

Agrégation masculine 1951

Mathématiques Élémentaires (7 heures).

I. — 1° Dans un plan (II) orienté, on donne un point O et un vecteur non nul $\vec{Ou}$ d'origine O . Ils définissent une transformation ponctuelle $\mathcal{C}(O, u)$ de la manière suivante :

A tout point a de (II), elle fait correspondre le point A , sur la demi-droite symétrique de la demi-droite Ou par rapport à la droite Oa , tel que

$$OA = \frac{Oa^2}{Ou}.$$

Deux points tels que a et a' , symétriques par rapport à O , ont le même transformé A par $\mathcal{C}(O, u)$. Examiner la transformation inverse de $\mathcal{C}(O, u)$.

Si au point fixe u on substitue un autre point u_1 ($\vec{Ou}_1$ non nul), la transformation $\mathcal{C}(O, u_1)$ fait correspondre à a le point A_1 ; montrer qu'on passe de A_1 à A par une similitude directe de centre O qui ne dépend que des points O, u, u_1 .

2° La demi-droite Ou jouant le rôle d'axe polaire dans le plan (II), on pourra désigner l'angle polaire $(\vec{Ou}, \vec{V})$ d'un vecteur $\vec{V}$ de ce plan, dans toute la suite, par la notation abrégée $\hat{V} \pmod{2\pi}$.

Deux points a et b de (II) étant transformés par $\mathcal{C}(O, u)$ en A et B , respectivement, prouver que $AB = \frac{ba \cdot ba'}{Ou}$ et que $\hat{AB} = \hat{ba} + \hat{ba'} \pmod{2\pi}$.

On choisira d'abord u_1 en A .

3° On fait tendre b vers a sur une courbe ayant en a une tangente at , montrer que la courbe décrite par B admet en A une tangente $A\theta$ telle que : $(OA, A\theta) = (Oa, at) \pmod{\pi}$.

4° On considère la transformée par $\mathcal{C}(O, u)$ d'une ellipse ($\mathcal{E}$) de centre O , de foyers f et f' , d'excentricité e . Démontrer que c'est une ellipse ayant comme foyers O et le point F transformé de f et de f' ; évaluer en fonction de e son excentricité.

Inversement, toute ellipse de foyer O peut-elle être regardée comme transformée, par $\mathcal{C}(O, u)$ d'une certaine ellipse de centre O ?

5° Aux deux extrémités m et n , sur l'ellipse ($\mathcal{E}$), des demi-diamètres conjugués Om et On , correspondent sur l'ellipse transformée deux points M et N . Prouver qu'ils sont diamétralement opposés.

II. — N. B. : Les notations indiquées ici sont sans relation avec celles qui ont été employées dans I.

Soient (a, a') , (b, b') , (c, c') trois couples de points, donnés dans (II), supposés essentiellement distincts et formés chacun de points symétriques par rapport à O.

1° Résoudre, par application de la transformation $\mathcal{C}(O, u)$, le problème : déterminer une ellipse de centre O, passant par a et b et dont l'excentricité soit minimum.

On montrera qu'il existe une telle ellipse $e(a, b)$, caractérisée par le fait que les droites ba et ba' sont parallèles aux diamètres conjugués *égaux* de cette ellipse.

2° On considère sur $e(a, b)$ l'extrémité μ du demi-diamètre conjugué de Oa , telle que $\overrightarrow{O\mu}$ et $\overrightarrow{Ob}$ sont d'un même côté du diamètre aa' ; et l'extrémité l du demi-diamètre conjugué de Ob , telle que $\overrightarrow{Ol}$ et $\overrightarrow{Oa}$ sont d'un même côté du diamètre bb' .

En permutant circulairement les rôles des points a, b, c , on définit l'ellipse $e(b, c)$, puis l'ellipse $e(c, a)$, qui sont d'excentricité minimum parmi les ellipses de centre O passant par b et c , puis par c et a .

Sur $e(b, c)$ les points v et m sont définis comme l'ont été μ et l , en remplaçant respectivement a et b par b et c .

Sur $e(c, a)$ les points λ et n sont définis comme l'ont été v et m sur $e(b, c)$, en remplaçant b par c et c par a .

u étant un point fixe de (II), distinct de O, on représentera la nouvelle figure, formée par les points A, B, C, L, M, N, P, Q, R, respectivement transformés par $\mathcal{C}(O, u)$ des points $a, b, c, l, m, n, \lambda, \mu, v$.

Analyser, dans cette figure, comment on peut lier directement L, M, N, P, Q, R, aux points O, A, B, C.

3° L'opération $\mathcal{C}(O, u)$ transforme les ellipses $e(a, b)$, $e(b, c)$, $e(c, a)$ en les ellipses respectives E(A, B), E(B, C), E(C, A), dont les foyers, autres que O, sont désignés par F_C, F_B, F_A , respectivement.

Comment ces points se déduisent-ils simplement du point O, relativement au triangle ABC ? (On écartera le cas où A, B, C sont alignés).

Montrer que le triangle $F_A F_B F_C$ est homologue du triangle ABC dans une similitude *indirecte*.

Etablir les égalités vectorielles

$$\overrightarrow{F_B N} = \overrightarrow{F_C M} = -\overrightarrow{OA} \quad \overrightarrow{F_C L} = \overrightarrow{F_A P} = -\overrightarrow{OB} \quad \overrightarrow{F_A M} = \overrightarrow{F_B Q} = -\overrightarrow{OC}$$

Les points A, L, P sont sur un même cercle de centre O. Etablir que les droites LQ, MP se coupent en un point P' appartenant à ce cercle.

En déduire que le triangle P'Q'R', dont les côtés Q'R', R'P', P'Q' sont portés par les droites NQ, LP, MQ, est homologue dans une translation du triangle $F_A F_B F_C$.

En appelant P, Q, R, les symétriques de P', Q', R' par rapport à O, le triangle PQR est symétrique du triangle $F_A F_B F_C$ par rapport à un certain point I.

4° Soit F le symétrique de O par rapport à la médiatrice du segment QR ; prouver que $RQMN$ est un rectangle, et que $\overrightarrow{F_P Q} = -\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{F_B A}$, puis que F_P est symétrique de A par rapport à I . Les symétriques F_Q et F_R de O par rapport aux médiatrices respectives des segments RP et PQ ont des propriétés analogues que l'on précisera.

5° Montrer que le triangle $F_P F_Q F_R$ est homologue du triangle $F_A F_B F_C$ dans une similitude *indirecte* où le point O est invariant.

Soit F le symétrique de O par rapport à I : comment peut-on passer de la figure $FABC$ à la figure $FPQR$? Etablir que chacune de ces figures est formée de points cocycliques.

6° Soient $E(P, Q)$, $E(Q, R)$, $E(R, P)$ les ellipses de foyer commun O , de seconds foyers respectifs F_R , F_P , F_Q , et de grands axes respectivement égaux à ceux de $E(A, B)$, $E(B, C)$, $E(C, A)$; montrer que $E(Q, R)$ est circonscrite au rectangle $RQMN$; propriétés analogues.

Prouver que l'ellipse (E) , de foyers O et F , ayant comme longueur de grand axe $OA + OB + OC$, est tangente à chacune des ellipses $E(A, B)$, $E(B, C)$, $E(C, A)$, $E(P, Q)$, $E(Q, R)$, $E(R, P)$. Les points de contact respectifs seront désignés par W, U, V, Z, X, Y .

Montrer que (E) contient à son intérieur les six ellipses précédentes.

7° Les ellipses $E(P, Q)$, $E(Q, R)$, $E(R, P)$ sont les transformées par $\mathcal{C}$ (O, u) d'ellipses de centre O qu'on dénote $e(p, q)$, $e(q, r)$, $e(r, p)$, p, q, r étant des points dont les transformés respectifs sont P, Q, R . (Provisoirement, chacun des points p, q, r n'est défini qu'à la symétrie près de centre O).

L'ellipse (E) est la transformée par $\mathcal{C}$ (O, u) d'une certaine ellipse $(\mathcal{E})$ de centre O qui est bitangente à $e(a, b)$, $e(b, c)$, $e(c, a)$, $e(p, q)$, $e(q, r)$, $e(r, p)$ en des points diamétralement opposés sur $(\mathcal{E})$: (w, w') , (u, u') , (v, v') , (z, z') , (x, x') , (y, y') . Chacune de ces six ellipses est intérieure à $(\mathcal{E})$.

III. — *Définition précise des points p, q, r .* On emploie ici la notation angulaire définie dans (I, 2°).

1° Montrer qu'il résulte des définitions données au (II, 2°) pour μ et l les relations angulaires

$$\begin{aligned} \widehat{Ob} + \widehat{O\mu} &= \widehat{ba} + \widehat{ba'} \\ \widehat{Oa} + \widehat{Ol} &= \widehat{ab} + \widehat{ab'} \end{aligned} \quad (\text{mod. } 2\pi)$$

et écrire les relations analogues définissant $\widehat{Ov}$, $\widehat{Om}$, $\widehat{Ol}$, $\widehat{On}$.

En faisant intervenir $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{Ob} + \widehat{O\mu} &= \widehat{AB} & \widehat{Ob} + \widehat{Om} &= \widehat{BC} + \pi \\ \widehat{Oc} + \widehat{Ov} &= \widehat{BC} & \widehat{Oc} + \widehat{On} &= \widehat{CA} + \pi \\ \widehat{Oa} + \widehat{Ol} &= \widehat{CA} & \widehat{Oa} + \widehat{Ol} &= \widehat{AB} + \pi \end{aligned} \quad \text{et} \quad (2) \quad (\text{mod. } 2\pi).$$

2° Les points r, r' sont communs à $e(q, r)$ et à $e(r, p)$. Prouver qu'on peut choisir celui de ces points, dénoté r , de manière que $\overrightarrow{Or}$ et $\overrightarrow{On}$ sont de même côté de la droite Ou , et aussi que $\overrightarrow{Or}$ et $\overrightarrow{Ov}$ sont de même côté de la droite Ol .

On démontrera, à cet effet que ces choix reviennent à supposer que

$$(3) \quad \widehat{On} + \widehat{Or} = \widehat{MN} \quad (4) \quad \widehat{Ov} + \widehat{Or} = \widehat{LN} \pmod{2\pi}$$

et que la compatibilité de ces conditions, compte tenu des relations (1) et (2), résulte de la similitude *indirecte* des triangles ABC et $F_A F_B F_C$.

De même, par des stipulations analogues, on peut définir sans ambiguïté les points appelés p et q . Ecrire, dans ces conditions, le système formé par (3) et deux équations analogues, et le système formé par (4) et deux équations analogues.

3° Montrer qu'il résulte de (I, 2°) que les tangentes communes en (w, w') à $(\mathcal{E})$ et à $e(a, b)$ sont parallèles à Or , et donner des propriétés analogues relatives aux points (u, u') , (v, v') , (x, x') , (y, y') , (z, z') .

4° Evaluer le rapport des distances algébriques de a et b à la droite ww' ; on pourra considérer un cercle dont $e(a, b)$ soit la projection orthogonale sur (Π) , et l'on trouvera pour ce rapport l'expression $-\frac{Ob \sin(\overrightarrow{O\mu}, \overrightarrow{Or})}{Oa \sin(\overrightarrow{Ol}, \overrightarrow{Or})}$.

Evaluer de même le rapport des distances algébriques à ww' de a et μ , et de b et l .

Ces propriétés, concernant $e(a, b)$, ont comme analogues des propriétés concernant des points de $e(b, c)$, $e(c, a)$ et aussi $e(p, q)$, $e(q, r)$, $e(r, p)$.

IV. — Il existe deux cylindres de révolution passant par $(\mathcal{E})$. Soit Δ l'axe de révolution d'un d'eux, (S) une sphère inscrite à ce cylindre, le long d'un grand cercle Φ de (S) , de centre S .

On propose de démontrer qu'il existe sur (S) des points $a_1, b_1, c_1, l_1, m_1, n_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1, p_1, q_1, r_1$ dont les projections obliques sur (Π) , effectuées parallèlement à Δ , sont respectivement $a, b, c, l, m, n, \lambda, \mu, \nu, p, q, r$, et qui déterminent, avec S comme sommet les deux trièdres *supplémentaires*

$$(Sa_1, Sb_1, Sc_1) \text{ et } (Sp_1, Sq_1, Sr_1).$$

A cet effet on démontrera les propositions préliminaires suivantes :

1° Toute ellipse de (Π) , de centre O , tangente à $(\mathcal{E})$ en deux points symétriques par rapport à O , et intérieure à $(\mathcal{E})$, se déduit de $(\mathcal{E})$ par une affinité *oblique* dont l'axe est le diamètre joignant ces deux points, et que l'on précisera.

2° Cette même ellipse peut être considérée comme projection *oblique* sur (Π) , parallèlement à Δ , de *deux* grands cercles de (S) .

3° On précisera la situation des points $a_1, b_1, c_1, l_1, m_1, n_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1, p_1, q_1, r_1$ par des nombres proportionnels aux distances *algébriques* de ces points au plan de Φ , en considérant les produits vectoriels

$$\begin{aligned} &O_n \wedge O_q, \quad O_l \wedge O_r, \quad O_m \wedge O_p, \quad O_r \wedge O_b, \quad O_p \wedge O_c, \quad O_q \wedge O_a, \\ &O_c \wedge O_q, \quad O_a \wedge O_r, \quad O_b \wedge O_p, \quad O_v \wedge O_b, \quad O_\lambda \wedge O_c, \quad O_\mu \wedge O_a, \end{aligned}$$

On aura à utiliser les relations angulaires des groupes (1), (2), (3), (4) que l'on a rencontrées dans les 1° et 2° de III.

Enfin on démontrera les relations suivantes donnant les mesures des faces des deux trièdres supplémentaires

$$\begin{array}{lll} \operatorname{tg} \frac{\widehat{b_1 S c_1}}{2} = \frac{bc}{b'c} & \operatorname{tg} \frac{\widehat{c_1 S a_1}}{2} = \frac{ca}{c'a} & \operatorname{tg} \frac{\widehat{a_1 S b_1}}{2} = \frac{ab}{a'b} \\ \operatorname{tg} \frac{\widehat{q_1 S r_1}}{2} = \frac{qr}{q'r} & \operatorname{tg} \frac{\widehat{r_1 S p_1}}{2} = \frac{rp}{r'p} & \operatorname{tg} \frac{\widehat{p_1 S q_1}}{2} = \frac{pq}{p'q} \end{array}$$

Mathématiques Spéciales.

I. — 1° On donne la parabole Γ qui a pour équation $y^2 - 2px = 0$ ($p > 0$), par rapport à deux axes quelconques Ox, Oy .

M étant un point du plan xOy , la parallèle à Ox menée par M coupe Γ en P ; soit P' l'un des points où la parallèle menée par M à Oy coupe Γ . Trouver le lieu Σ du point M tel que $\overline{MP'} = \lambda \overline{MP}$, λ étant un nombre algébrique donné.

Etant données deux paraboles Γ_1 et Γ_2 d'un même plan, dont l'une se déduit de l'autre par une translation, peut-on obtenir Γ_2 à partir de Γ_1 à l'aide de la construction précédente?

2° On donne l'hyperbole Γ qui a pour équation $xy = \frac{c^2}{4}$ ($c > 0$), par rapport à deux axes quelconques Ox, Oy .

M étant un point du plan xOy , la parallèle à Ox menée par M coupe Γ en P ; soit P' l'un des points où la parallèle menée par M à une direction fixe L du plan coupe Γ (L n'est parallèle, ni à Ox , ni à Oy). Trouver le lieu Σ du point M tel que $\overline{MP'} = \lambda \overline{MP}$, λ étant un nombre algébrique donné.

Etant données deux hyperboles Γ_1 et Γ_2 d'un même plan ayant même asymptote Ox et même centre O , peut-on obtenir Γ_2 à partir de Γ_1 à l'aide de la construction précédente?

II. — On donne les formes quadratiques

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

$$\varphi(u, v) \equiv Cu^2 + 2Buv + Av^2,$$

où les coefficients A, B, C sont réels; on suppose A et C non nuls et $\Delta = AC - B^2$ non nul.

Soit Γ la conique réelle ayant pour équation

$$F(x, y) \equiv f(x, y) - k^2 = 0, \quad (k > 0)$$

par rapport à deux axes quelconques Ox, Oy d'un plan.

1° M étant un point de ce plan, on désigne par P et P' deux points de Γ tel que $\overline{MP}$ soit parallèle à Ox et que $\overline{MP'}$ soit parallèle à Oy . Le lieu du point M tel que $\overline{MP'} = \lambda \overline{MP}$, λ étant un nombre algébrique donné, est en général une conique Σ .

Former l'équation ponctuelle de Σ , ainsi que son équation tangentielle (on donnera l'expression des divers coefficients des variables).

Comparer la nature de Σ avec celle de Γ .

2° Etudier les cas particuliers où la conique Σ se décompose ou n'existe pas.

3° Combien passe-t-il de coniques Σ par un point donné du plan ? Quelle est l'enveloppe des coniques Σ quand λ varie ?

4° Etant donné un parallélogramme et deux coniques Γ_1 et Γ_2 tangentes aux quatre côtés de ce parallélogramme, peut-on obtenir Γ_2 à partir de Γ_1 à l'aide de la construction donnée en II, 1° ?

III. — On désigne par $f(x, y, z)$ la forme quadratique :

$$f(x, y, z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$

à coefficients réels ; on suppose A, A', A'' non nuls.

$$\text{On suppose } \delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} \quad \text{non nul.}$$

On désigne par a, a', a'', b, b', b'' les coefficients des éléments A, A', A'', B, B', B'' dans le développement de δ , et l'on pose :

$$\varphi(u, v, w) \equiv au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wv + 2b''uv.$$

Les axes $Oxyz$ étant quelconques, on donne la quadrique *réelle* Q d'équation :

$$F(x, y, z) \equiv f(x, y, z) + D = 0 \quad (D \neq 0).$$

1° M étant un point de l'espace, P' et P'' désignent deux points de Q tels que MP' soit parallèle à Oy , et MP'' parallèle à Oz .

Montrer que le lieu du point M tel que : $\frac{\overline{MP'}}{\mu} = \frac{\overline{MP''}}{\nu}$, μ et ν étant deux nombres algébriques donnés, est, en général, une quadrique Σ_1 .

Développer l'équation ponctuelle de Σ_1 en donnant l'expression des divers coefficients des variables, ainsi que son équation tangentielle (on désignera par u, v, w, s , les coordonnées tangentielles homogènes d'un plan).

Comparer la nature de Σ_1 et celle de Q .

2° Etudier les cas particuliers où Σ_1 se décompose ou n'existe pas.

3° Combien passe-t-il de quadriques Σ_1 par un point donné de l'espace ? Quelle est l'enveloppe de Σ_1 quand μ et ν varient ?

IV. — Des notations sont celles de la III^e partie.

1° M étant un point de l'espace, et P, P', P'' trois points de Q tels que MP soit parallèle à Ox , MP' parallèle à Oy , MP'' parallèle à Oz , on pro-

pose d'étudier le lieu $\mathcal{L}$ des points M tels que : $\frac{\overline{MP}}{\lambda} = \frac{\overline{MP'}}{\mu} = \frac{\overline{MP''}}{\nu}$,

λ, μ, ν étant trois nombres algébriques donnés.

Montrer qu'en général $\mathcal{L}$ est une conique qui appartient à la quadrique Σ_1 , étudiée à la III^e partie, ainsi qu'à la quadrique Σ_2 lieu des points M tels

que : $\frac{\overline{MP''}}{\nu} = \frac{\overline{MP'}}{\lambda}$, et à la quadrique Σ_3 lieu des points M tels que :

$$\frac{\overline{MP}}{\lambda} = \frac{\overline{MP'}}{\mu}$$

Donner l'équation du plan $\mathcal{P}$ de la conique $\mathcal{Q}$.

Signaler les cas particuliers qui peuvent se présenter pour certaines valeurs de λ, μ, ν ; ces cas particuliers seront écartés dans la suite de cette étude.

$$2^\circ \text{ On pose } \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{A'\mu^2 + A''\nu^2 - B_2\mu\nu}{\mu\nu} \\ \sigma' = \frac{A''\nu^2 + A\lambda^2 - 2B'\nu\lambda}{\nu\lambda} \\ \sigma'' = \frac{A\lambda^2 + A'\mu^2 - 2B''\lambda\mu}{\lambda\mu} \end{array} \right.$$

Vérifier l'identité des pôles N_1, N_2, N_3 du plan $\mathcal{P}$ par rapport aux quadriques $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ avec les points dont les coordonnées homogènes sont $(-\sigma, \sigma', \sigma'', 0)$; $(\sigma, -\sigma', \sigma'', 0)$; $(\sigma, \sigma', -\sigma'', 0)$.

3° Σ_2 et Σ_3 ont en commun, outre $\mathcal{Q}$, une conique $\mathcal{M}_1$ située dans un plan $\mathcal{P}_1$; Σ_3 et Σ_1 ont de même en commun une conique $\mathcal{M}_2$ située dans un plan $\mathcal{P}_2$; Σ_1 et Σ_2 ont en commun une conique $\mathcal{M}_3$ située dans un plan $\mathcal{P}_3$. Former les équations des plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$.

Vérifier sur ces équations que ces trois plans ont une droite commune.

Montrer que cette droite commune contient deux points I et I' communs à $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, et non situés sur $\mathcal{Q}$.

Calculer les coordonnées des points I et I'.

4° Trouver l'équation tangentielle de la conique $\mathcal{Q}$. Etudier la nature des points à l'infini de $\mathcal{Q}$ et montrer qu'elle est liée au signe du produit $\delta\sigma\sigma'\sigma''$.

5° Former l'équation cartésienne de la surface $\mathcal{J}$ engendrée par les points I et I' définis au 3° de IV, quand λ, μ, ν varient, en supposant $B=0, B'=0, B''=0$.

Calcul différentiel et intégral.

1. — 1° Soit $f(x)$ une fonction définie pour $x \geq 1$, réelle, bornée dans tout intervalle $1 \leq x \leq a$.

Montrer, dans les deux cas suivants :

a) $f(x)$ continue sauf en un nombre fini de points dans tout intervalle $1 \leq x \leq a$,

b) $f(x)$ intégrable au sens de Riemann dans tout intervalle $1 \leq x \leq a$, qu'il existe α_0 , qui peut éventuellement être $+\infty$ ou $-\infty$, tel que

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} x^\alpha f(x) dx \quad \alpha \text{ réel}$$

converge à l'infini pour $\alpha < \alpha_0$, diverge à l'infini pour $\alpha > \alpha_0$.

2° Soit β un nombre complexe, $R(\beta)$ sa partie réelle.

Montrer que sous les mêmes conditions que plus haut concernant $f(x)$, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} x^\beta f(x) dx$$

converge à l'infini pour $R(\beta) < \alpha_0$, diverge à l'infini pour $R(\beta) > \alpha_0$.

3° Soit C une courbe du plan des axes rectangulaires Ox, Oy , rectifiable, partant de $(1, 0)$ et s'éloignant à l'infini. On désigne par s l'arc (positif) de cette courbe compté à partir de $(1, 0)$, par $r(x, y)$ la distance à l'origine du point (x, y) .

On suppose que le long de C , x et y sont des fonctions continues de s et que dans tout intervalle $0 \leq s \leq a$.

$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ sont définies et continues sauf en un nombre fini de points.

On considère l'intégrale curviligne

$$J(\alpha) = \int_C r^\alpha(x, y) [p(x, y) dx + q(x, y) dy] \quad \alpha \text{ réel ;}$$

$p(x, y), q(x, y)$ sont des fonctions définies sur C , réelles, bornées et intégrables au sens de Riemann sur tout arc $0 \leq s \leq a$.

Montrer que si, sur C , r est une fonction croissante de s , il existe α_0 qui peut éventuellement être $+\infty$ ou $-\infty$, tel que l'intégrale $J(\alpha)$:
converge pour $\alpha < \alpha_0$, diverge pour $\alpha > \alpha_0$.

4° Montrer que si $J(\alpha_1)$ converge, $J(\alpha)$ converge uniformément pour $\alpha \leq \alpha_1$.

5° On se propose de construire un exemple prouvant que le résultat de (I, 3°) peut devenir inexact si r n'est pas une fonction croissante de s . On montrera qu'il suffit de trouver deux fonctions $f(s)$ et $g(s)$ telles que $\int_0^{+\infty} f(s) ds$ converge à l'infini, tandis que $\int_0^{+\infty} g^\alpha(s) f(s) ds$ diverge à l'infini, quel que soit α (réel) non nul,

$g(s)$ satisfaisant aux conditions auxiliaires suivantes : $g(s)$ est positif, continue ; $g'(s)$ est définie et continue, sauf pour $s = k\pi$ (k entier positif quelconque) ; $|g'(s)| \leq 1$, $g(0) = 1$ $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s) = +\infty$.

On prendra $f(s) = \frac{d}{ds} \left[\frac{\sin s}{\text{Log}(1+s)} \right]$ et on cherchera une fonction $g(s)$ satisfaisant aux conditions ci-dessus.

II. — 1° On considère dans le plan complexe une courbe C , analogue à celle de (I, 3°), partant d'un point z_0 distinct de l'origine. On désigne par $f(z)$ une fonction analytique en chaque point de cette courbe et on pose

$$K(\alpha) = \int_C z^\alpha f(z) dz, \quad \alpha \text{ réel, l'intégrale étant prise sur } C.$$

Montrer que si $r \geq ks$, k désignant une constante positive, il existe un α_0 qui peut être $+\infty$ ou $-\infty$, tel que

$K(\alpha)$ converge pour $\alpha < \alpha_0$, $K(\alpha)$ diverge pour $\alpha > \alpha_0$.

2° On considère en particulier $L(\alpha) = \int z^\alpha e^{-z} dz$.

Trouver pour cette intégrale des courbes pour lesquelles α_0 est $+\infty$, α_0 est $-\infty$, $\alpha_0 = p$ avec convergence, divergence pour α_0 .

On essayera des courbes ayant une branche infinie telle que

$$x = p \log y \quad x = p \log y + \log (\log y).$$

3° On se propose de construire un exemple montrant que le résultat de (II, 1°) peut devenir inexact si r , fonction croissante de s , ne satisfait pas à l'inégalité $r \geq ks$.

On pourra prendre $f(z) = \frac{1}{\log z}$ et comme courbe une spirale convenable.

III. — Soit $f(z)$ une fonction analytique dans la demi-bande $0 \leq y \leq 1$ $x \geq 1$.

On suppose que les intégrales $\int_p f(z) dz$ prises sur les parallèles à Ox situées dans la demi-bande, convergent et sont uniformément bornées.

1° On considère les courbes C_b $0 \leq b \leq 1$ formées des deux morceaux de droite :

$$\begin{aligned} x &= 1 & 0 \leq y \leq b, \\ y &= b & x \geq 1, \end{aligned}$$

et les intégrales : $M(\alpha) = \int f(z) z^\alpha dz$ $\alpha < 0$ prises sur ces courbes, parcourues du point $(1, 0)$ jusqu'à l'infini.

Montrer que $M(\alpha)$ ne dépend pas de b .

En déduire que $\int f(z) dz$ pris sur les mêmes courbes ne dépend pas non plus de b .

3° Peut-on en déduire que l'intégrale $\int f(z) dz$ prise sur une courbe tracée dans la demi-bande, partant de $(1, 0)$ et s'éloignant à l'infini converge et a une valeur indépendante de la courbe ? Montrer qu'inversement, si l'intégrale converge sur toute courbe de la demi-bande s'éloignant à l'infini, l'hypothèse du préambule de (III) est vérifiée.

Mécanique.

Un disque circulaire homogène pesant (D), de centre G, de masse m , de rayon $2a$ et d'épaisseur négligeable repose, dans le champ de la pesanteur d'intensité g , par un point M de sa circonférence, sur un plateau circulaire horizontal (II) de centre O, animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de son axe (Δ). Au contact de (D) et de (II) se développe un frottement de glissement, de coefficient f (on néglige les frottements de roulement et de pivotement). L'un des deux demi-axes, d'origine G, du disque (D) est matérialisé par une tige rectiligne rigide (T) de

masse et d'épaisseur négligeables, assujettie, par un dispositif convenable *sans frottement*, à rencontrer constamment l'axe (Δ) en un point K.

On repérera l'orientation du disque (D) par rapport à un trièdre fixe au moyen des trois angles d'Euler ψ, θ, φ tels que $(\Delta, T) = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) [les axes portant (Δ) et (T) étant orientés positivement, le premier vers le haut, le second dans le sens de $\vec{K\bar{G}}$] et on achèvera de définir la position de (D) par l'une des trois longueurs $\overline{OK} = h, KG = l, OM = \varphi$ (la première étant algébrique), que l'on pourra même employer simultanément à condition de tenir compte des équations qui les relient. On désignera par mX, mY, mZ les composantes de la réaction du plateau (II) sur le disque (D) au point M, par rapport à un trièdre déduit du trièdre fixe par la rotation de l'angle ψ autour de l'axe (Δ) : le second de ses axes a la direction et le sens de $\vec{MO}$, le troisième est celui, déjà défini, portant (Δ).

I. — On suppose que le point K est fixé à la fois sur (T) et sur (Δ), et l'on amène, sans vitesses initiales, le disque (D) au contact du plateau (II).

Le glissement de (D) sur (II) s'arrête-t-il ? Si oui, au bout de combien de temps et que se passe-t-il après ?

Calculer le travail qu'il faut fournir au plateau (II) pour maintenir constante la rotation ω pendant cette première phase de glissement.

On envisagera les trois cas : (a) $h = 0$, (b) $h < 0$, c) (h) > 0 . Il pourra être commode de chercher à exprimer, en fonction du temps t , la vitesse v de la molécule M du disque (D) en contact avec le plateau (II).

II. — On libère le point K à la fois sur (T) et sur (Δ) et on suppose que le coefficient f est assez grand pour que le disque (D) ne puisse que rouler et pivoter sans glisser sur le plateau (II).

Montrer que l'intégration des équations du mouvement de (D) se ramène à des quadratures. Peut-on, à cet effet, utiliser l'intégrale des forces vives ?

A quelles conditions obtient-on des mouvements stationnaires ($\theta = C^te$) ? Etudier leur stabilité par la considération des mouvements voisins. Envisager plus particulièrement le cas où la tige (T) reste horizontale.

N.-B. — Les parties I et II sont indépendantes ; on pourra les traiter dans un ordre arbitraire. Dans l'étude de l'une et de l'autre de ces parties, il pourra être commode d'utiliser le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Δ) et par rapport à la tige (T).