une tangente en ce point, on dit que (S) coupe (C) sous l'angle V si l'on a $(MT, MU) = V$ à $k\pi$ près, MT et MU étant les tangentes en M à (C) et (S), respectivement.

u , ρ et φ étant des fonctions d'un paramètre, admettant chacune une dérivée du premier ordre par rapport à ce paramètre on considère le point M ayant pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = u + \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Quand le paramètre varie, M décrit une courbe (C). A chaque point M de cette courbe on fait correspondre le cercle (S) passant par M et ayant pour centre le point ω de coordonnées $(u, 0)$. Quand M décrit (C) on obtient ainsi une famille de cercles (S) associés à la courbe (C).

I. — Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que tous les cercles (S), associés à une courbe (C), coupent cette courbe (C) sous le même angle V est que les fonctions u , ρ , φ et leurs différentielles du premier ordre du , $d\rho$, $d\varphi$, vérifient la relation,

$$(1) \quad \cos(\varphi - V) du - \rho \sin V d\varphi + \cos V d\rho = 0.$$

Quelle est la relation qui exprime que :

- a. La courbe (C) est l'enveloppe de la famille des cercles (S) ?
- b. La courbe (C) est une trajectoire orthogonale de la famille des cercles (S) ?

Il y aura avantage, dans la suite, à poser : $\varphi = V + \theta - \frac{\pi}{2}$.

Que devient alors la relation (1) ?

II. — On suppose, dans ce paragraphe, $\varphi = a$ nombre fixe, donné et positif.

1° Déterminer la fonction u de θ qui définit une courbe (C) coupée sous l'angle V donné par les cercles (S) associés.

On considère, parmi les courbes (C) répondant à la question, celle qui passe par le point de coordonnées $x = a \cos V$, $y = a \sin V$. Ecrire les équations paramétriques de cette courbe particulière. Montrer qu'elle admet l'origine pour centre de symétrie. Comment se transforme-t-elle quand on change V en $-V$? On désigne par (I') la partie de cette courbe obtenue

en faisant varier θ de zéro à π et supposant $0 < V \leq \frac{\pi}{2}$. Construire (Γ) avec précision.

2° On désigne par R le point de rebroussement de la courbe (Γ) et par P le point où la tangente est parallèle à Oy .

a. Quels sont les lieux de ces points quand V varie ?

b. Soit Q le point d'intersection des tangentes à (Γ) en P et R. Calculer, en fonction de V , l'aire du triangle mixtiligne PQR formé par les deux tangentes et la courbe (Γ) . Déterminer la partie principale de cette aire, quand on prend $\frac{\pi}{2} - V = h$ pour infiniment petit principal ?

III. — On suppose, dans ce paragraphe, $\rho^2 = 2p u$, p étant une longueur donnée positive.

1° Déterminer la courbe (C) à laquelle sont tangents les cercles (S) associés. Préciser les éléments géométriques usuels de cette courbe.

2° Déterminer les courbes (C) qui sont coupées sous un angle droit par les cercles (S) associés. On exprimera d'abord φ en fonction de φ , puis les coordonnées x, y d'un point quelconque de (C) et leurs dérivées $\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi}$ en fonction de φ et φ .

Montrer que chaque courbe (C) possède, en général, quatre points de rebroussement et deux points où la tangente est parallèle à Oy .

Déterminer les lieux de ces points.

3° Ecrire l'équation différentielle que doivent vérifier φ et $\theta = \varphi - V + \frac{\pi}{2}$ pour que les courbes (C) correspondantes soient coupées sous l'angle donné V par les cercles (S) . On ne cherchera pas à intégrer cette équation, mais on en déduira les expressions des dérivées $\frac{dx}{d\theta}$ et $\frac{dy}{d\theta}$ en fonction de φ, θ et V .

Trouver, pour les courbes (C) répondant à la question :

- a. Le lieu des points de rebroussement ;
- b. Le lieu des points où la tangente est parallèle à Ox ;
- c. Le lieu des points où la tangente est parallèle à Oy .

IV. — On a rencontré, dans l'étude des cas particuliers faite dans les deux paragraphes précédents, une courbe qui est, à la fois, enveloppe d'une famille de cercles (S) et lieu des points de rebroussement de la famille de courbes (C) coupées sous le même angle V par les mêmes cercles (S) .

On propose, dans ce dernier paragraphe, d'établir que cette propriété est vraie, en général, pour toute famille de cercles (S) définis par une relation $u = f(\varphi)$.

Géométrie (4 heures).

Les axes Ox et Oy sont rectangulaires. On donne le point fixe $A(a, a)$, a désignant une longueur constante. On considère la famille des cercles (ω)

qui sont tangents à l'axe des x , et tels que la polaire du point O par rapport à tout cercle (ω) passe par A .

I. — 1° Trouver analytiquement le lieu du centre ω du cercle (ω) ; préciser les éléments géométriques de ce lieu.

2° Démontrer géométriquement que les cercles (ω) restent tangents à un cercle fixe, et retrouver ainsi le lieu du centre ω .

3° Que devient la famille des cercles (ω) dans l'inversion de pôle O et de puissance a^2 ?

II. — On désigne par PQ le diamètre du cercle (ω) qui est parallèle à Ox . Construire les lieux des points P et Q (on pourra exprimer les coordonnées de ces points en fonction d'un paramètre, par exemple l'abscisse λ du centre ω).

Montrer que, pour une même valeur de λ , les tangentes en ω , P , Q à leurs lieux respectifs sont concourantes, et trouver le lieu de leur point de concours.

III. — La droite $O\omega$ coupe le cercle (ω) en R et S . Prenant O comme pôle et Ox comme axe polaire, former l'équation polaire du lieu des points R et S . Construire ce lieu ; préciser les angles sous lesquels ce lieu coupe les axes de coordonnées ; placer la courbe obtenue par rapport à la courbe transformée du lieu de ω par homothétie de centre O et de rapport 2.

IV. — A chaque cercle (ω) , on associe l'hyperbole (H) admettant le cercle (ω) pour cercle principal et le point O pour l'un des foyers.

1° Former l'équation polaire de toute hyperbole (H) [pôle O , axe polaire Ox] en fonction de l'un des angles polaires α du centre ω . Vérifier que les hyperboles (H) passent par un point fixe B à distance finie située sur Ox .

2° On effectue une transformation par polaires réciproques en prenant pour cercle directeur le cercle de centre O et de rayon a . Que deviennent les hyperboles (H) ?

Retrouver ainsi géométriquement le fait que toutes les hyperboles (H) passent par un point fixe B .

3° Chaque hyperbole H coupe Ox en B et M .

Démontrer analytiquement et géométriquement que la tangente en M à (H) passe par un point fixe.

4° Plus généralement une droite fixe Δ , issue de O , coupe toute hyperbole (H) en deux points N et N' . Montrer (analytiquement ou géométriquement) que les tangentes en N et N' à (H) passent par l'un ou l'autre de deux points fixes. Quel est le lieu de ces deux points quand Δ pivote autour de O ?

5° Trouver l'enveloppe de l'axe non transverse de (H) [on pourra prendre comme paramètre la pente $m = \operatorname{tg} \alpha$ de la droite $O\omega$]. Construire cette enveloppe.

Déterminer la polaire réciproque de cette enveloppe (même cercle directeur que précédemment).

NOTA. — Il est indispensable de donner des résultats précis. Les figures seront dessinées avec le plus grand soin, en prenant $a = 4$ cm.

Section A2

Mathématiques (4 heures).

On donne une hyperbole équilatère (H) de foyers F et F', de demi-axe focal a ; $x'Ox$ est l'axe FF' orienté de F' vers F ; $y'Oy$ est l'axe non transverse.

I. — 1° Soit M un point quelconque de (H). Démontrer que

$$MF \cdot MF' = OM^2.$$

La réciproque est-elle exacte ?

2° La tangente et la normale à (H) en un de ses points M coupent respectivement Oy en I et ω . Le cercle (ω), de centre ω et passant par F, coupe la tangente en M à (H) en P et Q. Montrer que le pôle J de PQ par rapport à (ω) est sur Ox ; quelle est alors la polaire de I par rapport à (ω) ? Utilisant par exemple le deuxième point φ d'intersection de MF' avec (ω), montrer que $MP = MQ = MO$.

3° Trouver, lorsque M décrit (H) les lieux des points P et Q. Quelle propriété vient-on finalement d'établir pour une tangente à (H) ?

4° Que peut-on dire du quadrilatère $\omega P J Q$?

II. — Par l'inversion de pôle O et de puissance a^2 , la courbe (H) se transforme en une courbe non élémentaire (H'). Démontrer que si f et f' sont les inverses respectifs de F et F', m étant l'inverse de M de (H) on a la relation $mf \times mf' = C^2$ et calculer cette constante en fonction de a . En se servant du § I, prouver que la tangente mi à (H') en m est telle que

$$(Om, mt) = 2(Ox, Om) - \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

III. — Avec les mêmes notations on considère un cercle (Γ) du faisceau à points limites F et F' coupant Ox en K et L [K entre O et F]. On pose $OK = \lambda$. Pour quelles valeurs de λ la médiatrice de OL coupe-t-elle (Γ) ? Dans le cas où ces deux points d'intersection existent on désigne par μ l'un d'eux. Déterminer dans l'ordre que l'on voudra :

1° Le lieu des projections de F et F' sur la droite μK ;

2° L'enveloppe de μK ;

3° Le lieu de μ .

Confronter avec le § I.

IV. — Trigonométrie (indépendante des questions précédentes).

Peut-on déterminer un point M de (H) pour que $\widehat{OFM} = \frac{3}{2} \widehat{OF'M}$? (On établira au préalable la formule donnant $\sin \frac{\alpha}{2}$ en fonction de α , et on posera $\widehat{OF'M} = \theta$).

Section B

Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie (4 heures).

NOTA. — Les candidats respecteront scrupuleusement les données numériques indiquées dans l'énoncé. Ils ne s'attarderont pas à étudier la concavité des courbes qu'on leur demande de construire.

Le plan de la figure est orienté positivement dans le sens trigonométrique.

On donne un axe $x'Ox$, d'origine O , dont le sens positif est celui de O vers x et, sur cet axe, deux points A et B , d'abscisses respectives a et $-a(a > 0)$. Par O on trace un axe $u'u$ dont le sens positif est celui de O vers u ; soit α la mesure en radians de l'angle $(\vec{Ox}, \vec{Ou})$. Un point M de $u'u$ est défini par $\overline{OM} = u$.

1° Donner les expressions de $\overline{MA}^2$ et de $\overline{MB}^2$ en fonction de a , u et α .

2° On suppose α constant et compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$. Déterminer M pour

que $\frac{MA}{MB} = \operatorname{tg} \varphi$, φ désignant un angle donné compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$. Comment faut-il choisir φ , quand α est fixé, pour que le problème admette des solutions ?

3° α étant toujours supposé constant, étudier la variation du rapport $z = \frac{MA}{MB}$ quand M décrit $u'u$. Construire la courbe représentative par rapport à deux axes rectangulaires Ou , Oz en donnant à α la valeur $\frac{\pi}{3}$ et à a la valeur 4 cm. On prendra l'unité graphique de l'axe Oz égale à 4 cm. Construire la tangente à la courbe au point où elle coupe l'axe Oz .

4° On suppose u constant et positif et α variable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Étudier la variation du rapport $z = \frac{MA}{MB}$. Construire la courbe représentative dans un système d'axes rectangulaires $O\alpha$, Oz . On prendra $a = 4$ cm et $u = 6$ cm.

5° Calculer α en fonction de a , de u et du rapport $\frac{MA}{MB} = \operatorname{tg} \varphi$.

φ ayant une valeur fixe, comprise entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, étudier la variation de α quand u varie en restant positif. Construire la courbe représentative dans un système d'axes rectangulaires Ou , $O\alpha$. On prendra $a = 3$ cm ; $\varphi = \frac{\pi}{6}$ et l'unité graphique sur $O\alpha$ égale à 4 cm.

Géométrie et Géométrie descriptive (4 heures).

I. GÉOMÉTRIE. — Les axes Ox et Oy sont rectangulaires.

On donne le cercle (O) de centre O et de rayon $2a$, et le point $A(a, 0)$, a étant une longueur fixe.

1° A tout point $M(x_0, y_0)$ du plan, on associe la droite Δ_M qui est l'axe radical du cercle (O) et du cercle de diamètre AM . Montrer que si le point M décrit une droite $D(ux + vy + w = 0)$, la droite Δ_M passe par un point fixe dont on calculera les coordonnées.

2° Solution géométrique du 1°.

3° Soit m la projection orthogonale de A sur Δ_m . Calculer les coordonnées (x_1, y_1) de m en fonction de a, x_0, y_0 . Inversement, exprimer x_0 et y_0 en fonction de a, x_1, y_1 . Les points M et m peuvent-ils être confondus ?

4° Montrer que la correspondance entre M et m est une suite de transformations connues ; en déduire, en particulier, le lieu de m quand M décrit un cercle.

II. GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. — Les données, en centimètres, sont rapportées à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz : Oy ligne de terre orientée de gauche à droite suivant le petit axe de la feuille (on prendra le point O à 3 cm. du bord gauche de la feuille), Ox horizontale de profil orientée vers le bas de la feuille, Oz verticale orientée vers le haut de la feuille.

On donne les deux points :

$$S \begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \\ z = 9 \end{cases} \quad A \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \\ z = 9 \end{cases}$$

1° Un tétraèdre $SABC$ est tel que :

$$SA = SB = SC = 5$$

$$\widehat{ASB} = 72^\circ ; \quad \widehat{BSC} = 54^\circ ; \quad \widehat{CSA} = 45^\circ.$$

Le trièdre $SABC$ est direct et l'angle du plan xOy et du plan SAB est $+60^\circ$ (on supposera la cote de B supérieure à celle de A).

Construire en trait fin les projections du tétraèdre $SABC$ (pas de ponctuation).

2° On considère le tétraèdre $SA_1B_1C_1$ symétrique de $SABC$ par rapport à S (S milieu de $AA_1 \dots$). Construire, en trait fort, avec ponctuation, les projections du tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$ tel que les plans $\alpha\beta\gamma, \beta\alpha\delta, \gamma\beta\delta$ et $\alpha\gamma\delta$ coïncident respectivement avec les plans ABC, A_1B_1C, B_1C_1A et C_1A_1B .

3° Par le point M tel que $\vec{aM} = \frac{1}{4}\vec{a\beta}$, on mène le plan parallèle aux droites $\beta\gamma$ et $\alpha\delta$; construire, avec ponctuation, les projections de la section du tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$ par ce plan ; vraie grandeur de la section.

N. B. — On expliquera brièvement chacune des constructions effectuées.

Section D

Mathématiques (4 heures).

On donne une droite (D) et un cercle (O) , de centre O , de rayon R , tangents entre eux au point T . Un triangle variable ABC est assujéti aux conditions suivantes :

Il est rectangle en A ;

Ses sommets B et C appartiennent à la droite (D) ;

Ses bissectrices intérieures se coupent en O .

1° On désigne par :

M et N les points d'intersection des bissectrices BO et CO et du cercle circonscrit au triangle ABC ;

B' et C' les points d'intersection de ces bissectrices et des côtés AC et AB du triangle ;

O₁ et O₂ les centres des cercles exinscrits dans les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ du triangle ;

P la projection orthogonale de O sur la droite B'C'.

Trouver les lieux des points A, M, N, O₁, O₂, B', C', et P.

2° On pose $\widehat{TOB} = x$; $\left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ Evaluer, en fonction de l'angle x et de R, la longueur y du côté BC.

Etudier la fonction $y = \frac{R\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{3x}{4} - 2x\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}$ quand x varie de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$.

Tracer la courbe représentative en supposant $R = 2$ cm.

3° On pose $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Exprimer la somme $b + c$ et le produit bc en fonction de a et de R. Calculer b et c connaissant a et R. Discuter.

Supposant $R = 2$, trouver les triangles ABC dont les longueurs a , b , c , des côtés sont des nombres entiers.

N. B. — Les trois parties du problème sont indépendantes.