

Ecole Normale Supérieure 1951

Groupe I

Première composition.

1° Déterminer les coefficients $p_0, p_1, \dots, p_n$ du polynôme

$$P_n(z) = p_0 + p_1 z + \dots + p_n z^n,$$

connaissant les valeurs de $P_n(z)$ pour les racines $z = z_h, h = 0, 1, \dots, n$ de l'équation $z^{n+1} - 1 = 0$. En déduire que, si pour $|z| = 1$ on a $|P_n(z)| \leq P$, alors $|p_k| \leq P$ pour $k = 0, 1, \dots, n$.

Soit $A_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ et soit α_n le maximum sur $|z| = 1$ de $|A_n(z)|$; montrer qu'il y a un nombre α^* indépendant de $A_n(z)$ et de n , ayant les propriétés suivantes : $\alpha_n \geq \alpha^*$, et il existe un polynôme $A_n(z)$ pour lequel $\alpha_n = \alpha^*$; un tel polynôme sera désigné par $A_n^*(z)$.

Soit $F(z) = r_0 + r_1z + \dots + r_kz^k + \dots$ une série absolument convergente pour $z = R$; montrer que, si $|F(z)| \leq m$ pour $|z| = R$, alors on a

$$|r_k| \leq \frac{m}{R^k} \text{ pour tout } k.$$

2° Soit $f(x)$ une fonction donnée à valeurs complexes, de la variable réelle x , continue dans l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$. Soit $P_n(z)$ le polynôme prenant

aux points $z = z_h = e^{2ix_h}$ les valeurs $f(2x_h)$ quand $x_h = \frac{\pi h}{n+1}$,

$h = 0, 1, \dots, n$. Le coefficient de z^k dans $P_n(z)$ a-t-il une limite pour $n = \infty, k$ étant fixe? Trouver cette limite ω_k quand elle existe.

On pose : $q = |p^2| + |p_1|^2 + \dots + |p_n|^2$. Pour étudier q , il est commode d'exprimer q à l'aide des valeurs de la fonction $P_n(z)\overline{P_n}\left(\frac{1}{z}\right)$ aux points

$z = z_h$, où $\overline{P_n}(z) = \overline{p_0} + \overline{p_1}z + \dots + \overline{p_n}z^n$, $\overline{p_k}$ désignant le nombre imaginaire conjugué de p_k .

a. Montrer que le polynôme $A_n^*(z)$ du 1° est unique.

b. Examiner si q a une limite quand n augmente indéfiniment. Démontrer par un raisonnement rigoureux que la limite de ω_k pour $k = \infty$ existe.

3° Soit $B_n(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \dots + b_1t + b_0$ un polynôme en la variable réelle t et soit β_n le maximum de $|B_n(t)|$ pour $-2 \leq t \leq 2$. Montrer qu'il existe un nombre β^* indépendant de $B_n(t)$ et de n ayant les propriétés suivantes : $\beta_n \geq \beta^*$, et il y a un polynôme $B_n^*(t)$ pour lequel $\beta_n = \beta^*$;

démontrer que ce polynôme est unique. (On pourra poser $t = z + \frac{1}{z}$, alors

$B_n(t)$ devient une fonction de z que l'on pourra étudier en s'inspirant du 2°).

4° Soit une ellipse (E) décrite par le point de coordonnées $u = a \cos x, v = b \sin x, x$ étant réel et variable. Soit $C_n(w) = w^n + c_{n-1}w^{n-1} + \dots + c_1w + c_0$ un polynôme en $w = u + iv$. Montrer qu'il existe un nombre γ_n^* indépendant de $C_n(w)$, mais dépendant de (E), tel que le maximum

de $|C_n(w)|$ est au moins égal à γ_n^* quand w parcourt (E) et qu'il y a un polynôme $C_n^*(w)$ et un seul pour lequel ce maximum est égal à γ_n^* . Quelle est la limite pour $n = \infty$ de $\sqrt[n]{\gamma_n^*}$?

5° On suppose que les coefficients $p_0, p_1, \dots, p_n$ d'un polynôme $P_n(z)$ sont tous réels et on pose $P_n(e^{ix}) = U_n(x) + iV_n(x)$, $U_n(x)$ et $V_n(x)$ étant réels. Déterminer les coefficients de $P_n(z)$ connaissant les valeurs de $U_n(x)$ pour $x = x_h = \frac{\pi h}{n+1}$ $h = 0, 1, \dots, n$.

N. B. — La question 5° est indépendante des questions 2°, 3° et 4°.

Deuxième composition.

Avvertissement. — Toutes les démonstrations doivent tenir compte de façon très stricte des seules hypothèses de régularité imposées par l'énoncé.

I. — Soit Π un plan, mobile par rapport à un plan fixe P et constamment en coïncidence avec P . Le plan P (resp. Π) est rapporté aux axes rectangulaires OX, OY (resp. $\omega x, \omega y$) et ces deux systèmes d'axes ont même orientation.

On désigne par $\xi(t), \eta(t)$ les coordonnées de ω par rapport à OX, OY , et on pose $\widehat{OX}, \omega x = \varphi(t)$, les fonctions $\xi(t), \eta(t), \varphi(t)$ étant définies et continues pour $0 \leq t \leq 1$.

On appelle *centre instantané de rotation* à l'instant t (en abrégé c.i.r.) le point $I(t)$ de P , limite, s'il existe, du centre de la rotation qui amène le plan Π de la position $\Pi(t)$ à la position $\Pi(t + \Delta t)$, lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ par valeurs positives ou négatives. On désigne par $J(t)$ le point de Π qui coïncide avec $I(t)$ à l'instant t .

1° Exprimer la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un c.i.r. à l'instant t , en utilisant les rapports $\frac{\Delta \xi}{\Delta \varphi}$ et $\frac{\Delta \eta}{\Delta \varphi}$.

Calculer alors les coordonnées de $I(t)$ [resp. $J(t)$] par rapport à OX, OY (resp. $\omega x, \omega y$).

2° On suppose que $I(t)$ existe pour tout t et est fonction continue de t .

Soit $\mathcal{B}$ ou *base* (resp. $\mathcal{R}$ ou *reculante*) le lieu de $I(t)$ [resp. $J(t)$]. Désignons par $\mathcal{I}(t + \Delta t)$ le point de P qui coïncide à l'instant t avec $J(t + \Delta t)$, et posons : $\overrightarrow{\Delta I} = \overrightarrow{I(t)} \overrightarrow{I(t + \Delta t)}$, $\overrightarrow{\Delta J} = \overrightarrow{I(t)} \overrightarrow{\mathcal{I}(t + \Delta t)}$.

Montrer, en évaluant les composantes du vecteur $(\overrightarrow{\Delta I} - \overrightarrow{\Delta J})$, que

$$\frac{\overrightarrow{\Delta I} - \overrightarrow{\Delta J}}{\Delta \varphi} \rightarrow 0, \text{ lorsque } \Delta t \rightarrow 0.$$

En déduire que si la condition suivante est satisfaite : (1) $\frac{|\overrightarrow{\Delta I}|}{|\Delta \varphi|} > \lambda$ dès que Δt est assez petit ($\lambda = \text{constante} > 0$), $|\overrightarrow{\Delta I}|$ et $|\overrightarrow{\Delta J}|$ sont des infiniment petits équivalents et $(\widehat{\overrightarrow{\Delta I}, \overrightarrow{\Delta J}}) \rightarrow 0$, quand $\Delta t \rightarrow 0$.

3° On va chercher des cas généraux où la condition (1) est satisfaite.

Soit C la courbe d'équation $X = \xi(u)$, $Y = \eta(u)$, où ξ et η possèdent des dérivées premières continues, avec $\xi'^2 + \eta'^2 = 1$. On pose d'autre part

$\varphi = t$ et $u = \int_0^t f(t) dt$, où $f(t)$ est une fonction continue positive définie pour $0 \leq t \leq 1$.

α . On suppose que ξ et η possèdent des dérivées secondes continues. Montrer que si $f(t)$ est partout différente de la valeur du rayon de courbure $R(t)$ de la courbe C , la condition (1) est satisfaite.

Cas particulier. — Etudier le cas où C est un segment de droite.

b . Montrer que si pour tout t il existe un nombre $\mu > 0$ tel que $\left| \frac{\Delta f}{\Delta t} \right| > \mu$ dès que Δt est assez petit, la condition (1) est satisfaite. La fonction $f(t)$ est-elle alors nécessairement dérivable partout ?

II. — 1° Soit C une courbe d'équation cartésienne $y = f(x)$, où $f(x)$ et $f'(x)$ sont définies et continues pour $0 \leq x \leq 1$. Soit $D(x)$ la tangente à C au point $M(x)$.

Montrer que si le point d'intersection de $D(x_0)$ et $D(x_0 + t)$ a une limite quand $t \rightarrow 0$, cette limite est nécessairement $M(x_0)$.

Ecrire sous une forme simple la condition pour que cette limite existe, en posant : $f'(x_0 + t) - f'(x_0) = \varphi(t)$.

Montrer que cette condition est satisfaite lorsque $\left| \frac{\varphi(t)}{t} \right| > \lambda$ dès que $|t|$ est assez petit ($\lambda = \text{constante} > 0$), ou lorsque $\varphi(t)$ est croissante ou décroissante dans chacun des deux intervalles de la forme $[0, \epsilon]$, $[-\epsilon, 0]$.

Montrer que si $\varphi(t) = t \sin \frac{1}{t}$ (avec $\varphi(0) = 0$), cette condition n'est pas satisfaite.

2° On considère la famille des droites $D(\alpha)$ d'équation normale :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p(\alpha) \quad (\text{où } p(\alpha) \text{ et } p'(\alpha) \text{ sont continues}).$$

Soit C le lieu des points caractéristiques $M(\alpha)$ de $D(\alpha)$ [on en montrera l'existence de façon rigoureuse].

On veut étudier C au voisinage d'un de ses points $M(\alpha_0)$. Montrer qu'on peut toujours, par un changement d'axes supposer $\alpha_0 = 0$ et $p(\alpha_0) = p'(\alpha_0) = 0$ sans rien changer aux hypothèses de régularité de $p(\alpha)$. On se placera dans ce cas.

Soit $E(u)$ le lieu de $M(\alpha)$ pour $0 \leq \alpha \leq u$.

Les projections de tous les points de $E(u)$ sur Ox et Oy remplissent deux segments dont on appellera $l(u)$ et $L(u)$ respectivement les longueurs.

Montrer que, ou bien $l(u) = L(u) = 0$ dès que u est assez petit, ou bien $\frac{l(u)}{L(u)} \rightarrow 0$ lorsque $u \rightarrow 0$.

Epreuve pratique.

Les données, exprimées en centimètres, sont rapportées à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz . L'axe Oy est parallèle au petit axe de la feuille à 23 du bord inférieur ; il est orienté positivement vers la droite ; le plan xOy est le plan horizontal de projection ; le plan yOz est le plan frontal de projection ; le plan xOz est de profil suivant la parallèle au grand axe de la feuille à 16 du bord droit ; Ox est orienté positivement vers le bas et Oz vers le haut.

Un cône (S) a pour sommet le point S de coordonnées :

$$(x=12 ; y=4 ; z=8).$$

Sa trace sur le plan de front $x=16$ est l'hyperbole (H) définie par ses asymptotes et un point A.

$$\text{Asymptotes } \begin{cases} x=16 ; y=8. \\ x=16 ; 2z-y=16. \end{cases} \quad \text{Point A : } x=16 ; y=0 ; z=6.$$

Un cylindre (C) dont les génératrices ont pour paramètres directeurs $(-1, 1, 1)$, a pour trace dans le plan horizontal $z=4$ la parabole (P) définie par son foyer F et son sommet B.

$$F(x=16 ; y=0 ; z=4) \qquad B(x=16 ; y=-2\sqrt{2} ; z=4).$$

1° Déterminer les projections horizontale et frontale de l'intersection (I) de (S) et de (C). On construira un point courant noté m, m' sur l'épure et la tangente en ce point. Etudier les éléments remarquables.

2° Représenter le solide commun au cône et au cylindre supposés pleins, opaques et de la même substance, en limitant ce solide aux portions satisfaisant aux inégalités : $x \leq 16 ; 0 \leq z \leq 12$.

3° Déterminer l'ombre propre du solide obtenu éclairé par des rayons lumineux parallèles ayant la direction et le sens du vecteur de composantes : 0, — 1, 1.

4° Indiquer, dans une notice *sommaire* rédigée sur la partie gauche de la feuille (et non au verso), les particularités rencontrées dans l'exécution de l'épure et les méthodes employées pour les résoudre. On pourra mettre quelques lettres sur l'épure pour faciliter les explications.

N.-B. — Les contours d'ombre seront tracés en bleu (plein ou pointillé selon le cas). Les parties vues et dans l'ombre seront recouvertes de hachures parallèles (équidistance : 1,5 mm.) à l'encre bleue ou au crayon noir.

Groupe II

Mathématiques.

I. — Soit Π un plan rapporté à deux axes obliques quelconques Ox, Oy . On appellera *élément de contact* tout couple (m, δ) constitué par un point m et une droite δ de Π passant par m .

Si C est une courbe, on dira que l'élément de contact (m, δ) est *associé* à C si δ est la tangente à C au point m de C.

Un élément de contact (m, δ) est déterminé par ses composantes x, y, a, b ,

où x, y sont les coordonnées de m , et a, b , les paramètres directeurs de δ , définis à un facteur non nul près.

Considérons la transformation $(M, \Delta) = T(m, \delta)$ qui, à l'élément de contact (m, δ) de composantes x, y, a, b (où $ay - bx \neq 0$) fait correspondre l'élément de contact (M, Δ) de composantes X, Y, A, B , définies par les relations :

$$(1) \quad aY = bX; \quad Ay = Bx; \quad xY - yX = 1.$$

1° Interprétation géométrique de ces relations. Quel est le produit T^2 de T par elle-même ?

2° Si δ_0 est une droite donnée, montrer que les transformés des éléments de contact (m, δ_0) sont des éléments (M_0, Δ) , où M_0 ne dépend que de δ_0 . On écrira $M_0 = T(\delta_0)$.

De même, si m_0 est un point donné, montrer que les transformés des éléments de contact (m_0, δ) sont des éléments (M, Δ_0) , où Δ_0 ne dépend que de m_0 . On écrira $\Delta_0 = T(m_0)$.

Construire M_0 connaissant δ_0 et Δ_0 connaissant m_0 . Montrer qu'on peut considérer T comme le produit d'une transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle, par une autre transformation simple.

3° Montrer géométriquement ou analytiquement que si l'on rapporte le plan à d'autres axes obliques, les formules de transformation définissant T conservent une forme analogue. Quels sont les systèmes d'axes obliques pour lesquels les formules restent identiquement les mêmes ?

4° Soit C une courbe convexe fermée (1) admettant O comme centre de symétrie et régulière, c'est-à-dire ayant en tout point m une courbure fonction continue de m , et qui ne soit jamais nulle.

Montrer que T transforme les éléments de contact associés à C en éléments de contact associés à une courbe C' jouissant des mêmes propriétés que C , et qu'on appelle transformée de C [on la notera $C' = T(C)$].

Ce résultat peut-il s'étendre à toute courbe convexe de centre O ?

Soit C la courbe d'équation
$$\left| \frac{x}{a} \right|^n + \left| \frac{y}{b} \right|^n = 1$$

Pour quelles valeurs de n cette courbe est-elle convexe ? Quelle est alors l'équation de sa transformée $C' = T(C)$?

II. — Soit C une courbe convexe de centre O et régulière. On dira que c'est une *ellipsale* lorsque la condition suivante est satisfaite : pour tout couple de points m, m' de C tels que Om' soit parallèle à la tangente en m à C , la tangente en m' à C est parallèle à Om . On dira alors que $\overrightarrow{Om}$ et $\overrightarrow{Om'}$ sont deux rayons vecteurs conjugués.

1° Montrer que l'aire du parallélogramme construit sur deux rayons conjugués d'une ellipsale est une constante A .

(1) C'est-à-dire une courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta)$, où $f(\theta)$ est positive, continue et de période 2π , et telle que la courbe tourne en tout point sa concavité vers O .

Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que C soit une ellipsale est que la courbe $C' = T(C)$ soit homothétique à C .

En quel sens peut-on appeler ellipsale une courbe convexe de centre O non régulière ? Donner un exemple de polygone qui soit une ellipsale ;

2° Montrer que la donnée d'un arc $\widehat{mm'}$ d'ellipsale C , où $\vec{Om}$ et $\vec{Om'}$ sont deux rayons conjugués, détermine entièrement C .

Plus généralement, si $\vec{OP}$, $\vec{OP'}$ sont deux rayons vecteurs non colinéaires et si $\vec{OP''} = \vec{OP} + \vec{OP'}$, montrer que si $\widehat{PP'}$ est un arc convexe contenu dans le parallélogramme $OPP'P''$, tangent en P à PP'' et en P' à $P'P''$, cet arc appartient à une ellipsale et une seule dont on indiquera la construction.

3° Montrer que dans toute ellipsale C il existe deux rayons conjugués orthogonaux. On prendra comme axes de coordonnées les axes portant ces rayons. L'équation d'une tangente à C s'écrit alors sous forme normale :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p(\alpha).$$

Montrer, dans le cas où $p(\alpha)$ possède une dérivée seconde continue et où $A = 1$, que l'aire de C est égale à :

$$S = \int_0^{\pi} \left[p^2 + \frac{1}{p^2} - p'^2 \right] d\alpha.$$

Sèvres 1951

Première composition.

On considère dans un plan deux faisceaux de droites de sommets respectifs O , O' . Les droites de chacun des faisceaux sont repérées au moyen de leurs pentes, m , m' respectivement.

On établit entre ces deux faisceaux une correspondance homographique (à coefficients réels) :

$$\mathfrak{S} = A mm' + Bm + Cm' + D = 0$$

et on représente cette correspondance par le point H de l'espace dont les coordonnées homogènes sont A , B , C , D .

1° La correspondance est dite dégénérée lorsqu'il existe deux rayons distincts du faisceau de sommet O correspondant à un même rayon du faisceau de sommet O' .

Montrer que le lieu des points H qui représentent des correspondances dégénérées est une quadrique réellement réglée Q .

Si $m = u$, $m' = v$ sont les pentes des rayons dont les correspondants sont indéterminés, montrer que ces paramètres sont liés très simplement aux génératrices rectilignes de Q ;

2° On considère toutes les homographies qui admettent un couple donné $m_1 m'_1$. Quel est le lieu des points H qui représentent ces homographies ? Quelle relation y a-t-il entre ce lieu et la quadrique Q ?

En déduire une détermination, dans l'espace, de tous les couples de l'homographie représentée par un point arbitrairement donné H . Inversement :

construction du point H représentant l'homographie définie par trois couples ;

3° Quel est le point U qui représente la correspondance $\mathcal{U}$ dans laquelle les rayons homologues sont constamment parallèles ? Caractérisez les correspondances dont le point représentatif H est dans le plan polaire de U par rapport à Q ;

4° Quel est le point représentatif de la correspondance dans laquelle les rayons homologues font un angle constant V ? Lieu de ce point lorsque V varie.

Quel est le lieu des points représentatifs des correspondances dans lesquelles les bissectrices des rayons homologues ont des directions fixes ? Quelle relation y a-t-il entre ces lieux et la quadrique Q ?

5° On considère deux homographies $\mathcal{S}_1 (A_1 B_1 C_1 D_1)$ et $\mathcal{S}_2 (A_2 B_2 C_2 D_2)$ et on leur associe le faisceau :

$\mathcal{S}_1 + \lambda \mathcal{S}_2 = (A_1 + \lambda A_2)mm' + (B_1 + \lambda B_2)m + (C_1 + \lambda C_2)m' + D_1 + \lambda D_2 = 0$
représenté par la droite $H_1 H_2$.

Combien y a-t-il de rayons issus de O qui ont le même homologue dans toutes ces homographies ? Comment sont définies les homographies dégénérées du faisceau ?

Caractériser par ses homographies dégénérées, le faisceau d'homographies représenté par la droite conjuguée de $H_1 H_2$ par rapport à Q. Combien y a-t-il dans une homographie $\mathcal{S}$ donnée, de rayons parallèles à leurs homologues ? Discuter la réalité suivant la position du point H.

Combien y a-t-il, dans $\mathcal{S}$, de rayons qui font l'angle V (orienté) avec leurs homologues ? Discuter la réalité suivant la position du point H et la valeur de V ;

6° Etudier la correspondance $\mathcal{C}$ entre deux droites du faisceau (O) qui ont la même droite homologue dans le faisceau (O') quand on effectue sur l'une l'homographie $\mathcal{S}_1$ et sur l'autre l'homographie $\mathcal{S}_2$. Quelle propriété présente $\mathcal{C}$ lorsque les points H_1, H_2 sont conjugués par rapport à Q ? Cette propriété est-elle caractéristique ?

Comment peut-on définir alors l'ensemble de toutes les homographies représentées par les points d'un plan quelconque ?

Plus généralement, la droite $H_1 H_2$ coupe Q en deux points A, B et on pose : $(A, B, H_1, H_2) = \rho$.

Quelle est la signification géométrique de ce nombre ρ pour la correspondance $\mathcal{C}$? On pourra commencer par examiner le cas où $\mathcal{S}_1$ est l'homographie dans laquelle les rayons font l'angle V et $\mathcal{S}_2$ l'homographie à rayons parallèles ; puis le cas où $\mathcal{S}_1$ étant quelconque, $\mathcal{S}_2$ est encore l'homographie à rayons parallèles.

7° Réciproquement, étudier la correspondance entre les points H_1, H_2 qui représentent deux homographies conduisant à une même transformation $\mathcal{C}$ donnée du faisceau (O) :

On montrera que la droite $H_1 H_2$ rencontre deux génératrices de Q dont tous les points sont fixes.

Examiner le cas où $\mathcal{C}$ est une rotation.

On associe aux homographies $\mathcal{S}_1 = \mathcal{O}$ et $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}$ la correspondance $\mathcal{C}$ qu'elles définissent dans le faisceau (O). Est-il possible de trouver une homographie $\mathcal{S}'$ telle que $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}_2 = \mathcal{O}$ définissent la même correspondance $\mathcal{C}$? Etudier la correspondance géométrique entre les points H et H'.

8° Etudier l'ensemble des faisceaux d'homographies dont les homographies dégénérées définissent dans (O) une involution donnée $\mathcal{I}$; on caractérisera la famille des droites représentatives de ces faisceaux relativement à Q et on déterminera le lieu de celles de ces droites qui passent par un point donné arbitraire P, ainsi que l'enveloppe de celles qui sont situées dans un plan donné Π . Cas où P est sur Q. Cas où Π est tangent à Q. Cas particulier où $\mathcal{I}$ est une rotation d'un angle droit.

Deuxième composition.

Notations. — Le symbole $|u|$ désigne le module (ou valeur absolue) du nombre u . $\log u$ désigne le logarithme népérien de u . Les variables utilisées sont des nombres réels.

1° Soit la fonction $g(x)$ définie par les relations, où a est une constante positive : $g(x) = x \log |x| - (x-a) \log |x-a|$, si $x(x-a) \neq 0$,
et $g(0) = g(a) = a \log a$.

Etudier les variations de $g(x)$.

2° Soit la fonction $f(x)$, où λ est un paramètre différent de zéro, définie par les relations : $f(x) = \frac{\log |x-\lambda|}{\log |x|}$, si $x(x^2-1)(x-\lambda) \neq 0$, $f(0) = 0$.

On nomme C_λ la courbe d'équation cartésienne : $y = f(x)$. Etudier la forme de C_λ suivant les valeurs de λ . Eléments remarquables de C_λ . (La position précise des points d'inflexion n'est pas demandée).

3° Etudier les limites éventuelles des racines de $g(x) = 0$, [$g(x)$ définie au 1°], lorsque a tend vers zéro. [On pourra appliquer la formule des accroissements finis à la fonction des deux variables u, v : $(u-v) \log |u-v|$; ou considérer les courbes : $y = (x-a) \log |x-a|$].

4° Pour $|\lambda|$ assez petit C_λ a des points à tangente parallèle à l'axe Ox . Ces points ont-ils des limites lorsque λ tend vers zéro ?

5° Parmi les fonctions $f(x)$ du 2°, l'une, $\varphi(x)$, est croissante dans tout intervalle où elle est définie. On nomme Γ dans toute la suite du problème la courbe d'équation $y = \varphi(x)$. Allure de Γ au voisinage de l'origine. Rayon de courbure de Γ en ce point.

6° Soit P une particule matérielle dont la masse sera prise comme unité, mobile dans le plan de Γ et soumise exclusivement aux deux actions mécaniques suivantes :

a. La force $\vec{F}$ d'un champ permanent ne dépendant en chaque point $M(x, y)$ que de l'abscisse x de ce point et parallèle à Oy ;

b. Une résistance opposée au mouvement de P par le milieu et propor-

tionnelle à la vitesse $\vec{V}$ de P. L'expression de cette résistance est $-\alpha\vec{V}$, où α est un coefficient fonction uniquement de la position M de P.

Dans une certaine expérience on constate que P décrit un arc γ de Γ , l'instant t de passage en chaque point M (x, y) s'exprimant avec une origine et une unité convenables pour t , par : $t = -y \log |x|$.

Déterminer les éléments inconnus α et $\vec{F}$. (Il pourra être commode de noter que le produit $t \frac{dy}{dt}$ est une fonction rationnelle de x et y).

NOTA. — La résolution des 3° et 4° n'est pas nécessaire pour aborder la fin du problème.

Epreuve pratique.

Les données, exprimées en centimètres, sont rapportées à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz . L'axe Oy est parallèle au petit axe de la feuille à 16 du bord inférieur ; il est orienté vers la droite ; le plan xOy est le plan horizontal de projection ; le plan yOz est le plan frontal de projection ; le plan xOz est de profil suivant la parallèle au grand axe de la feuille à 15 du bord gauche ; Ox est orienté positivement vers le bas et Oz vers le haut.

Un cône (S) a pour base, dans le plan de front $x=5$, le cercle (C) de rayon 5 et de centre A ($x=5 ; y=4 ; z=13$).

Une génératrice du cône est de bout et son sommet S est tel que la droite AS ait pour paramètres directeurs (1, — 1, — 1), la cote de S étant inférieure à la cote de A.

Un cylindre parabolique (Q), dont les génératrices sont parallèles à AS, a pour base, dans le plan de front $x=5$, la parabole de foyer A, et de sommet B ($x=5 ; y=6,5 ; z=13$).

1° Déterminer les projections horizontale et frontale de l'intersection (L) de (S) et de (Q). Point courant et tangente en ce point. Éléments remarquables.

2° Représenter le solide commun au cône et au cylindre, pleins et de la même substance, en limitant ce solide aux portions qui satisfont aux inégalités : $5 \leq x \leq 12$.

3° Rédiger une notice *sommaire* sur la partie droite de la feuille (et non au verso) dans laquelle on expliquera les particularités géométriques de l'épure. On pourra mettre quelques lettres sur le dessin pour faciliter les explications.

St-Cloud et Fontenay 1951 (Sciences)

Première composition (Epreuve commune).

NOTA. — Les parties I, II, III et, dans la partie III, les questions a et b, peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy , un point A sur Ox ($\overline{OA}=a$), et un point B sur Oy ($\overline{OB}=b$).

I. — On suppose d'abord que A et B varient de façon que la différence $a-b=K$ reste constante et positive. On pose $a=b \operatorname{tg} t$. Le cercle de centre B, de rayon K, coupe la droite AB en C et C'.

a. Montrer que la fonction $y = \frac{K}{\operatorname{tg} t - 1} - K \cos t$ donne, en faisant varier t de 0 à 2π , à la fois les variations des ordonnées de C et de C'. Etudier ces variations et tracer la courbe représentative.

b. Calculer l'aire comprise entre Ot et l'arc de cette courbe correspondant à $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$.

c. On a défini, au début de cette première partie, une famille de droites AB dépendant du seul paramètre t . Soit (Γ) le cercle de rayon K centré sur Oy en un point variable d'ordonnée $K\lambda$. Discuter, suivant les valeurs de λ , le nombre de points C ou C' réels appartenant à des droites AB de la famille et situés sur (Γ). On pourra prendre pour (Γ) la représentation paramétrique : $x' = K \sin \theta$ $y = K(\lambda + \cos \theta)$.

II. — Montrer, de préférence géométriquement, que lorsque A et B varient de façon que reste constante, soit la somme $a+b=h$, soit la différence $a-b=K$, la médiatrice de AB passe par un point fixe, ω ou ω' , que l'on construira dans chaque cas. Quel est alors le lieu du milieu de AB ?

III. — On suppose enfin A et B fixes ($a>b>0$). Soient (U) un cercle centré en U sur Ox et passant par A et (V) un cercle centré en V sur Oy et passant par B.

a. Un cercle (U) étant donné, construire les cercles (V_1) et (V_2) qui lui sont tangents. Lieux des points de contact M_1 et M_2 de (U) avec (V_1) et (V_2), quand (U) varie. Montrer que le cercle de centre W, passant par B, M_1 et M_2 est orthogonal aux trois cercles (U), (V_1), (V_2), et que le produit $\overline{OU} \cdot \overline{HW}$ reste constant, si H est le point de coordonnées (a, b).

b. Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que (U) et (V) soient tangents est que : $\overline{OU} + \varepsilon \overline{OV} + \varepsilon' \overline{UV} = \overline{OA} + \varepsilon \overline{OB}$, ε et ε' pouvant prendre les valeurs ($+1$) ou (-1).

En déduire qu'un des cercles tangents aux trois côtés du triangle OUV a un rayon constant ; et que par suite la droite UV reste tangente à l'un ou

l'autre de deux cercles (Ω) et (Ω') centrés respectivement en ω et ω' et tangents aux deux axes, chacun de ces cercles correspondant à un signe déterminé de ε .

Deuxième composition (Option).

Soient deux axes rectangulaires Ox, Oy , et le cercle (C) dont un diamètre OA est porté par Ox , $\overline{OA} = a > 0$.

Etant donné un point M quelconque du plan, la perpendiculaire menée en O à OM rencontre (C) en P , autre que O ; on fait correspondre au point M le point M_1 où la perpendiculaire menée en P à PM coupe la droite OM . Quand M décrit un arc de courbe (μ) , M_1 décrit un arc de courbe (μ_1) .

1° Soient $\varphi = \overline{OM}$ et $\varphi_1 = \overline{OM_1}$ les rayons vecteurs de M et M_1 mesurés sur le même axe Ou tel que : $(Ox, Ou) = \theta$. Trouver la relation entre φ , φ_1 et θ . On désigne par V et V_1 les angles que font avec Ou les tangentes en M et M_1 aux arcs (μ) et (μ_1) . Démontrer la formule :

$$(1) \quad \cotg V + \cotg V_1 = 2 \cotg \theta.$$

Pour quelles positions du point M sur la courbe (μ) le point M_1 se trouve-t-il en O ? Quelle est alors la tangente à (μ_1) en O ? Le point M étant donné sur Oy , ainsi que la tangente en ce point à (μ) , construire M_1 et la tangente en M_1 à (μ_1) .

2° Soit (γ) le cercle de diamètre MM_1 . Quels lieux doivent décrire M et M_1 , pour que le cercle (γ) soit constamment tangent au cercle (C) . Quel est, dans ces conditions, le lieu du milieu de MM_1 ?

3° En utilisant la relation (1) trouver les lieux que doivent décrire M et M_1 pour que les tangentes à ces lieux, en deux points correspondants M et M_1 , soient perpendiculaires.

4° Trouver le lieu de M_1 quand M décrit un cercle orthogonal en O au cercle (C) . Trouver, de préférence géométriquement, l'enveloppe de la droite PM , le lieu du milieu I de PM , et l'enveloppe de la droite $M_1 I$.

5° Construire le lieu (ω_1) du point M_1 quand M décrit le cercle (ω) passant par O et centré au point ω de coordonnées polaires :

$$\varphi = a, \quad \theta = \alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

On appelle E_1 le point de rencontre de (ω_1) avec son asymptote (Δ_1) et F_1 le point où la tangente à (ω_1) est parallèle à (Δ_1) . Déterminer les angles polaires de E_1 et F_1 ; construire (Δ_1) , E_1 , et F_1 , connaissant le point ω .